Übungsblatt 2

Aufgabe 5. Ein normierter Vektorraum $(X, \|.\|)$ ist genau dann vollständig, wenn für jede Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\sum_{k=0}^\infty \|x_k\| < \infty$ die Reihe $\sum_{k=0}^\infty x_k$ konvergiert.

Hinweis: Für y_i Cauchyfolge $x_k = y_{i_{k+1}} - y_{i_k}$ für eine geeignete Teilfolge benutzen.

Aufgabe 6. Sei $(X, \|.\|_X)$ ein vollständig normierter Vektorraum (= Banachraum) und $Y \subset X$ ein abgeschlossener linearer Unterraum von X. Sei

$$X/Y := X/\sim$$

mit $x \sim y$ genau dann, wenn $x - y \in Y$ ist. Mit $[x] + \alpha[y] := [x + \alpha y]$ für $x, y \in X$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ wird X/Y zu einem Vektorraum. Sei

$$\|[x]\| := \inf_{y\in Y} \|x - y\|_X.$$

Zeigen Sie, dass $(X/Y, \|.\|)$ ein Banachraum ist.

Berechnen Sie $(X/Y, \|.\|)$ für das Beispiel $X = C^0([0, 1])$ mit Supremumsnorm und $Y = \{f \in X \mid f(0) = 0\}$.

Hinweis: ÜA5 verwenden.

Aufgabe 7 (2+3)**.**

(i) Sei H ein Hilbertraum und $S \subset H$ eine orthonormale Teilmenge. Zeigen Sie, dass S ist linear unabhängig.

(ii) Sei H ein unendlich dimensionaler Hilbertraum und $\{e_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ eine orthonormale Teilmenge von H, so dass der Abschluss dessen linearen Spans[1] ganz H ist. Zeigen Sie, dass

$$x = \sum_{n=0}^\infty \langle x, e_n\rangle e_n$$

für alle $x \in H$ gilt und aus $x = \sum_{n=0}^\infty \lambda_n e_n$, dann $\lambda_n = \langle x, e_n\rangle$ folgt.

Aufgabe 8 (1.5+1.5+2)**.**

(i) Zeigen Sie, dass $\{e_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ mit $e_i := (\delta_{ij})_{j\in\mathbb{N}}$ eine orthonormale Hilbertbasis von ℓ_2 ist.

(ii) Berechnen Sie die Operatornorm des *Linkshifts* $A\colon \ell_2 \to \ell_2$, $(a_0, a_1, a_2, \ldots) \mapsto (a_1, a_2, a_3, \ldots)$

(iii) Sei $A\colon \operatorname{dom} A = H_1 \to H_2$ ein beschränkter Operator zwischen den Hilberträumen H_1 und H_2. Zeigen Sie:

$$\|A\| = \sup\{|\langle Ax, y\rangle| \mid x \in H_1, \|x\|_{H_1} = 1, y \in H_2, \|y\|_{H_2} = 1\}.$$

Abgabe am Mittwoch 11.05.22 bis 14 Uhr

[1] Linearer Span = Menge aller endlichen Linearkombinationen