Funktionalanalysis Marius Amann, Nadine Große
SS 22

Übungsblatt 4

Aufgabe 13 (2+2+1)**.** Sei X ein normierter Raum.

(i) Zeigen Sie, dass $\|x\|_X = \sup_{\phi\in X^*\setminus\{0\}} \frac{|\phi(x)|}{\|\phi\|_{X^*}}$ für alle $x \in X$ gilt.

(ii) Sei U ein abgeschlossener linearer Unterraum, $x \in X \setminus U$. Zeigen Sie, dass dann ein $\phi \in X^*$ mit $\phi|_U = 0$ und $\phi(x) = 1$ existiert.

(iii) Sei U ein linearer Unterraum. Zeigen Sie, dass dann U genau dann in X dicht ist, wenn aus $\phi|_U = 0$ für $\phi \in X^*$ schon $\phi = 0$ folgt.

Aufgabe 14. Sei X ein Banachraum und $V \subset X$ ein abgeschlossener linearer Unterraum. Sei $\iota\colon V \to X$ die Inklusionsabbildung. Zeigen Sie, dass dann sowohl

$$X^*/V^\perp \to V^*,\ \phi + V^\perp \mapsto (v \mapsto \phi(v))$$

als auch

$$A\colon (X/V)^* \to V^\perp, (\phi\colon X/V \to \mathbb{C}) \mapsto (x \mapsto \phi(x+V))$$

ein wohldefinierter Isomorphismus von Banachräumen ist.

Definition. Ein Banachraum X heißt *gleichmäßig konvex*, falls es für alle $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass $\|y - x\| < \epsilon$ für alle $x, y \in X$ mit $\|x\| = \|y\| = 1$ und $\|x + y\| > 2 - \delta$ folgt.

Bemerkung. Eine Verallgemeinerung der Jensen-Ungleichung[1] lautet: Sei $J\colon \mathbb{R}^2_+ {:=} \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ stetig, positiv homogen[2] und konvex[3], $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue-messbar und $f_i\colon \Omega \to \mathbb{R}_{>0}$ Lebesgue integrierbar. Dann gilt

$$J\left(\int_\Omega f_1 \mathrm{dvol}, \int_\Omega f_2 \mathrm{dvol}\right) \le \int_\Omega J(f_1, f_2)\mathrm{dvol}.$$

Unter gleichen Voraussetzungen aber J konkav statt konvex, kehrt sich das Relationszeichen in der Ungleichung um.

Mit Hilfe dieser Ungleichung kann man verschiedene andere Ungleichungen ableiten, z.B.

- Hölder für $J(x, y) = x^{\frac{1}{p}} y^{\frac{1}{q}}$ und $f_1(z) = |u(z)|^p$, $f_2(z) = |v(z)|^p$.
- Minkowski für $J(x, y) = (x^{\frac{1}{p}} + y^{\frac{1}{p}})^p$ und $f_1(z) = |u(z)|^p$, $f_2(z) = |v(z)|^p$.

Aufgabe 15 (1+2+2)**.** Zeigen Sie:

(i) Alle Hilberträume sind gleichmäßig konvex.

(ii) Für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue-messbar ist $L^p(\Omega)$ für $2 \le p < \infty$ gleichmäßig konvex. (Die Aussage gilt auch für $p \in (1, 2)$[4].)

Hinweis: Für $p \ge 2$: Zeigen Sie zunächst die Hanner-Ungleichungen mittels einem geeignetem J: Für alle $u, v \in L^p(\Omega)$ gilt

$$\|u + v\|_p^p + \|u - v\|_p^p \le (\|u\|_p + \|v\|_p)^p + |\|u\|_p - \|v\|_p|^p\,.$$

(iii) Zeigen Sie, dass $L^1(\Omega)$ und $L^\infty(\Omega)$ (für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen) nicht gleichmäßig konvex sind.

---

[1] *P. Roselli* and *M. Willem*, Am. Math. Mon. 109, No. 1, 64–70 (2002)

[2] d.h. $J(tx, ty) = tJ(x, y)$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2_+$ und $t > 0$

[3] Ein positiv homogenes J ist genau dann konvex, wenn $j(x) = J(1, x)$ für alle $x > 0$ konvex ist.

[4] Für $p \in (1, 2)$ gilt die inverse Ungleichung wie im Hinweis (mit gleichem J erhalten). Setzt man dann $u = \frac{x+y}{2}$ und $v = \frac{x-y}{2}$ folgt $2 \ge f(\|u\|_p, \|v\|_p)$ mit

$$f\colon \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R},\ (a, b) \mapsto (a + b)^p + |a - b|^p$$

f ist in jeder Variablen steng monoton steigend. D.h. nehmen wir an $\|x - y\|_p \ge \epsilon$, folgt $2 \ge f(\|u\|_p, \frac{\epsilon}{2})$. Mit $f(0, \frac{\epsilon}{2}) = 2\frac{\epsilon^p}{2^p} < 2 < f(1, \frac{\epsilon}{2})$ und Stetigkeit von f folgt, dass es ein $\delta > 0$ mit $f(1 - \delta/2, \frac{\epsilon}{2}) = 2$ gibt. Wählen wir also für das gegebene ϵ dieses δ, folgt aus $\|x + y\|_p > 2 - \delta$ dann $2 < f(\|u\|_p, \frac{\epsilon}{2})$, was den Widerspruch gibt und damit die gleichmäßige Konvexität beweist.

