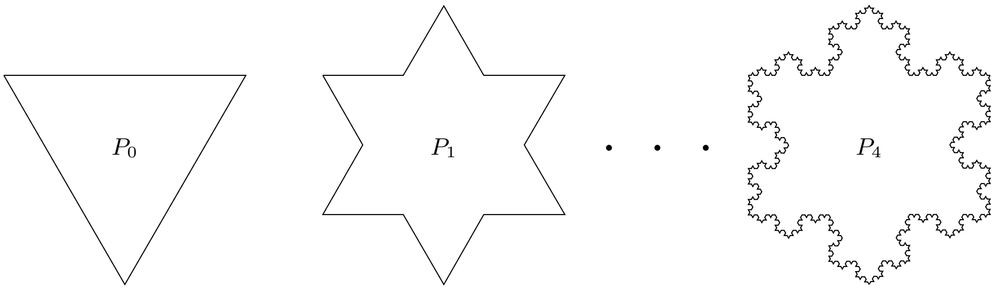
Gesammelte Übungsaufgaben

Aufgabe 1. Sei P_0 das gleichseitige Dreieck mit Seitenlänge 1. Wir definieren die Polygone P_n rekursiv wie folgt: P_{n+1} entsteht aus P_n, indem jede Kante des Polygons gedrittelt wird, auf dem mitteleren Drittel ein gleichseitiges Dreieck mit Seitenlänge gleich dem mittleren Drittel gesetzt wird und dann dieses mittlere Drittel gelöscht wird.



Sei ℓ_n der Umfang des Polygons P_n und A_n der Flächeninhalt des Polygons P_n.

(a) Bestimmen Sie ℓ_n und zeigen Sie, dass $\lim_{n\to\infty} \ell_n = \infty$ gilt.

(b) Bestimmen Sie $A_n - A_{n-1}$. Zeigen Sie, dass A_n für $n \to \infty$ konvergiert.

Aufgabe 2 (1+2.5+1.5)**.** Sei $\gamma\colon t \in [0, \frac{\pi}{2}] \mapsto (\cos^2(t), 2\sin^2(t))^T$.

(i) Skizzieren Sie γ.

(ii) Berechnen Sie die Bogenlänge $s(t)$; das ist die Länge der Kurve γ auf dem Intervall $[0, t]$ (Also $s(0) = 0$ und $s(\frac{\pi}{2}) = L(\gamma)$).

(iii) Die Funktion der Bogenlänge $s\colon [0, \frac{\pi}{2}] \to [0, L(\gamma)]$ ist ein Homöomorphismus. Warum? Ist es auch ein C^1-Diffeomorphismus Begründen Sie?

Aufgabe 3 (2.5+2.5)**.** Sei $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Die Variation $V(f)$ von f ist definiert als

$$V(f) := \sup_{\mathcal{Z}} \sum_{j=1}^{n} |f(x_j) - f(x_{j-1})|,$$

wobei das Supremum über alle Zerlegungen $\mathcal{Z} = (x_0 = a < x_1 < \ldots < x_n = b)$ des Intervalls $[a, b]$ geht.

(i) Beweisen Sie:

Sei $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{R}^n$ eine parametrisierte Kurve; $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t))^T$ für $\gamma_i\colon [a, b] \to \mathbb{R}$. Dann ist γ genau dann rektifizierbar, falls alle γ_i beschränkte Variation haben, d.h. falls $V(\gamma_i) < \infty$ für alle $1 \le i \le n$ gilt.

(ii) Zeigen Sie, dass die Funktion $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x\cos\frac{\pi}{x} & x \in (0, 1] \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

unbeschränkte Variation hat.

Nach (i) ist dann somit die Kurve $\gamma(t) = (t, f(t))^T$ mit f aus (ii) und $t \in [0, 1]$ nicht rektifizierbar.

Aufgabe 4 (1+1.5+1.5+1)**.** Berechnen Sie

(i) $\int_\gamma f ds$ für $f(x,y) = xy^2$ für eine Kurve γ die einmal den Kreis um den Ursprung vom Radius 2 umrundet.

(ii) $\int_\gamma V \cdot ds$ für $V(x,y) = \binom{2y}{1-x}$ entlang $\gamma\colon t \in [-1,2] \mapsto (t, 1-t^3)^T \in \mathbb{R}^2$

(iii) $\int_\gamma V \cdot ds$ für $V(x,y,z) = (0, x^2, -yz)^T$ entlang einer Kurve γ, die geradlinig von $(4,-1,2)^T$ nach $(1,7,-1)^T$ verläuft.

(iv) die Länge des Funktionsgraphen einer stetig differenzierbaren Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$.

Aufgabe 5. Sei $g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ stetig und $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ eine parametrisierte Kurve. Wir können g als Vektorfeld $V\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto (\operatorname{Re} g(x+\mathrm{i}y), \operatorname{Im} g(x+\mathrm{i}y))^T$ auffassen. Vergleichen Sie das Kurvenintegral zweiter Art $\int_\gamma V \cdot ds$ mit dem komplexen Kurvenintegral $\int_\gamma g\, dz$. Im Spezialfall, dass g nur reelle Werte annimmt, vergleichen Sie diese Integrale zusätzlich mit dem Kurvenintegral $\int_\gamma g ds$ erster Art.

Aufgabe 6. Sei $f\colon \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\} \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ stetig. Sei $\gamma_R\colon \theta \in [0,\pi] \mapsto Re^{\mathrm{i}\theta} \in \mathbb{C}$ für $R > 0$. Sei $a > 0$, $g(z) = e^{\mathrm{i}az} f(z)$ und $M_R := \max_{z \in \mathrm{Bild}(\gamma_R)} |f(z)|$. Zeigen Sie: Aus $\lim_{R\to\infty} M_R = 0$ folgt $\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} g(z) dz = 0$.

