Funktionalanalysis

Marius Amann, Nadine Große
SS 22

Übungsblatt 7

Aufgabe 25 (3+2)**.** Sei $k \in L^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ und

$$T_k\colon L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n),\ (T_k f)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} k(x,y) f(y) \mathrm{dvol}_y.$$

(i) Sei $k(x,y) = \chi_A(x)\chi_B(y)$ für messbare Mengen $A, B \subset \mathbb{R}^n$ mit endlichem Maß. Zeigen Sie, dass T_k ein Operator endlichen Ranges ist.

(ii) Zeigen Sie, dass T_k für allgemeines $k \in L^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ ein kompakter Operator ist.

Hinweis: Der Span von $\chi_A(x)\chi_B(y)$, für messbare Mengen $A, B \subset \mathbb{R}^n$ mit endlichem Maß, ist dicht in $L^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$.

Aufgabe 26. Sei H ein Hilbertraum und $A\colon H \to H$. Zeigen Sie, dass dann A^*A genau dann kompakt ist, wenn A kompakt.

Ist $A\colon \ell_2 \to \ell_2$, $(x_1, x_2, \ldots) \mapsto (0, x_1, x_2, \ldots)$ kompakt?

Aufgabe 27. Sei $\lambda = (\lambda_i)_i \in \ell_\infty$ und $p \in [1, \infty]$. Wir definieren

$$A_\lambda\colon (x_i)_i \in \ell_p \mapsto (\lambda_i x_i)_i \in \ell_p.$$

Zeigen Sie, dass $\lambda \in c_0$ eine notwendige und hinreichende Bedingung ist, damit A_λ kompakt ist.

Sei $\alpha \in (0,1)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ der Abschluss einer offenen und beschränkten Teilmenge. Sei $C^{k,\alpha}(\Omega)$ die Menge aller $f \in C^k(\Omega)$ mit

$$\|f\|_{C^{k,\alpha}} = \|f\|_{C^k} + \sum_{\gamma \in \mathbb{N}^n, |\gamma| = k} \sup_{x \neq y} \frac{|D^\gamma f(x) - D^\gamma f(y)|}{|x-y|^\alpha}.$$

Man kann nachrechnen, dass dann $C^{k,\alpha}(\Omega)$ mit der Norm $\|.\|_{C^{k,\alpha}}$ ein Banachraum ist.

Aufgabe 28 (2.5+2.5)**.** (i) Sei $\beta \in \mathbb{R}$ und

$$f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ x^\beta & x > 0 \end{cases}$$

Für welche α ist $f \in C^{0,\alpha}([-1,1])$? Für welche α und $k \in \mathbb{N}$ gilt $f \in C^{k,\alpha}([-1,1])$?

(ii) Zeigen Sie, dass die Inklusion $C^{k,\alpha}([-1,1]) \hookrightarrow C^k([-1,1])$ ein kompakter Operator ist.

Hinweis: Mit $k = 0$ starten.

Abgabe am Mittwoch 22.06.06.22 bis 14 Uhr