Übungsblatt 7

Aufgabe 19. Sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein achsenparalleler Quader und $f\colon Q \to \mathbb{R}$ stetig. Wir betrachten $\operatorname{graph}(f) = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^{n+1} \mid x \in Q\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Zeigen Sie, dass $\operatorname{vol}_{n+1} \operatorname{graph}(f) = 0$ ist.

Aufgabe 20 (1.5+1.5+2)**.** Sei

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y)^T \mapsto (\cosh x \cos y, \sinh x \sin y)^T,$$

(i) Zeigen Sie, dass $y \in \mathbb{R} \mapsto f(x, y)$ für fast jedes $x \in \mathbb{R}$ eine Ellipse ist (s. nächste Seite für einen Kurzüberblick zu Ellipsen und Hyperbeln). Was sind die Halbachsen und Brennpunkte? Für welche x stimmt das nicht und was ist dann das Bild?

(ii) Zeigen Sie, dass $x \in \mathbb{R} \mapsto f(x, y)$ für fast jedes $y \in \mathbb{R}$ eine Hyperbel ist. Was sind die Halbachsen und Brennpunkte? Für welche y stimmt das nicht und was ist dann das Bild?

(iii) Finden Sie eine Teilmenge $V \subset \mathbb{R}^2$ (möglichst zusammenhängend), so dass $f|_V\colon V \to \mathbb{R}^2$ bijektiv ist. Ist $f|_V$ dann ein Hömoömorphismus? Finden Sie ein $U \subset V$ offen derart, dass $f|_U\colon U \to f(U)$ ein Diffeomorphismus ist und $U \subset V$ maximal mit dieser Eigenschaft ist.

Aufgabe 21 (2+1+1+1)**.** (i) Sei $f(x, y) = (ax, by)$ für $a, b > 0$. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ Jordan-messbar. Zeigen Sie <u>ohne</u> Verwendung der Transformationsformel/ einer Koordinatentransformation in $\mathbb{R}^2$, dass $f(\Omega) := \{f(z) \mid z \in \Omega\}$ Jordan-messbar mit $\operatorname{vol} f(\Omega) = ab\operatorname{vol}\Omega$ ist.

(ii) Benutzen Sie (i) um den Flächeninhalt des Inneren einer Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ aus dem Flächeninhalt eines Kreises zu berechnen.

(iii) Berechnen Sie alternativ den Flächeninhalt aus (ii), in dem Sie den Flächeninhalt im ersten Quadraten unter der Ellipse berechnen.

(iv) Die gleiche Methode hilft leider nicht den Umfang der Ellipse einfach zu berechnen. Rechnen Sie nach, dass $L = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t}dt$ der Umfang der Ellipse ist. Dies ist ein elliptisches Integral. Schreiben Sie L als ein Vielfaches eines vollständigen elliptisches Integral zweiter Art[1], d.h. der Form $c\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - m^2 \sin^2 t}dt$, und lesen Sie mittels Abbildung 17.2 der Fußnote[2] ab, was die Länge einer Ellipse mit $a = 2$ und $b = 1$ ist (dazu muss natürlich erst das zugehörige α dort bestimmt werden).

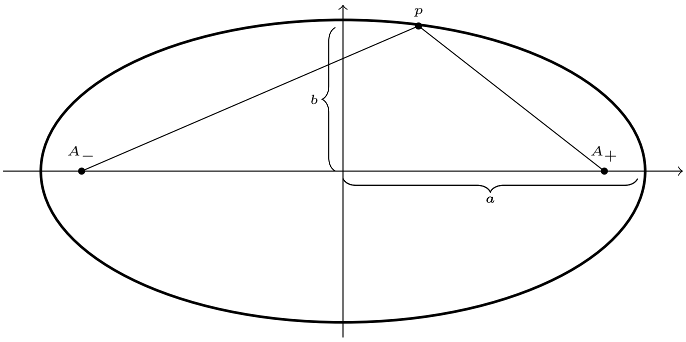
Abgabe bis Mittwoch 14.12.22 8:00 Uhr online oder in den Briefkasten im Untergeschoss

[1] https://personal.math.ubc.ca/~cbm/aands/page_590.htm – 17.3.3
[2] https://personal.math.ubc.ca/~cbm/aands/page_592.htm

Kurzüberblick zu Ellipsen und Hyperbeln

Ellipsengleichung in 'Normalform':

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a \geq b > 0$$



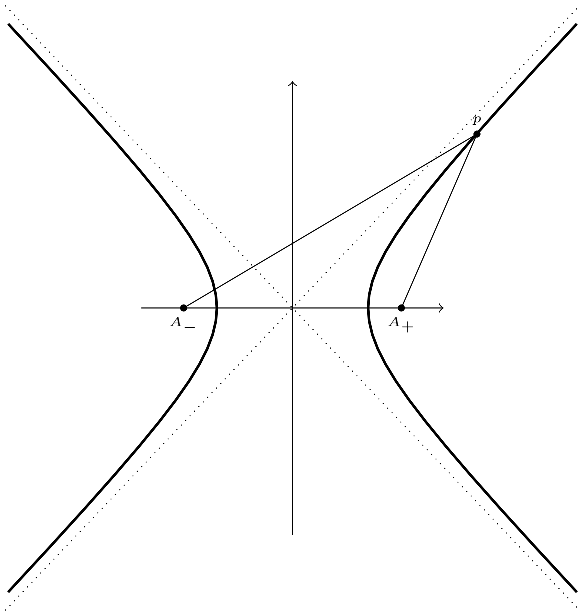
Hier sind $A_\pm = (\pm\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$ die *Brennpunkte* der Ellipse.
Anschaulich ist die Menge aller Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ gleich

$$\{\text{alle Punkte } p\text{, deren Summe der Abstände zu den Brennpunkten } A_\pm\text{, gleich } 2a \text{ ist}\}.$$

Das ist die sogenannte Gärtnerkonstruktion der Ellipse, https://de.wikipedia.org/wiki/Ellipse#G%C3%A4rtnerkonstruktion.

Hyperbelgleichung in 'Normalform':

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a, b > 0$$



Hier sind $A_\pm = (\pm\sqrt{a^2 + b^2}, 0)$ die *Brennpunkte* der Hyperbel.

Die Asymptoten der Hyperbel (gepunktete Geraden im Bild) sind $x \mapsto \pm\frac{b}{a}x$.
Anschaulich ist die Menge aller Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ gleich

$$\left\{\text{alle Punkte } p\text{, mit } \Big| |pA_+| - |pA_-| \Big| = 2a \right\}.$$