Hinweis: Schätzen Sie das Integral zunächst für ein festes R ab. Benutzen Sie dazu die Eulersche Formel und $\sin\theta \geq \frac{2}{\pi}\theta$ für $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ (Warum gilt die letzte Ungleichung?).

Aufgabe 7 (2+1+2)**.** (i) Sei $\Omega = \mathbb{Q} \cap [0,1] \subset Q = [0,1]$. Zeigen Sie, dass 1_Ω nicht integrierbar ist.

(ii) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, so dass 1_Ω integrierbar ist und $\operatorname{vol} \Omega = 0$. Sei $A \subset \Omega$. Zeigen Sie, dass dann auch 1_A integrierbar ist und $\operatorname{vol} A = 0$ gilt.

(iii) Sei $\Omega \subset [0,1]^2 \subset \mathbb{R}^2$ das rechtwinklige, gleichschenklige Dreieck mit Kantenlänge 1, so dass die beiden Katheten jeweils auf der x- bzw. y-Achse liegen. Bestimmen Sie $S_k(1_\Omega)$ und $S^k(1_\Omega)$ und damit dann (unter Verwendung der Definition der Integrierbarkeit) $\int_{[0,1]^2} 1_\Omega \mathrm{dvol}$.

Aufgabe 8 (1+2+2)**.** (i) Berechnen Sie $\int_{[0,\pi]\times[-\frac{\pi}{2},\pi]} \sin(x+y) \mathrm{dvol}$.

(ii) Bestimmen und skizzieren Sie $\Omega \subset [0,a] \times [0,a] \subset \mathbb{R}^2$, $a > 1$, so dass 1_Ω integrierbar ist (begründen Sie dann auch, warum es integrierbar ist) und das Anwenden von Fubini

$$\int_\Omega \mathrm{dvol} = \int_0^a \left(\int_0^x dy \right) dx$$

ergibt. Wenden Sie auf dieses Ω Fubini mit vertauschter Integrationsreihenfolge an und bestimmen Sie damit die Integrationsgrenzen in

$$\int_\Omega \mathrm{dvol} = \int_?^? \left(\int_?^? dx \right) dy.$$

(iii) Lösen Sie (ii) noch einmal für

$$\int_\Omega \mathrm{dvol} = \int_0^a \left(\int_{a-x}^{a^2-x^2} dy \right) dx$$

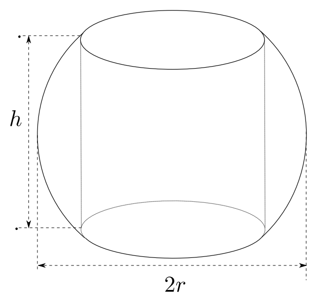
mit $\Omega \subset [0,a] \times [0,a^2]$ für $a > 1$.

Aufgabe 9 (2.5+2.5)**.** (Prinzip des Cavalieri)

(i) Seien $\Omega_i \subset \mathbb{R}^n$, $i = 1,2$, beschränkt und so dass $1_{\Omega_i} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ integrierbar sind. Für $h \in \mathbb{R}$ fassen wir $\Omega_{i,h} := \Omega_i \cap \{x_n = h\} \subset \mathbb{R}^{n-1} \times \{x_n = h\} \cong \mathbb{R}^{n-1}$ als Teilmenge von $\mathbb{R}^{n-1}$. Sei nun für alle $h \in \mathbb{R}$ die Funktion $1_{\Omega_{i,h}} : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ integrierbar. Sei $\operatorname{vol}_{n-1}\Omega_{i,h} := \int_{\mathbb{R}^{n-1}} 1_{\Omega_{i,h}} \mathrm{dvol}$ (vgl. Bemerkung 1.2.4). Sei $\operatorname{vol}_{n-1}\Omega_{1,h} = \operatorname{vol}_{n-1}\Omega_{2,h}$ für alle $h \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass dann $\operatorname{vol}\Omega_1 = \operatorname{vol}\Omega_2$ gilt.

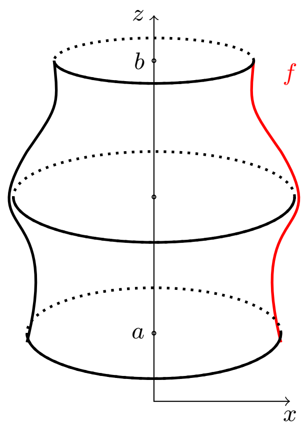
(ii) (Serviettenring-Problem)

Sie haben eine Kugel von Radius r und stechen mittels eines Zylinders, dessen Achse durch den Mittelpunkt der Kugel geht, ein Teil der Kugel aus. Dann bleibt (wenn der Radius des Zylinders kleiner r war) ein Rest übrig. Dieser Rest habe Höhe h. Zeigen Sie, dass das Volumen dieses Restes nicht vom Radius der ursprüngliches Kugel abhängt.



Aufgabe 10 (2.5+2.5)**.** (Volumen von Rotationskörpern)

(i) Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}_{>0}$ eine stetige Funktion. Betrachten wir im $\mathbb{R}^3$ in der (x,z)-Ebene den Funktionsgraphen von $x = f(z)$ und drehen diesen um die z-Achse. Dabei entsteht eine Rotationsfläche, vgl. Abbildung.



Diese schliesst zwischen den Ebenen $z = a$ und $z = b$ eine Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein. Geben Sie Ω in der Form $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \ldots\}$ an und zeigen Sie, dass

$$\operatorname{vol}\Omega = \int_a^b \pi f(z)^2 dz$$

ist.

(ii) Berechnen Sie mittels (i) das Volumen einer Kugel mit Radius r.

Aufgabe 11. Sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein Quader, $f\colon Q \to \mathbb{R}$ beschränkt und integrierbar und $g\colon Q \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie, dass dann auch $fg\colon Q \to \mathbb{R}$ integrierbar ist.
Hinweis: Schätzen Sie $S^k(fg) - S_k(fg)$ ab unter Verwendung, dass g automatisch gleichmäßig stetig sein muss, da Q kompakt ist.

