Übungsblatt 8

Aufgabe 22. Sei

$$\phi_1 \colon (s,t) \subset \mathbb{R}^2 \mapsto (s, ts) \in \mathbb{R}^2$$

und

$$\phi_2 \colon (r,\phi) \subset \mathbb{R}^2 \mapsto (r\cos\phi, r\sin\phi) \in \mathbb{R}^2$$

gegeben.

(i) Geben Sie für $i \in \{1,2\}$ jeweils eine maximale offene Teilmenge $U_i \subset \mathbb{R}^2$ an, so dass $\psi_i := \phi_i|_{U_i}$ ein Diffeomorphismus aufs Bild ist.

(ii) Sei das Dreieck $\Delta = \{(x,y) \mid x \in [0,a], 0 \le y \le bx\}$, für $a, b > 0$, gegeben. Skizzieren Sie jeweils $\psi_i^{-1}(\Delta)$.

(iii) Benutzen Sie für jedes ψ_i die Transformationsformel um den Flächeninhalt von Δ zu berechnen.

Aufgabe 23 (1.5+2+1.5)**.** Berechnen Sie von folgenden Funktionen jeweils das Integral über $B_R(0) = \{u \in \mathbb{R}^3 \mid |u| \le 1\} \subset \mathbb{R}^3$.

(i) $f(u) = |u|^2$

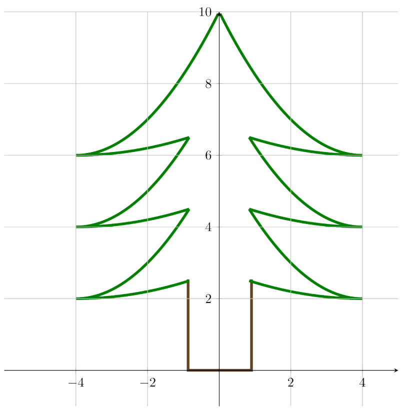
(ii) $f(u)$ ist das Quadrat des Abstandes von u zur z-Achse.

(iii) $f(u)$ ist der Abstand von u zur $x-y$-Ebene.

Aufgabe 24. Der Weihnachtsbaum entsteht aus dem Bild durch Rotation um die z-Achse. Dabei sind die Kurven, die den Rand des Weihnachtsbaum im ersten Quadranten bestimmen Stücke der Kurven

$$\begin{aligned} \phi_i(x) &= a_i(x-4)^2 + b_i \\ z &= 0 \\ x &= x_0 \end{aligned}$$

für $(a_i, b_i) \in \{(1/4, 6), (1/20, 6), (1/4, 4), (1/20, 4), (1/4, 2), (1/20, 2)\}$ und x_0 die x-Koordinate, wo sich zwei der ϕ_i Kurven im Bild schneiden.



Berechnen Sie das Volumen des Weihnachtsbaumes.

Abgabe bis Mittwoch 21.12.22 8:00 Uhr online oder in den Briefkasten im Untergeschoss