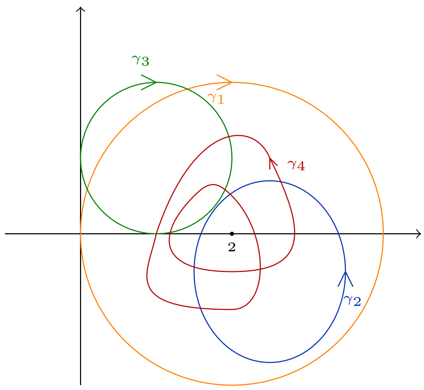
Erweiterung der Analysis

Ksenia Fedosova, Nadine Große

WS 22/23

Übungsblatt 13 – ohne Abgabe

Aufgabe 37. Sei $f(z) = \frac{e^{z^2}}{z-2}$. Seien $\gamma_i\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $i = 1, \ldots, 4$, stetig differenzierbar, so dass diese die Kurven im Bild einmal in angezeigter Durchlaufrichtung parametrisieren (Bei der roten Kurven wird im Schnittpunkt 'in Laufrichtung weiter gelaufen – also nicht abbiegen').



Bestimmen Sie $\int_{\gamma_i} f dz$ für $i = 1, \ldots, 4$ und $\int_{\gamma_2} \frac{e^{3z}}{(z-2)^3} dz$ (jeweils mit Begründung).

Aufgabe 38. Wir wollen $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$ noch einmal berechnen und dabei fast genau wie in Aufgabe 36 vorgehen – nur die Partialbruchzerlegung werden wir durch eine Verwendung des Cauchy-Integralsatzes ersetzen:

Wir beginnen genau wie in Aufgabe 36 bis wir die Formel

$$\int_{\gamma_R} f(z) dz = \int_{\partial B_\epsilon(z_0)} f(z) dz$$

haben. Um nun die rechte Seite zu berechnen, setzen wir $g(z) = \frac{1}{z+\underline{\quad}}$. Dann ist $f(z) = \frac{g(z)}{z-z_0}$. Die Funktion $g(z)$ ist auf der abgeschlossenen oberen Halbebene ______________. Damit folgt mit dem Cauchy-Integralsatz

$$\int_{\gamma_R} f(z) dz = \int_{\gamma_R} \frac{g(z)}{z-z_0} dz = \underline{\qquad\quad}$$

Der Rest geht jetzt genau wie in Aufgabe 36 weiter.

Verwenden Sie diese Abwandlung des Vorgehen von Aufg. 36, um so auch $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+4x^2)^2} dx$ zu berechnen.

Aufgabe 39.

(i) Sei $p \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, $R > 0$, $\epsilon > 0$ und $f\colon B_{R+\epsilon}(p) \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph. Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$|f^{(n)}(p)| \leq \frac{n!}{R^n} \max_{z \in \partial B_R(p)} |f(z)|.$$

(ii) Sei $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph und beschränkt. Zeigen Sie, dass f konstant ist.