Aufgabe 12 (2.5+2.5)**.** (i) $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ist das Innere, was durch die Menge $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$ beschränkt wird. Skizzieren Sie Ω und berechnen Sie das Volumen von Ω.

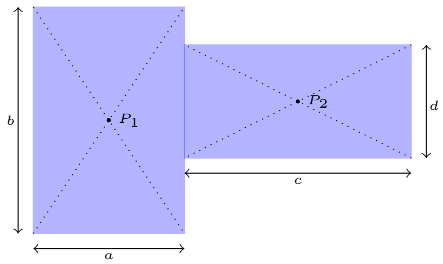
(ii) Berechnen Sie $\int_\Omega z \mathrm{dvol}$ für $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0\}$.

Aufgabe 13. Sei $V\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar. Parametrisieren Sie den Rand des Quadrates $Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ explizit mittels einer stückweise stetig differenzierbaren Kurve γ, die den Rand entgegen den Uhrzeigersinn durchläuft, und zeigen Sie, dass dann

$$\int_Q \operatorname{rot} V \mathrm{dvol} = \int_\gamma V \cdot ds$$

gilt.
Hinweis: Eine 'einfache Wahl' von γ verringert den Rechenaufwand. Dazu hilft es vielleicht erst einmal die linke Seite teilweise auszurechnen.

Aufgabe 14 (1.5+1.5+2)**.** (i) Zeigen Sie, dass der Schwerpunkt der blauen Fläche im Bild gleich dem Punkt $\frac{abP_1+cdP_2}{ab+cd}$ ist.



(ii) Wir betrachten eine Luftsäule mit rechteckiger Grundfläche Q (Seitenlängen seien a und b) und der Höhe h. Die Dichte der Luft sei $\rho(x, y, z) = \rho_0 e^{-\alpha z}$. Berechnen Sie die Masse der Luftsäule.

(iii) Zwei Zahlen werden zufällig aus dem Intervall $[0, 1]$ ausgewählt (uniform gleichverteilt). Das Maximum der beiden Zahlen nennen wir X, das Minimum Y. Ihre gemeinsame Wahrscheinlichkeitsdichte[1] ist dann

$$\rho_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 2 & \text{falls } 0 \le y \le x \le 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Was ist der Erwartungswert von X und was ist der Erwartungswert von $X \cdot Y$?

[1] Zur Info: $\rho_{X,Y}$ kann man sich wie folgt herleiten: Seien a, b die beiden gezogenen Zahlen. Dann berechnen sich X, Y aus a, b mittels $f\colon (a, b) \in [0, 1]^2 \to (X = \max\{a, b\}, Y = \min\{a, b\}) \in [0, 1]^2$. Da a, b unanhängig voneinander sind auch gleichverteilt aus $[0, 1]$ gezogen werden ist die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsdichte von a, b gleich $\rho_{a,b} = 1_{[0,1]^2}$. Wir wollen die gemeinsame Verteilungsfunktion $F_{X,Y}$ bestimmen und damit dann die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsdichte mittels $\rho(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F(x, y)$: Es ist

$$F_{X,Y}(c, d) = P(X \le c, Y \le d) = \begin{cases} P(a \le d, b \le d) + P(a \in [c, d), b \le d) + P(b \in [c, d), a \le b) = 2cd - d^2 & 0 \le d \le c \le 1 \\ P(a \le c, b \le c) = c^2 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aufgabe 15 (3+2+2*)**.** Wir haben einen Stahlträger der Länge L und mit Querschnitt $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ wie im Bild an den Enden aufgelegt und üben auf diesen in der Mitte eine Kraft F aus. Dabei verbiegt sich der Träger, vgl. Bild, und $w(x)$ sei die Auslenkung des Trägers in Abhängigkeit vom Ort x. Es gilt

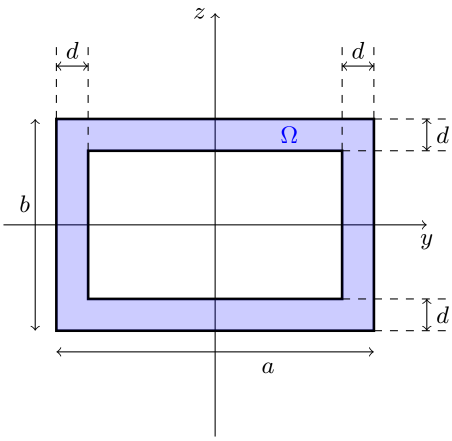
$$w''(x) = \frac{M_y(x)}{EI_y}.$$

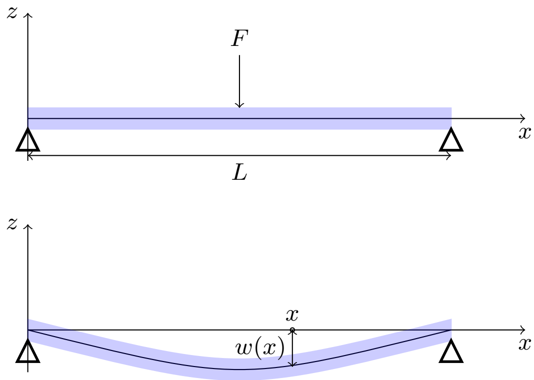
Hierbei ist E die Elastizitätskonstante des Materials des Trägers, also eine Materialkonstante. $M_y(x)$ ist das Biegemoment – für $x \in [0, \frac{L}{2}]$ ist dies gleich $\frac{F}{2}x$ und $I_y = \int_\Omega z^2 \mathrm{dvol}$ ist das Flächenmoment zweiten Grades des Trägers bei Belastung in z-Richtung.[2]

(i) Berechnen Sie I_y.

