Übungsblatt 3

Aufgabe 9 (1.5+(1.5+2)).

(i) Berechnen Sie die Operatornorm $A\colon \operatorname{dom} A = L^1([a,b]) \to \mathbb{C}$, $A(x) = \int_a^b x(s)y(s)ds$ für ein gegebenes $y \in C^0([a,b])$.

(ii) Sei $\mathcal{P}$ die Menge der komplexwertigen Polynome auf $\mathbb{C}$. Für $p(t) = \sum_{k=0}^n a_k t^k$ sei $\|p\| := \sum_{k=0}^n |a_k|$.

  (a) Zeigen Sie, dass $(\mathcal{P}, \|.\|)$ ein normierter Raum ist. Ist er vollständig?

  (b) Berechnen Sie die Operatornorm von $A\colon \operatorname{dom} A = \mathcal{P} \to \mathcal{P}$, $(Ap)(t) = (t+1)p(t)$.

Aufgabe 10 (2.5+2.5).

(i) Zeigen Sie, dass die komplexwertigen Polynome auf $[-1,1]$ dicht in $L^2([-1,1])$ liegen, indem Sie benutzen, dass $\{e^{\mathrm{i}k\pi x} \mid k \in \mathbb{Z}\}$ eine Hilbertbasis von $L^2([-1,1])$[1] bildet.

(ii) Folgern Sie, dass der lineare Span von $A = \{1, x, x^2, x^3, \ldots\}$ dicht in $L^2([-1,1])$ liegt. Mittels Gram-Schmidt angewendet auf A erhält man eine Orthonormalbasis von $L^2([-1,1])$ durch Polynome. Berechnen Sie die ersten drei dieser Basiselemente.

Aufgabe 11 (3+1+1). Sei $A\colon X \to Y$ ein beschränkter Operator zwischen Banachräumen.

(i) Sei A injektiv. Zeigen Sie, dass $\operatorname{Bild} A \subset Y$ genau dann abgeschlossen ist, wenn es ein $c > 0$ mit $\|Ax\| \geq c\|x\|$ für alle $x \in X$ gibt.

(ii) Der Operator $\tilde{A}\colon X/\ker A \to Y$, $x + \ker A \mapsto Ax$, ist beschränkt.

(iii) Zeigen Sie, dass $\operatorname{Bild} A \subset Y$ genau dann abgeschlossen ist, wenn es ein $c > 0$ mit

$$\|Ax\| \geq c \inf_{z \in \ker A} \|x + z\|$$

für alle $x \in X$ gibt.

Aufgabe 12 (5+1*). Sei $A\colon \operatorname{dom} A = \ell_1 \to c_0^* := \mathcal{L}(c_0, \mathbb{C})$ definiert durch

$$(A(x_n)_n)(y_n)_n = \sum_{n=0}^{\infty} x_n y_n$$

für $(x_n)_n \in \ell_1$ und $(y_n)_n \in c_0$. Zeigen Sie, dass $A \in \mathcal{L}(\ell_1, c_0^*)$ ein Banachraumisomorphismus ist.

Hinweis: Beispiel 2.4.3.i/ii.

(*) Wenn man in dieser Aufgabe alle c_0 durch ℓ_∞ ersetzt, was geht schief?

Abgabe am Mittwoch 18.05.22 bis 14 Uhr

[1] da eindeutige Zerlegung als Fourierreihe