Funktionalanalysis — Marius Amann, Nadine Große, SS 22

Übungsblatt 5

Aufgabe 17 (2+3)**.** (Zwei Anwendungen von Arzela-Ascoli)

(i) Sei $f_n \in C^2([0,1])$, so dass es ein $C > 0$ mit $|f_n(0)| \le C$ und $|f_n'(0)| \le C$ für alle n gibt. Außerdem existiere ein $a \in (1,2)$ mit $|f_n''(x)| < (1-x)^{-a}$ für alle $x \in (0,1)$. Zeigen Sie, dass f_n eine gleichmäßig konvergente Teilfolge besitzt.

(ii) (Peano-Theorem) Sei U eine offene Umgebung von $(0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ und $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ stetig. Zeigen Sie, dass dann ein $\epsilon > 0$ gibt, so dass das Anfangswertproblem $x'(t) = f(t, x(t))$, $x(0) = x_0$ eine Lösung auf $[0, \epsilon]$ besitzt.

Hinweis: Betrachten Sie

$$x_n(t) = \begin{cases} x_0 & x \in [0, \frac{\epsilon}{n}] \\ x_0 + \int_0^{t-\frac{\epsilon}{n}} f(s, x_n(s))ds & x \in (\frac{\epsilon}{n}, \epsilon] \end{cases}$$

für geeignetes ϵ (warum sind die wohldefiniert?). Für welche f sind die $x_n \in C^1([0,\epsilon])$? Warum kann man o.B.d.A. annehmen, dass wir in dieser Situation sind?

Die Aufgaben 18 und 19 sind u.a. eine Anwendung des Satzes der beschränkten Inversen:

Aufgabe 18. (2.5+2.5) Sei X ein Banachraum.

(i) Seien X_1, X_2 lineare Unterräume von X, so dass $X = X_1 \oplus X_2$ (als Gleichheit von Vektorräumen). Zeigen Sie, dass $P\colon \operatorname{dom} P = X_1 \oplus X_2 \to X_1$, $(x_1, x_2) \mapsto x_1$ genau dann beschränkt ist, wenn X_1 und X_2 in X abgeschlossen ist.

(ii) Sei X_1 ein abgeschlossener linearer Unterraum von X. Zeigen Sie, dass $P\colon \operatorname{dom} P = X \to X_1$ genau dann die Form aus (i) für ein geeignetes P hat, wenn P beschränkt ist und $P^2 = P$ erfüllt.

Aufgabe 19 (Lax-Milgram)**.** Sei H ein Hilbertraum und $b\colon H \times H \to \mathbb{C}$ eine beschränkte Sesquilinearform. Sei $A \in \mathcal{L}(H,H)$ mit $b(x,y) = (x, Ay)$ (s. auch Folgerung 1.2.8). Sei b *koerziv*, d.h. es gibt ein $c > 0$ mit $b(x,x) \ge c\|x\|^2$. Zeigen Sie, dass dann A invertierbar ist und $\|A^{-1}\| \le c^{-1}$ gilt.

Aufgabe 20. (1+4)

(i) Sei $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ mit $(g, \phi)_{L^2} = 0$ für alle $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Zeigen Sie, dass dann $g = 0$ f.ü. gilt.

(ii) Sei

$$H := \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}) \;\middle|\; \exists g \in L^2(\mathbb{R})\ \forall \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}) : \int (f(x)\phi'(x) + g(x)\phi(x))\, dx = 0 \right\}.$$

Sei $f \in H$. Zeigen Sie, dass das g aus der Definition eindeutig bestimmt ist. Damit definiert $\|f\|_H^2 := \|f\|_2^2 + \|g\|_2^2$ eine Norm auf H, welche durch eine Sesquilinearform induziert wird. Zeigen Sie, dass H vollständig (und damit ein Hilbertraum) ist und dass

$$\iota\colon H^1(\mathbb{R}) = \overline{C_c^\infty(\mathbb{R})}^{\|\cdot\|_{H^1}} \to H, f \mapsto f$$

eine wohldefinierte injektive isometrische Abbildung ist.[1]

Hinweis: Betrachten Sie zunächst $\iota|_{C_c^\infty(\mathbb{R})}$.

Abgabe am Mittwoch 01.06.22 bis 14 Uhr

[1] Wir werden später sehen, dass es sogar bijektiv ist und damit H eine andere Möglichkeit ist, $H^1(\mathbb{R})$ zu definieren. Für $H^1(\mathbb{R}^n)$ wird es ähnliche Darstellungen auch in mehreren Variablen geben.