(ii) Was ist die maximale Auslenkung des Trägers?

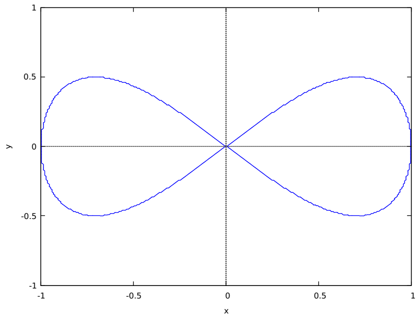
(*) Was ist die maximale Auslenkung für $L = 2\,\mathrm{m}$, $E_{\mathrm{Stahl}} = 210\,\mathrm{GPa}$, $a = 4\,\mathrm{cm}$, $b = 5\,\mathrm{cm}$, $d = 3\,\mathrm{mm}$ und $F = 1\,\mathrm{kN}$?





[2]Der Nullpunkt der z-Koordinaten liegt dabei im Schwerpunkt von Ω – also wie im Bild.

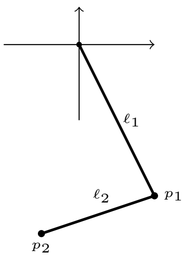
Aufgabe 16 (1.5+2+1.5)**.** (i) Wir betrachten $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^4 - x^2 + y^2$. Die Lösungsmenge von $f(x,y) = 0$ ist eine *Lemniskate/ figure-eight Kurve.*



Ist die Lemniskate eine Untermannigfaltigkeit? Wenn nicht, was ist die maximale Teilmenge, die eine Untermannigfaltigkeit ist. Begründen Sie.

(ii) Sei $a \in \mathbb{R}$ und $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^3 - 3ax - y^2$. Finden Sie alle Werte b, so dass $f^{-1}(b)$ eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2$ ist. Skizzieren Sie $f^{-1}(b)$ für einige Werte a und b, so dass qualitativ alle 'Typen' von Mengen $f^{-1}(b)$ abgebildet werden.

(iii)



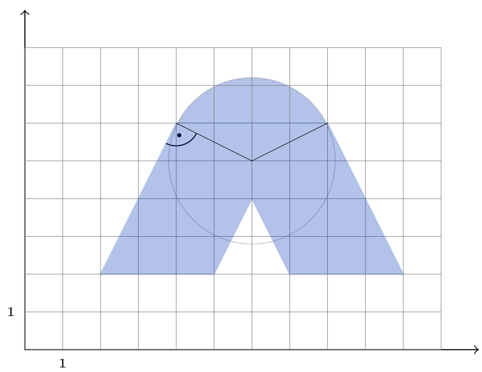
Sei ein Doppelpendel wie im Bild gegeben (d.h. der Aufhängepunkt im Ursprung ist fest, die Längen ℓ_1 und ℓ_2 der Stäbe ist fest, sonst ist alles frei beweglich). Sei $M \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{R}^4$ die Menge aller $(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^4$, die durch diese Konstruktion erreichbar sind. Bestimmen Sie M und zeigen Sie, dass M eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^4$ ist. Was ist die Dimension?

Aufgabe 17 (2.5+2.5)**.** Geben Sie genügend lokale Parametrisierungen an, um zu sehen, dass folgende Mengen nach Satz 1.3.4 Untermannigfaltigkeiten sind. Skizzieren Sie die Mengen. Was ist jeweils die Dimension?

(i) $S^m = \{x = (x_1, \ldots, x_{m+1})^T \in \mathbb{R}^{m+1} \mid \sum_i (x_i)^2 = 1\}$

(ii) $G = \{x = (x_1, \ldots, x_{m+1}, \ldots, x_{m+k})^T \in \mathbb{R}^{m+k=n} \mid x_{m+i} = f_i(x_1, \ldots, x_m)\}$ für eine glatte Funktion $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$.

Aufgabe 18. Die blaue Fläche im Bild habe die Massenverteilung $\rho(x,y) = y$. Berechnen Sie den Schwerpunkt.



Aufgabe 19. Sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein achsenparalleler Quader und $f\colon Q \to \mathbb{R}$ stetig. Wir betrachten $\operatorname{graph}(f) = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^{n+1} \mid x \in Q\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Zeigen Sie, dass $\operatorname{vol}_{n+1} \operatorname{graph}(f) = 0$ ist.

Aufgabe 20 (1.5+1.5+2)**.** Sei

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y)^T \mapsto (\cosh x \cos y, \sinh x \sin y)^T,$$

(i) Zeigen Sie, dass $y \in \mathbb{R} \mapsto f(x, y)$ für fast jedes $x \in \mathbb{R}$ eine Ellipse ist (s. nächste Seite für einen Kurzüberblick zu Ellipsen und Hyperbeln). Was sind die Halbachsen und Brennpunkte? Für welche x stimmt das nicht und was ist dann das Bild?

(ii) Zeigen Sie, dass $x \in \mathbb{R} \mapsto f(x, y)$ für fast jedes $y \in \mathbb{R}$ eine Hyperbel ist. Was sind die Halbachsen und Brennpunkte? Für welche y stimmt das nicht und was ist dann das Bild?

(iii) Finden Sie eine Teilmenge $V \subset \mathbb{R}^2$ (möglichst zusammenhängend), so dass $f|_V\colon V \to \mathbb{R}^2$ bijektiv ist. Ist $f|_V$ dann ein Hömoömorphismus? Finden Sie ein $U \subset V$ offen derart, dass $f|_U\colon U \to f(U)$ ein Diffeomorphismus ist und $U \subset V$ maximal mit dieser Eigenschaft ist.

