Übungsblatt 10

Sei $0 < r < R$. Sei $\mathbb{T}^2_{r,R} := \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid (\sqrt{x^2+y^2}-R)^2+z^2 = r^2\}$.

Aufgabe 28. Zeigen Sie, dass $\mathbb{T}^2_{r,R}$ (Definition oben) eine Untermannigfaltigkeit ist, skizzieren Sie diese und bestimmen Sie das Volumen von $A := \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid (\sqrt{x^2+y^2}-R)^2+z^2 \leq r^2\} \subset \mathbb{R}^3$.

Aufgabe 29. Sei

$$\begin{aligned} F\colon U := (0,2\pi)\times(0,2\pi) &\to \mathbb{R}^3 \\ (\phi,\theta) &\mapsto \begin{pmatrix} (R+r\cos\phi)\cos\theta \\ (R+r\cos\phi)\sin\theta \\ r\sin\phi \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Überprüfen Sie, dass F eine lokale Parametrisierung von $\mathbb{T}^2_{r,R}$ (Definition oben) ist. Bestimmen Sie $\mathbb{T}^2_{r,R}\setminus F(U)$ und das Volumen der Untermannigfaltigkeit $F(U) \subset \mathbb{T}^2_{r,R}$. Argumentieren Sie, dass $\mathbb{T}^2_{r,R}\setminus F(U) \subset \mathbb{T}^2_{r,R}$ als Teilmenge der Untermannigfaltigkeit $\mathbb{T}^2_{r,R}$ Volumen Null hat.[1]

Aufgabe 30 (2+1+2)**.** Berechnen Sie folgende Integrale

(i) $\int_M x\mathrm{dvol}$, wobei M der Teil der Sphäre $x^2+y^2+z^2 = R^2$ ist, welcher im ersten Oktanten liegt.

(ii) $\int_M y\mathrm{dvol}$, wobei M die obere Hemnisphäre der Sphäre $x^2+y^2+z^2 = R^2$ ist.

(iii) $\int_M \frac{1}{\sigma^2}\mathrm{dvol}$, wobei M der Teil des Zylinders $x^2+y^2 = R^2$ zwischen den Ebenen $z = 0$ und $z = H$ ist und σ die Funktion auf M ist, welche in jedem Punkt den Abstand zum Ursprung misst.

Abgabe bis Mittwoch 18.01.23 8:00 Uhr online oder in den Briefkasten im Untergeschoss

[1] Es geht also um das Integral $\int_{\mathbb{T}^2_{r,R}} 1_{\mathbb{T}^2_{r,R}\setminus F(U)}\mathrm{dvol}$ für die charakteristische Funktion $1_{\mathbb{T}^2_{r,R}\setminus F(U)}\colon \mathbb{T}^2_{r,R} \to \mathbb{R}$.