Funktionalanalysis Marius Amann, Nadine Große
SS 22

Übungsblatt 1

Aufgabe 1.

(i) Seien H_i, $i \in \mathbb{N}$, Hilberträume mit Sesquilinearform $\langle .,. \rangle_i$. Wir betrachten $H_1 \oplus H_2$ versehen mit

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = \langle x_1, x_2 \rangle_{H_1} + \langle y_1, y_2 \rangle_{H_2}.$$

Zeigen Sie, dass damit $H_1 \oplus H_2$ ein Hilbertraum ist.

(ii) ℓ_2 ist die Menge komplexer Folgen $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ mit $\sum_{i=0}^{\infty} |a_i|^2 < \infty$ mit der Sesquilinearform

$$((a_i)_i, (b_i)_i)_{\ell_2} := \sum_{i=0}^{\infty} \overline{a_i} b_i.$$

Zeigen Sie, dass ℓ_2 vollständig ist.

Aufgabe 2. Sei $\operatorname{dom} T$ die Menge der $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ mit $\int_{\mathbb{R}} x^2 |\phi(x)|^2 dx < \infty$. Wir definieren

$$T\colon \operatorname{dom} T \subset L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R}) \text{ durch } (T\phi)(x) := x\phi(x).$$

Zeigen Sie,

(i) dass T dicht definiert ist, d.h. dass $\overline{\operatorname{dom} T}^{\|.\|_2} = L^2(\mathbb{R})$.

Hinweis: Am leichtesten ist es eine Teilmenge $\mathcal{D} \subset \operatorname{dom} T$ zu finden, von der man sowieso weiss, dass sie in $L^2(\mathbb{R})$ dicht ist.

(ii) dass es keinen beschränkten Operator $\tilde{T}\colon \operatorname{dom} \tilde{T} = L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ mit $\tilde{T}|_{\operatorname{dom} T} = T$ gibt.

Hinweis: Eine geeignete Folge von Testfunktionen finden – z.B. Treppenfunktionen.

Aufgabe 3. Sei $\operatorname{dom} T$ die Menge der $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ differenzierbar mit $\int_{\mathbb{R}} |\phi'(x)|^2 dx < \infty$. Wir definieren

$$T\colon \operatorname{dom} T \subset L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R}) \text{ durch } (T\phi)(x) := \mathrm{i}\phi'(x).$$

(i) Zeigen Sie, dass es keinen beschränkten Operator $\tilde{T}\colon \operatorname{dom} \tilde{T} = L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ mit $\tilde{T}|_{\operatorname{dom} T} = T$ gibt.

(ii) Wir betrachten $\phi \mapsto \mathrm{i}\phi'$ nun als Operator von H^1 nach L^2 anstatt wie bisher von L^2 nach L^2, also:

$$A\colon \operatorname{dom} T \subset H^1(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R}), \quad \phi \mapsto T\phi.$$

Zeigen Sie, dass es nun einen beschränkten Operator $\tilde{A}\colon \operatorname{dom} \tilde{A} = H^1(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ mit $\tilde{A}|_{\operatorname{dom} T} = A$ gibt.

Hinweis: Hier mit der Definition von $H^1(\mathbb{R}) = \overline{C_c^\infty(\mathbb{R})}_{\|.\|_{H^1}}$ aus der Vorlesung arbeiten. D.h. man muss sagen, was $\tilde{A}[c_k \in C_c^\infty(\mathbb{R})]_{H^1}$ sein soll...

Aufgabe 4. Sei X ein endlichdimensionaler Vektorraum. Zeigen Sie, dass je zwei Normen auf X äquivalent sind, d.h. für zwei Normen $\|.\|_a$ und $\|.\|_b$ auf X gibt es ein $C > 0$ mit

$$C^{-1}\|x\|_a \le \|x\|_b \le C\|x\|_b \quad \forall x \in X.$$

Hinweis: Zeigen Sie z.B., dass jede Norm zur euklidischen Norm/Supremumsnorm bzgl. einer gewählten Basis auf X äquivalent ist.

Abgabe am Mittwoch 04.05.21 bis 14 Uhr