Aufgabe 21 (2+1+1+1)**.** (i) Sei $f(x, y) = (ax, by)$ für $a, b > 0$. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ Jordan-messbar. Zeigen Sie <u>ohne</u> Verwendung der Transformationsformel/ einer Koordinatentransformation in $\mathbb{R}^2$, dass $f(\Omega) := \{f(z) \mid z \in \Omega\}$ Jordan-messbar mit $\operatorname{vol} f(\Omega) = ab \operatorname{vol} \Omega$ ist.

(ii) Benutzen Sie (i) um den Flächeninhalt des Inneren einer Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ aus dem Flächeninhalt eines Kreises zu berechnen.

(iii) Berechnen Sie alternativ den Flächeninhalt aus (ii), in dem Sie den Flächeninhalt im ersten Quadraten unter der Ellipse berechnen.

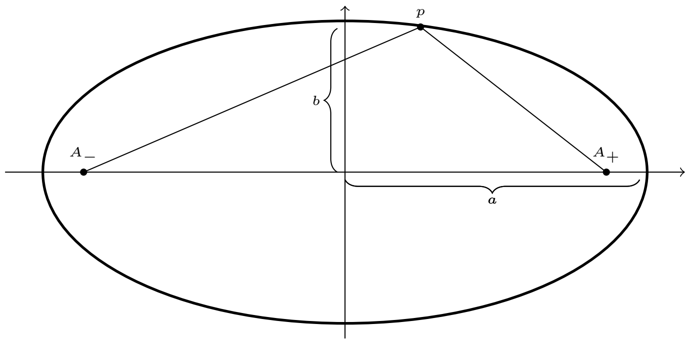
(iv) Die gleiche Methode hilft leider nicht den Umfang der Ellipse einfach zu berechnen. Rechnen Sie nach, dass $L = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t} dt$ der Umfang der Ellipse ist. Dies ist ein elliptisches Integral. Schreiben Sie L als ein Vielfaches eines vollständigen elliptisches Integral zweiter Art[3], d.h. der Form $c \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - m^2 \sin^2 t} dt$, und lesen Sie mittels Abbildung 17.2 der Fußnote[4] ab, was die Länge einer Ellipse mit $a = 2$ und $b = 1$ ist (dazu muss natürlich erst das zugehörige α dort bestimmt werden).

[3] https://personal.math.ubc.ca/~cbm/aands/page_590.htm – 17.3.3
[4] https://personal.math.ubc.ca/~cbm/aands/page_592.htm

Kurzüberblick zu Ellipsen und Hyperbeln

Ellipsengleichung in 'Normalform':

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a \geq b > 0$$



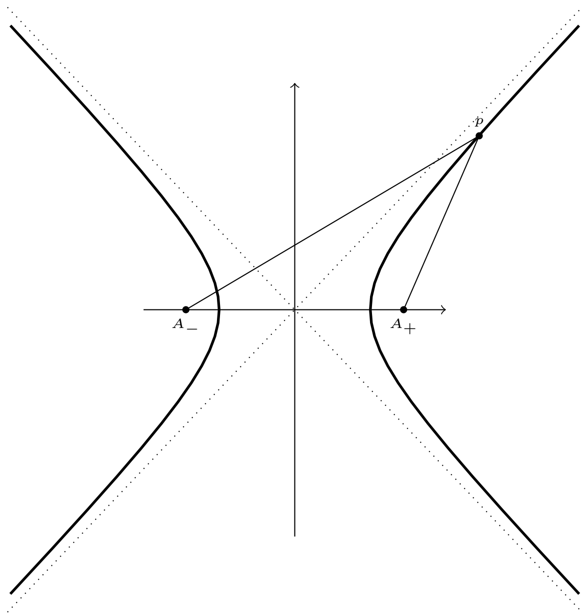
Hier sind $A_\pm = (\pm\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$ die *Brennpunkte* der Ellipse.
Anschaulich ist die Menge aller Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ gleich

$$\{\text{alle Punkte } p\text{, deren Summe der Abstände zu den Brennpunkten } A_\pm\text{, gleich } 2a \text{ ist}\}.$$

Das ist die sogenannte Gärtnerkonstruktion der Ellipse, https://de.wikipedia.org/wiki/Ellipse#G%C3%A4rtnerkonstruktion.

Hyperbelgleichung in 'Normalform':

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a, b > 0$$



Hier sind $A_\pm = (\pm\sqrt{a^2 + b^2}, 0)$ die *Brennpunkte* der Hyperbel.

Die Asymptoten der Hyperbel (gepunktete Geraden im Bild) sind $x \mapsto \pm\frac{b}{a}x$.
Anschaulich ist die Menge aller Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ gleich

$$\left\{\text{alle Punkte } p\text{, mit } \Big| |pA_+| - |pA_-| \Big| = 2a\right\}.$$

Aufgabe 22. Sei

$$\phi_1\colon (s,t) \subset \mathbb{R}^2 \mapsto (s, ts) \in \mathbb{R}^2$$

und

$$\phi_2\colon (r,\phi) \subset \mathbb{R}^2 \mapsto (r\cos\phi, r\sin\phi) \in \mathbb{R}^2$$

gegeben.

(i) Geben Sie für $i \in \{1,2\}$ jeweils eine maximale offene Teilmenge $U_i \subset \mathbb{R}^2$ an, so dass $\psi_i := \phi_i|_{U_i}$ ein Diffeomorphismus aufs Bild ist.

(ii) Sei das Dreieck $\Delta = \{(x,y) \mid x \in [0,a], 0 \leq y \leq bx\}$, für $a, b > 0$, gegeben. Skizzieren Sie jeweils $\psi_i^{-1}(\Delta)$.

(iii) Benutzen Sie für jedes ψ_i die Transformationsformel um den Flächeninhalt von Δ zu berechnen.

Aufgabe 23 (1.5+2+1.5)**.** Berechnen Sie von folgenden Funktionen jeweils das Integral über $B_R(0) = \{u \in \mathbb{R}^3 \mid |u| \leq 1\} \subset \mathbb{R}^3$.

