Übungsblatt 9

Aufgabe 33. Sei $f \in C^n([a,b])$. Zeigen Sie, dass dann $A\colon \phi \in C^n([a,b]) \mapsto (x \mapsto \int_a^x f(s)\phi(s)ds) \in C^n([a,b])$ ein kompakter Operator ist.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass A als Operator von $C^n([a,b])$ nach $C^{n+1}([a,b])$ beschränkt ist.

Aufgabe 34. Sei

$$A := \frac{d^n}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1(x)\frac{d}{dx} + a_0(x)$$

für $a_i(x) \in C^\infty([a,b])$. Dann ist $A\colon C^n([a,b]) \to C^0([a,b])$ beschränkt. Zeigen Sie, dass A Fredholm ist und berechnen Sie den Fredholmindex.

Hinweis: Schreiben Sie A in der Form $\frac{d^n}{dx^n}(\mathrm{Id} + K)$ für einen geeigneten kompakten Operator K und überlegen Sie sich dann, wie sich für einen Fredholmoperator $B\colon C^n([a,b]) \to C^k([a,b])$ der Index von $\frac{d}{dx}B\colon C^n([a,b]) \to C^{k-1}([a,b])$ in Abhängigkeit von $\operatorname{ind} B$ verhält.

Aufgabe 35 (Fredholm $\sim$ 'fast invertierbar')**.** Sei $A \in \mathcal{L}(X,Y)$. Zeigen Sie, dass dann die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) A ist Fredholm

(ii) Es existiert ein $B \in \mathcal{L}(Y,X)$ und Operatoren endlichen Ranges $S_1 \in \mathcal{L}(X,X)$ und $S_2 \in \mathcal{L}(Y,Y)$ mit $BA = \mathrm{Id}_X + S_1$ und $AB = \mathrm{Id}_Y + S_2$.

(iii) Es existiert ein $B \in \mathcal{L}(Y,X)$ und kompakte Operatoren $S_1 \in \mathcal{L}(X,X)$ und $S_2 \in \mathcal{L}(Y,Y)$ mit $BA = \mathrm{Id}_X + S_1$ und $AB = \mathrm{Id}_Y + S_2$.

Aufgabe 36 (2.5+2.5)**.** (Fortführung von Aufgabe 20) Sei

$$H := \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}) \;\middle|\; \exists g \in L^2(\mathbb{R})\ \forall \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}) : \int \left(f(x)\phi'(x) + g(x)\phi(x)\right) dx = 0 \right\}$$

zusammen mit $\|f\|_H^2 := \|f\|_2^2 + \|g\|_2^2$. Nach Aufgabe 20 ist H ein Hilbertraum und g eindeutig bestimmt. Ist f differenzierbar, dann ist $g = f'$. Deshalb schreiben wir auch für allgemeines f, dann $f' = g$[1].

(i) Sei $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ und $f \in H$. Zeigen Sie, dass dann $\phi * f \in H$ mit $(\phi * f)' = \phi * f'$ gilt.

Hinweis: $*$ ist die Faltung wie in Analysis III, Abschnitt 2.2.

(ii) Zeigen Sie, dass $H = H^1(\mathbb{R})$ als Hilberträume ist.

Hinweis: Analysis III, Satz 2.2.5 und 2.2.8

Abgabe am Mittwoch 06.07.22 bis 14 Uhr

[1] Man nennt g dann die *schwache Ableitung* von f