Übungsblatt 6

Aufgabe 21 (2+1+2)**.** Seien X, Y Banachräume.

(i) Sei $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ und A' der adjungierte Operator. Zeigen Sie, dass A' beschränkt ist und $\|A\| = \|A'\|$ gilt.

(ii) Seien X, Y reflexiv und $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Zeigen Sie, dass $A = A''$ ist.

(iii) Sei $L_p, R_p \colon \ell_p \to \ell_p$, $1 < p < \infty$, der Links- bzw. Rechtsshift, d.h.

$$L_p(x_1, x_2, \ldots) := (x_2, x_3, \ldots) \quad R_p(x_1, x_2, \ldots) := (0, x_1, x_2, x_3, \ldots).$$

Sei $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Zeigen Sie, dass $L_p' = R_q$ und $R_p' = L_q$ ist.

Aufgabe 22 (2+1.5+1.5)**.** Berechnen Sie die (im Hilbertraum-Sinne) adjungierten Operatoren A^* der folgenden Operatoren:

(i) $A(f \in L^2([0,1]), \mathbb{C})(x) = \int_0^x f(s) ds$

(ii) Sei $k \in L^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ und

$$A(f \in L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}))(x) := \int_{\mathbb{R}^n} k(x, y) f(y) \mathrm{dvol}_y.$$

(iii) Seien H_1, H_2, H Hilberträume mit $H = H_1 \oplus H_2$ und $A \colon H_1 \oplus H_2 \to H_1$, $(x_1, x_2) \mapsto x_1$. Sei $A \in \mathcal{L}(H, H_1)$ (also eine Projektion, vgl. ÜA 18).

Aufgabe 23 (2.5+2.5)**.** Sei H ein Hilbertraum und $A \in \mathcal{L}(H, H)$. Zeigen Sie:

(i) A genau dann selbst-adjungiert ist, wenn $(Ax, x)_H \in \mathbb{R}$ für alle $x \in H$ gilt.[1]

(ii) Sei A selbst-adjungiert. Dann gilt

$$\|A\| = \sup_{\|x\|_H = 1} |(Ax, x)_H|.$$

Aufgabe 24. Sei $A \colon \operatorname{dom} A = H \to H$ ein Operator zwischen Hilberträumen. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind

(a) A ist beschränkt mit $AA^* = A^*A = \mathrm{Id}$

(b) A ist surjektiv mit $\langle Ax, Ay \rangle_H = \langle x, y \rangle_H$ für alle $x, y \in H$ ist.

(c) A ist unitär, d.h. A ist beschränkt und invertierbar mit $A^{-1} = A^*$.

(d) A ist normal und eine Isometrie[2].

Abgabe am Mittwoch 15.06.22 bis 14 Uhr

[1] Das ist falsch für reelle Hilberträume, sieht man schon an reellen Matrizen.
[2] A Isometrie heißt, dass $\|Ax\|_H = \|x\|_H$ für alle $x \in H$