(i) $f(u) = |u|^2$

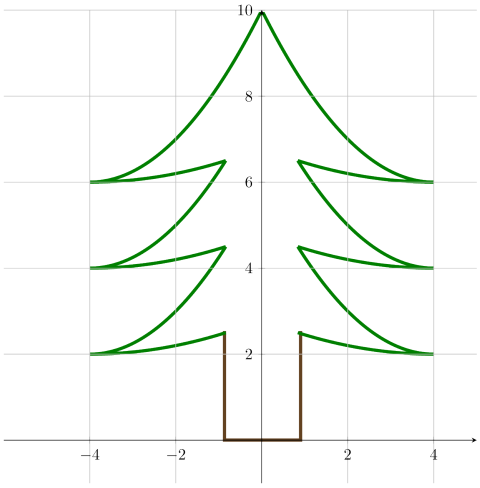
(ii) $f(u)$ ist das Quadrat des Abstandes von u zur z-Achse.

(iii) $f(u)$ ist der Abstand von u zur $x-y$-Ebene

Aufgabe 24. Der Weihnachtsbaum entsteht aus dem Bild durch Rotation um die z-Achse. Dabei sind die Kurven, die den Rand des Weihnachtsbaum im ersten Quadranten bestimmen Stücke der Kurven

$$\begin{aligned}\phi_i(x) &= a_i(x-4)^2 + b_i \\ z &= 0 \\ x &= x_0\end{aligned}$$

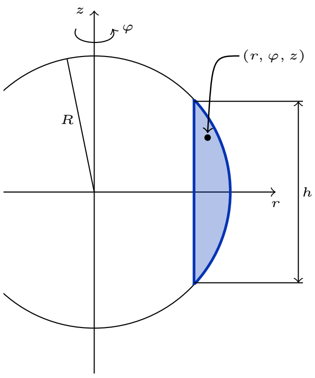
für $(a_i, b_i) \in \{(1/4, 6), (1/20, 6), (1/4, 4), (1/20, 4), (1/4, 2), (1/20, 2)\}$ und x_0 die x-Koordinate, wo sich zwei der ϕ_i Kurven im Bild schneiden.

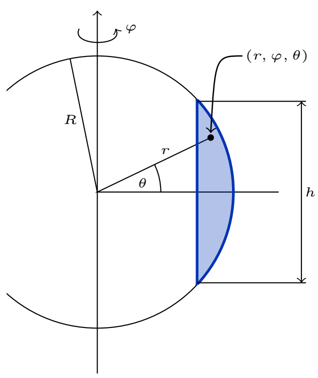


Berechnen Sie das Volumen des Weihnachtsbaumes.

Aufgabe 25. Wir betrachten noch einmal das Serviettenring-Problem aus Aufgabe 9. Dieses Mal wollen wir das Volumen des Serviettenringes anders ausrechnen und zwar mit der Transformationsformel.

Benutzen Sie einmal Zylinderkoordinaten (wie links im Bild) und einmal Kugelkoordinaten (wie rechts im Bild), um jeweils das Volumen des Serviettenrings der Höhe h entstanden aus einer Kugel vom Radius R zu berechnen.





Aufgabe 26. (i) Berechnen Sie das Trägheitsmoment des Rotationsellipsoids $\frac{x^2+y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$ $(a, b > 0)$ bei Rotation um die z-Achse.

(ii) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein Körper mit Masseverteilung $\rho\colon \Omega \to \mathbb{R}$. Der Schwerpunkt von Ω sei in $0 \in \mathbb{R}^3$. Sei J_1 das Trägheitsmoment um die z-Achse und J_2 das Trägheitsmoment bei Rotation um die Achse, die durch den Punkt $a = (a_1, a_2, 0)^T \in \mathbb{R}^3$ geht und zur z-Achse parallel ist. Sei m die Masse von Ω.

Zeigen Sie, dass $J_2 = J_1 + m|a|^2$ gilt.

Aufgabe 27. (i) Sei $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}_{>0}$ eine glatte Funktion und S die Menge, welche durch Rotation der Kurve $\{(f(z), 0, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid z \in (a, b)\}$ um die z-Achse entsteht. Dann ist

$$S = \{(f(z)\cos ?, f(z)?, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid z \in (a, b), \phi \in \mathbb{R}\}.$$

(Was muss bei den Fragezeichen stehen?) Finden Sie geeignete Parametrisierungen, um zu zeigen, dass S eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^3$ ist.

(ii) (Oberfläche von Rotationskörpern) Sei $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}_{>0}$ und S wie in (i). Zeigen Sie, dass die Oberfläche von S sich durch

$$2\pi \int_a^b f(z)\sqrt{f'(z)^2 + 1}dz$$

berechnet.

Sei $0 < r < R$. Sei $\mathbb{T}^2_{r,R} := \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid (\sqrt{x^2+y^2} - R)^2 + z^2 = r^2\}$.

Aufgabe 28. Zeigen Sie, dass $\mathbb{T}^2_{r,R}$ (Definition oben) eine Untermannigfaltigkeit ist, skizzieren Sie diese und bestimmen Sie das Volumen von $A := \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid (\sqrt{x^2+y^2} - R)^2 + z^2 \leq r^2\} \subset \mathbb{R}^3$.

Aufgabe 29. Sei

$$F\colon U := (0,2\pi) \times (0,2\pi) \to \mathbb{R}^3$$
$$(\phi,\theta) \mapsto \begin{pmatrix} (R + r\cos\phi)\cos\theta \\ (R + r\cos\phi)\sin\theta \\ r\sin\phi \end{pmatrix}$$

Überprüfen Sie, dass F eine lokale Parametrisierung von $\mathbb{T}^2_{r,R}$ (Definition oben) ist. Bestimmen Sie $\mathbb{T}^2_{r,R} \setminus F(U)$ und das Volumen der Untermannigfaltigkeit $F(U) \subset \mathbb{T}^2_{r,R}$. Argumentieren Sie, dass $\mathbb{T}^2_{r,R} \setminus F(U) \subset \mathbb{T}^2_{r,R}$ als Teilmenge der Untermannigfaltigkeit $\mathbb{T}^2_{r,R}$ Volumen Null hat.[5]

Aufgabe 30 (2+1+2)**.** Berechnen Sie folgende Integrale

(i) $\int_M x\mathrm{dvol}$, wobei M der Teil der Sphäre $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ ist, welcher im ersten Oktanten liegt.