Aufgabe 16. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue-messbar. Sei $1 < p < \infty$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Zeigen Sie, dass dann

$$\Phi\colon f \in L^p(\Omega) \mapsto \left(g \in L^q(\Omega) \mapsto \int_\Omega fg \mathrm{dvol} \right) \in (L^q(\Omega))^*$$

ein isometrischer bijektiver Operator, also ein Banachisomorphismus, ist.

Für den Surjektivitätsteil des Beweises könnten Sie z.B. folgenden Lückentext ausfüllen und die 'Warums' beantworten:

(i) Für alle $\phi \in (L^q(\Omega))^*$ mit $\|\phi\| = 1$ gibt es ein $f \in L^q(\Omega)$ mit $\|f\| = 1$ und $\phi(f) = 1$:
Wegen der Definition der Norm von $(L^q(\Omega))^*$ gibt es eine Folge $f_k \in L^q(\Omega)$ mit $\|f_k\|_q = 1$ und $|\phi(f_k)| \to \underline{\quad}$ für $k \to \infty$. O.B.d.A. können wir $\phi(f_k) > 0$ annehmen, da wir sonst f_k einfach ____. Sei nun $\epsilon > 0$. Der Raum $L^q(\Omega)$ ist nach letzter Aufgabe gleichmäßig konvex ist. Sei $\delta > 0$ das Delta zu ϵ aus der gleichmäßig-konvex-Definition. Sei nun $k_0 \in \mathbb{N}$ so, dass $\phi(f_k) > 1 - \delta/2$ für alle $k \geq k_0$. Dann gilt für alle $k, \ell \geq k_0$

$$\left\| \frac{f_k + f_\ell}{2} \right\|_p \geq \left| \alpha \left(\frac{f_k + f_\ell}{2} \right) \right| > 1 - \delta/2.$$

warum?

Aus der gleichmäßigen Konvexität folgt somit $\|f_k - f_\ell\|_p < \underline{\quad}$. Also ist f_k eine L^p-__________[5] und damit gibt es ____

(ii) Sei $f \in L^q(\Omega)$ und

$$A(f)(x) := \begin{cases} \underline{\quad} & f(x) = \underline{\quad} \\ \bar{f}|f|\underline{\quad\;} & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann ist $A(f) \in L^p(\Omega)$.

(iii) Sei $\phi \in (L^q(\Omega))^*$ mit $\|\phi\| = 1$ und f wie in (i). Dann gilt $\Phi(A(f)) = \phi$:

Für alle $h \in L^q(\Omega)$ ist

$$0 = \frac{d}{dt}|_{t=0} \frac{|\phi(f + th)|}{\|f + th\|_q} = \frac{d}{dt}|_{t=0} \frac{|1 + t\phi(h)|}{\|f + th\|_q}. \tag{1}$$

In der letzten Zeile folgt die erste Gleichheit, da ____ ____.

Es gilt

$$\frac{d}{dt}|_{t=0} \|f + th\|_q^q = \int_\Omega \frac{d}{dt}|_{t=0} \underline{\qquad\quad} \mathrm{dvol} = q \mathrm{Re} \underline{\qquad\;} \quad \text{und damit}$$

$$\frac{d}{dt}|_{t=0} \|f + th\|_q = \mathrm{Re} \int_\Omega A(\underline{\;})\underline{\;} \mathrm{dvol} \quad \text{sowie}$$

$$\frac{d}{dt}|_{t=0} |1 + t\phi(h)|^2 = \underline{\qquad\quad} \quad \text{und damit} \quad \frac{d}{dt}|_{t=0} |1 + t\phi(h)| = \underline{\qquad\;}.$$

Insgesamt ergibt sich damit aus (1)

$$\mathrm{Re}\, \phi(h) = \mathrm{Re}\, \Phi(A(f))(h).$$

Die analoge Ungleichung mit Im statt Re ergibt sich, indem man h durch $\underline{\quad}$ ersetzt. Also ist $\phi = \Phi(A(f))$.

Abgabe am Mittwoch 25.05.22 bis 14 Uhr

[5] Insgesamt haben wir in (i) dann sogar gezeigt: In gleichmäßig konvexen Banachräumen X wird das Supremum in der Definition von $\|\phi\|_{X^*}$ für $\phi \in X^*$ immer angenommen.