Übungsblatt 10

Aufgabe 37 (2.5+2.5)**.** Sei X ein Banachraum und $A, B \in \mathcal{L}(X)$. Zeigen Sie

(i) $R_\lambda(A) - R_\mu(A) = (\mu - \lambda) R_\lambda(A) R_\mu(A)$ für alle $\lambda, \mu \in \rho(A)$.

(ii) $R_\lambda(A) - R_\lambda(B) = R_\lambda(A)(A - B) R_\lambda(B)$ für alle $\lambda \in \rho(A) \cap \rho(B)$.

Aufgabe 38 (2+3)**.** Sei $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π-periodisch und $h|_{[0,2\pi]} \in L^2([0, 2\pi])$. Sei T_h die Faltung mit h, d.h.

$$T_h\colon L^2([0, 2\pi]) \to L^2([0, 2\pi]), \quad T_h f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) h(t - s) dt.$$

(i) Zeigen Sie, dass T_h normal und kompakt ist.

(ii) Bestimmen Sie die Eigenwerte von T_h und die zugehörigen Eigenvektoren[1]

Hinweis: Entwickeln Sie h in eine Fourierreihe (Analysis 3)

Aufgabe 39/40 (1+2+1+2+2+2)**.** Wir betrachten das Sturm-Liouville-Problem

$$(Lu)(x) := = -\frac{d}{dx}\left(p(x) \frac{d}{dx} u(x) \right) + q(x) u(x)$$

für $p > 0$, $p \in C^1([a, b])$, $q, g \in C^0([a, b])$ mit den Randbedingungen

$$R_1 u := \alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a)$$
$$R_2 u := \beta_1 u(b) + \beta_2 u'(b)$$

für $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{C}$.

Sei u_1, u_2 ein Fundamentalsystem von $Lu = 0$ mit $R_1 u_1 = 0$ und $R_2 u_2 = 0$ (gibt es wegen?)

$$\Gamma(x, \xi) = \begin{cases} \frac{1}{c} u_1(\xi) u_2(x) & x \geq \xi, x \in [a, b] \\ \frac{1}{c} u_2(\xi) u_1(x) & x < \xi, x \in [a, b] \end{cases}$$

mit $c = p(x)(u_1(x) u_2'(x) - u_2(x) u_1'(x))$ (Dann hängt c nicht von x ab und verschwindet nicht. Warum?) Die Funktion $\Gamma\colon [a, b]^2 \to \mathbb{R}$ heißt *Greenfunktion assoziiert zu L mit den Randbedingungen R_i*.

(i) Zeigen Sie, dass Γ stetig und weg von $x = \xi$ zweimal stetig differenzierbar ist, und dass $R_1 \Gamma(., \xi) = R_2 \Gamma(., \xi) = 0$ für alle $\xi \in [a, b]$ gilt.

(ii) Sei $g \in C^0([a, b])$ und $u(x) = \int_a^b \Gamma(x, \xi) g(\xi) d\xi$. Zeigen Sie, dass $u \in C^2$ ist und $Lu = g$ mit $R_1 u = R_2 u = 0$ erfüllt.

(iii) Zeigen Sie, dass $T\colon C^0([a, b]) \to C^0([a, b])$, $(Tf)(x) := \int_a^b \Gamma(x, \xi) f(\xi) d\xi$ sich zu einem Operator von $L^2([a, b]) \to L^2([a, b])$ stetig fortsetzen lässt.

(iv) Zeigen Sie, dass dann $T\colon L^2([a, b]) \to L^2([a, b])$ aus (iii) kompakt und selbst-adjungiert ist.

(v) Zeigen Sie, dass $R_i(Tf) = 0$ und $L(Tf) = f$ für alle $f \in C^0([a, b])$ gillt.

(vi) Verwenden Sie den Spektralsatz für T, um zu zeigen, dass es eine Zerlegung von $L^2([a, b])$ in Eigenfunktionen von L mit Randbedingungen $R_i u = 0$ gibt.

Abgabe am Mittwoch 13.07.22 bis 14 Uhr

[1] Da es sich dabei selbst wieder um Funktionen handelt, sagt man hier auch *Eigenfunktionen*.