(ii) $\int_M y\mathrm{dvol}$, wobei M die obere Hemnisphäre der Sphäre $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ ist.

(iii) $\int_M \frac{1}{\sigma^2}\mathrm{dvol}$, wobei M der Teil des Zylinders $x^2 + y^2 = R^2$ zwischen den Ebenen $z = 0$ und $z = H$ ist und σ die Funktion auf M ist, welche in jedem Punkt den Abstand zum Ursprung misst.

[5] Es geht also um das Integral $\int_{\mathbb{T}^2_{r,R}} 1_{\mathbb{T}^2_{r,R} \setminus F(U)} \mathrm{dvol}$ für die charakteristische Funktion $1_{\mathbb{T}^2_{r,R} \setminus F(U)} \colon \mathbb{T}^2_{r,R} \to \mathbb{R}$.

Aufgabe 31. Berechnen Sie $\int_S \langle V, N\rangle \mathrm{dvol}$ für $V = (yx^2, xy^2 - 3z^4, x^3 + y^2)$ und S ist der Rand von $\{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \leq 16, z \leq 0, y \leq 0\}$ und N der äußere Einheitsnormalenvektor auf S. Einmal direkt und einmal mittels des Divergenzsatzes.

Aufgabe 32. Sei $C = \{(x,y,z) \mid z^2 = x^2+y^2, z \in [0,1]\}$. Sei γ eine einfach geschlossene Kurve, welche $C \cap \{z=1\}$ parametrisiert. Berechnen Sie $\int_\gamma F \cdot ds$ für $F = (\sin x - \frac{y^3}{3}, \cos y + \frac{x^3}{3}, xyz)$ einmal direkt und einmal mittels des Rotationssatzes (=Satz von Stokes) unter Verwendung der Fläche S.

Aufgabe 33. Sei $f = (f_1, f_2)^T \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ partiell differenzierbar mit $\partial_x f_2 = -\partial_y f_1$ und $\partial_x f_1 = \partial_y f_2$. Parametrisiere $\gamma\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$ eine einfach geschlossene Kurve. Wir fassen f als komplexe Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ auf. Zeigen Sie, dass dann das komplexe Kurvenintegral

$$\int_\gamma f dz = 0$$

ist.

Hinweis: Verwenden Sie zweimal den Divergenzsatz für das von γ eingeschlossene Gebiet, einmal mit dem Vektorfeld $V_1(x,y) = (f_1(x,y), -f_2(x,y))^T$ und einmal mit $V_2(x,y) = (f_2(x,y), f_1(x,y))^T$.

Aufgabe 34 (2.5+2.5). (i) Zeigen Sie explizit mit der Definition der komplexen Differenzierbarkeit, dass $f_1(z) = z^2$ komplex differenzierbar ist, $f_2(z) = \bar{z}$ jedoch nicht.

(ii) Sei $f_1(z) = \sin z$ und $f_2 = \cos z$.[6] Rechnen Sie explizit nach, dass $f_1(z)$ und $f_2(z)$ die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen erfüllt und damit holomorph ist. Was ist $f_1'(z)$ und $f_2'(z)$?

Aufgabe 35 (2.5+2.5). (i) Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und sei $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph. Zeigen Sie: Ist $\operatorname{Re} f : \Omega \to \mathbb{R}$ eine konstante Abbildung, dann war schon f konstant.[7]

(ii) Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und sei $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph. Zeigen Sie: Ist $|f| : \Omega \to \mathbb{R}$ eine konstante Abbildung, dann war schon f konstant.

[6] Es ist $\sin(\mathrm{i}x) = \mathrm{i} \sinh x$ und $\cos(\mathrm{i}x) = \cosh x$ für $x \in \mathbb{R}$. Nun folgt mit $\sin z := \sin(x + \mathrm{i}y)$ und Additionstheorem für den Sinus, dass $\sin z = \sin x \cosh y + \mathrm{i} \cos x \sin y$. Analog ist $\cos z := \cos(x + \mathrm{i}y)$.

[7] Das gilt dann auch ganz analog für $\operatorname{Im} f : \Omega \to \mathbb{R}$.

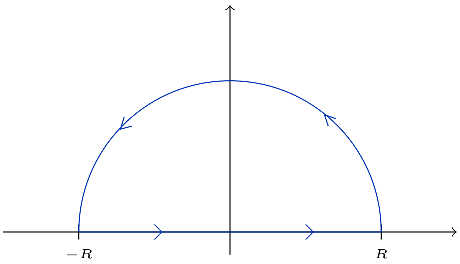


Abbildung 1: Die blaue Kurve (einmal durchlaufen) sei durch γ_R in Durchlaufrichtung der Pfeile parametrisiert. Dabei nennen wir den Anteil der Kurve, die den Halbkreis parametrisiert α_R.

Aufgabe 36. Füllen Sie die Fehlstellen aus und führen Sie die Anweisung vom Rand aus.

Wir wollen $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}dx$ mittels komplexer Analysis berechnen. Da $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$ ist, wissen wir sogar schon was rauskommen muss: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x|_{-\infty}^{\infty} = \pi$. Aber das folgende Vorgehen ermöglicht auch einige andere reelle Integrale auszurechnen, wo wir oft keine Stammfunktion angeben können.

