Übungsblatt 12

Aufgabe 34 (2.5+2.5). (i) Zeigen Sie explizit mit der Definition der komplexen Differenzierbarkeit, dass $f_1(z) = z^2$ komplex differenzierbar ist, $f_2(z) = \bar{z}$ jedoch nicht.

(ii) Sei $f_1(z) = \sin z$ und $f_2 = \cos z$. Es ist $\sin(\mathrm{i}x) = \mathrm{i}\sinh x$ und $\cos(\mathrm{i}x) = \cosh x$ für $x \in \mathbb{R}$. Nun folgt mit $\sin z := \sin(x + \mathrm{i}y)$ und Additionstheorem für den Sinus, dass $\sin z = \sin x \cosh y + \mathrm{i}\cos x \sin y$. Analog ist $\cos z := \cos(x + \mathrm{i}y)$.Rechnen Sie explizit nach, dass $f_1(z)$ und $f_2(z)$ die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen erfüllt und damit holomorph ist. Was ist $f_1'(z)$ und $f_2'(z)$?

Aufgabe 35 (2.5+2.5). (i) Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und sei $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph. Zeigen Sie: Ist $\operatorname{Re} f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ eine konstante Abbildung, dann war schon f konstant.[1]

(ii) Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und sei $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph. Zeigen Sie: Ist $|f|\colon \Omega \to \mathbb{R}$ eine konstante Abbildung, dann war schon f konstant.

Aufgabe 36 ist auf der Rückseite.

Abgabe bis Mittwoch 01.02.23 8:00 Uhr online oder in den Briefkasten im Untergeschoss

[1] Das gilt dann auch ganz analog für $\operatorname{Im} f\colon \Omega \to \mathbb{R}$.

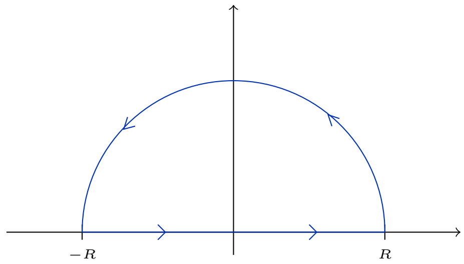

Abbildung 1: Die blaue Kurve (einmal durchlaufen) sei durch γ_R in Durchlaufrichtung der Pfeile parametrisiert. Dabei nennen wir den Anteil der Kurve, die den Halbkreis parametrisiert α_R.

Aufgabe 36. Füllen Sie die Fehlstellen aus und führen Sie die Anweisung vom Rand aus.

Wir wollen $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$ mittels komplexer Analysis berechnen. Da $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$ ist, wissen wir sogar schon was rauskommen muss: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x |_{-\infty}^{\infty} = \pi$. Aber das folgende Vorgehen ermöglicht auch einige andere reelle Integrale auszurechnen, wo wir oft keine Stammfunktion angeben können.

Es ist $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{\underline{\qquad\qquad}\}$. Von den Stellen, in denen f nicht holomorph ist, liegt nur $z_0 = \underline{\ }$ in der oberen Halbebene. Sei $\epsilon > 0$, so dass $B_\epsilon(z_0)$ vollständig in der oberen Halbebene liegt.

$B_\epsilon(z_0)$ ins Bild einzeichnen.

Es ist $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{R\to\infty} \int_{\underline{\quad}}^{\underline{\ }} \frac{1}{1+x^2} dx$. Um das rechte Integral zu berechnen, betrachten wir die Kurve γ_R wie in der Abbildung. Für R groß genug, liegt $B_\epsilon(z_0)$ vollständig im Inneren der von γ_R begrenzten Menge U. Sei D offen mit $\bar{U} \subset D$, so dass f auf $D \setminus B_\epsilon(z_0)$ $\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$ ist. Dann ist nach Folgerung 2.2.3

$$\int_{\gamma_R} f(z)dz = \int_{\partial B_\epsilon(z_0)} f(z)dz$$

Um die rechte Seite zu berechnen, zerlegen wir [2]

$$\frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{\underline{\quad}} \left(\frac{\underline{\ }}{z - z_0} + \frac{\underline{\ }}{z + \underline{\ }} \right).$$

Damit ist

$$\int_{\gamma_R} f(z)dz = \frac{1}{\underline{\quad}} \int_{\partial B_\epsilon(z_0)} \left(\frac{\underline{\ }}{z - \underline{\ }} + \frac{\underline{\ }}{z + \underline{\ }} \right) = \frac{1}{\underline{\quad}} \underbrace{\int_{\partial B_\epsilon(z_0)} \frac{\underline{\ }}{z - \underline{\ }} dz}_{=\underline{\qquad}\text{ Beispiel }\underline{\qquad}} + \frac{1}{\underline{\quad}} \underbrace{\int_{\partial B_\epsilon(z_0)} \frac{\underline{\ }}{z + \underline{\ }} dz}_{=\underline{\qquad}\text{ nach Satz}\underline{\qquad}}$$

$$= \underline{\qquad}.$$

Andererseits ist

$$\int_{\gamma_R} f(z)dz = \int_{-R}^{R} \frac{1}{1+x^2} dx + \int_{\alpha_R} f(z)dz.$$

Das heißt, wir brauchen noch $\lim_{R\to\infty} \int_{\alpha_R} f(z)dz$. Dazu wollen wir dieses Integral abschätzen:

$$\left| \int_{\alpha_R} f(z)dz \right| \leq \underline{\qquad\quad} L(\alpha_R) = \underline{\qquad\quad} \to \underline{\qquad} \qquad \text{für } R \to \infty.$$

Zusammen ergibt sich somit $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{R\to\infty} \left(\int_{\gamma_R} f(z)dz - \int_{\alpha_R} f(z)dz \right) = \pi$.

[2] Das ist eine Partialbruchzerlegung, vgl. [Analysis 1, Kap. 4.5.3].