Übungsblatt 9

Aufgabe 33. Für welche Funktionen $g \in C^0([0,\pi])$ hat die Gleichung

$$f(x) - \int_0^\pi \sin(x+y) f(y) dy = g(x)$$

eine Lösung $f \in C^0([0,\pi])$? Wie viele Lösungen gibt es dann gegebenenfalls?

Aufgabe 34 (2+3)**.**

(i) Sei X ein endlichdimensionaler Banachraum. Sei $(x_k)_k$ eine in X schwach konvergente Folge. Zeigen Sie, dass dann x_k schon stark in X konvergiert.

(ii) Sei $(x_k)_k$ eine in ℓ_1 schwach konvergente Folge. Zeigen Sie, dass dann x_k schon stark in ℓ_1 konvergiert.

Hinweis: Zeigen Sie, zunächst dass es ausreicht zu zeigen, dass es keine Folge x_k in ℓ_1 mit $\|x_k\|_{\ell_1} = 1$ für alle k und $x_k \stackrel{w}{\to} 0$ gibt. Zeigen Sie dann, dass es eine Teilfolge a^{k_j} von a^k und paarweise disjunkte Mengen $M_j \subset \mathbb{N}$ gibt, so dass für jedes $j \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{n \in M_j} |a^{k_j}| > \frac{1}{2} \text{ und } \sum_{n \in \mathbb{N} \setminus M_j} |a^{k_j}| < \frac{1}{4}.$$

Konstruieren Sie damit ein $\ell \in \ell_\infty \cong (\ell_1)^*$ mit $\langle \ell, a^{k_j} \rangle > \frac{1}{4}$ für alle j.

Aufgabe 35. Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und beschränkt. Sei $M_f\colon L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$, $\phi \mapsto f\phi$. Bestimmen Sie das Punktspektrum, residuelle Spektrum und stetige Spektrum von M_f. Welche Dimension haben die Eigenräume (wenn sie existieren)?

Aufgabe 36. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ offen, beschränkt mit $\partial\Omega$ eine glatte zweidimensionalene Untermannigfaltigkeit. Sei n_y der äußere Einheitsnormalenvektor zu $\partial\Omega$ in $y \in \partial\Omega$. Wir setzen

$$k(x,y) = \frac{\langle x-y, n_y \rangle}{|x-y|^3}$$

und $K\colon C^0(\partial\Omega) \to C^0(\partial\Omega)$ durch

$$(K\phi)(x) = \int_{\partial\Omega} k(x,y)\phi(y) \mathrm{dvol}_{\partial\Omega}.$$

Zeigen Sie, dass K kompakt ist.

Hinweis: Betrachten Sie zunächst $(K_\epsilon\phi)(x) = \int_{\partial\Omega} k_\epsilon(x,y)\phi(y)\mathrm{dvol}_{\partial\Omega}$ mit $k_\epsilon(x,y) = \frac{\langle x-y, n_y\rangle}{|x-y|^3+\epsilon}$ (Man sagt k_ϵ ist ein *regularisierter Kern*). In Beispiel 3.4.2.iv haben wir gesehen, dass Integraloperatoren mit stetigem Kern auf einer kompakten Menge kompakt sind. D.h. wir können den Satz auch auf die kompakte Menge $\partial\Omega$ anwenden.

Abgabe am Mittwoch 06.07.22 bis 14 Uhr