Es ist $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{\underline{\qquad\qquad}\}$. Von den Stellen, in denen f nicht holomorph ist, liegt nur $z_0 = \underline{\quad}$ in der oberen Halbebene. Sei $\epsilon > 0$, so dass $B_\epsilon(z_0)$ vollständig in der oberen Halbebene liegt.

$B_\epsilon(z_0)$ ins Bild einzeichnen.

Es ist $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{R\to\infty} \int_{\underline{\quad}}^{\underline{\quad}} \frac{1}{1+x^2}dx$. Um das rechte Integral zu berechnen, betrachten wir die Kurve γ_R wie in der Abbildung. Für R groß genug, liegt $B_\epsilon(z_0)$ vollständig im Inneren der von γ_R begrenzten Menge U. Sei D offen mit $\bar{U} \subset D$, so dass f auf $D \setminus B_\epsilon(z_0)$ $\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$ ist. Dann ist nach Folgerung 2.2.3

$$\int_{\gamma_R} f(z)dz = \int_{\partial B_\epsilon(z_0)} f(z)dz$$

Um die rechte Seite zu berechnen, zerlegen wir [8]

$$f(z) = \frac{1}{\underline{\quad}} \left(\frac{\underline{\quad}}{z - z_0} + \frac{\underline{\quad}}{z + \underline{\quad}} \right).$$

Damit ist

$$\int_{\gamma_R} f(z)dz = \frac{1}{\underline{\quad}} \int_{\partial B_\epsilon(z_0)} \left(\frac{\underline{\quad}}{z - \underline{\quad}} + \frac{\underline{\quad}}{z + \underline{\quad}} \right) = \frac{1}{\underline{\quad}} \underbrace{\int_{\partial B_\epsilon(z_0)} \frac{\underline{\quad}}{z - \underline{\quad}}dz}_{=\underline{\qquad}\text{ Beispiel }\underline{\qquad}} + \frac{1}{\underline{\quad}} \underbrace{\int_{\partial B_\epsilon(z_0)} \frac{\underline{\quad}}{z + \underline{\quad}}dz}_{=\underline{\qquad}\text{ nach Satz}\underline{\qquad}}$$

$$= \underline{\qquad}.$$

Andererseits ist

$$\int_{\gamma_R} f(z)dz = \int_{-R}^{R} \frac{1}{1+x^2}dx + \int_{\alpha_R} f(z)dz.$$

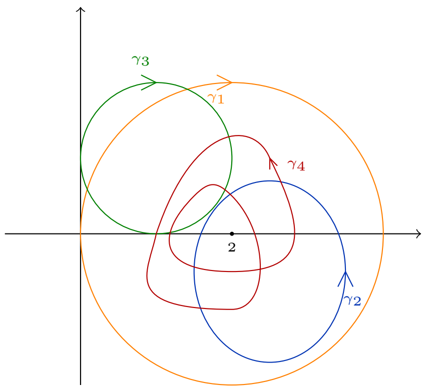
Das hieß wir brauchen noch $\lim_{R\to\infty} \int_{\alpha_R} f(z)dz$: Dazu wollen wir dieses Integral abschätzen:

$$\left| \int_{\alpha_R} f(z)dz \right| \le \underline{\qquad\qquad} L(\alpha_R) = \underline{\qquad\qquad} \to \underline{\qquad} \quad \text{für } R \to \infty.$$

Zusammen ergibt sich somit $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{R\to\infty} \left(\int_{\gamma_R} f(z)dz - \int_{\alpha_R} f(z)dz \right) = \pi$.

[8] Das ist eine Partialbruchzerlegung, vgl. [Analysis 1, Kap. 4.5.3].

Aufgabe 37. Sei $f(z) = \frac{e^{z^2}}{z-2}$. Seien $\gamma_i \colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $i = 1, \ldots, 4$, stetig differenzierbar, so dass diese die Kurven im Bild einmal in angezeigter Durchlaufrichtung parametrisieren (Bei der roten Kurven wird im Schnittpunkt 'in Laufrichtung weiter gelaufen – also nicht abbiegen').



Bestimmen Sie $\int_{\gamma_i} f\,dz$ für $i = 1, \ldots, 4$ und $\int_{\gamma_2} \frac{e^{3z}}{(z-2)^3}\,dz$ (jeweils mit Begründung).

Aufgabe 38. Wir wollen $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$ noch einmal berechnen und dabei fast genau wie in Aufgabe 36 vorgehen – nur die Partialbruchzerlegung werden wir durch eine Verwendung des Cauchy-Integralsatzes ersetzen:

Wir beginnen genau wie in Aufgabe 36 bis wir die Formel

$$\int_{\gamma_R} f(z)dz = \int_{\partial B_\epsilon(z_0)} f(z)dz$$

haben. Um nun die rechte Seite zu berechnen, setzen wir $g(z) = \frac{1}{z+\underline{\quad}}$. Dann ist $f(z) = \frac{g(z)}{z-z_0}$. Die Funktion $g(z)$ ist auf der abgeschlossenen oberen Halbebene ____________________. Damit folgt mit dem Cauchy-Integralsatz

$$\int_{\gamma_R} f(z)dz = \int_{\gamma_R} \frac{g(z)}{z-z_0}dz = \underline{\qquad\qquad}$$

Der Rest geht jetzt genau wie in Aufgabe 36 weiter.

Verwenden Sie diese Abwandlung des Vorgehen von Aufg. 36, um so auch $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+4x^2)^2}\,dx$ zu berechnen.

Aufgabe 39.

(i) Sei $p \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, $R > 0$, $\epsilon > 0$ und $f \colon B_{R+\epsilon}(p) \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph. Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$|f^{(n)}(p)| \leq \frac{n!}{2\pi R^{n+1}} \max_{z \in \partial B_R(p)} |f(z)|.$$

(ii) Sei $f \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph und beschränkt. Zeigen Sie, dass f konstant ist.