Übungsblatt 11

Aufgabe 41. Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ und $\mathcal{Z}_n = (x_i)_{i=0}^n$ Zerlegungen von $[a,b]$, also $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$, mit $|\mathcal{Z}_n| \to 0$ für $n \to \infty$.

Sei $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ monoton wachsend. Dann ist das *Riemann-Stieltjes-Integral* von f

$$\int_a^b f dg := \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^n f(x_i)(g(x_{i+1}) - g(x_i))$$

sofern dieser Grenzwert rechts existiert und unabhängig der Folge $(\mathcal{Z}_n)_n$ ist. Es ist also wie das Riemann-Integral nur das dem Intervall $[x_i, x_{i+1}]$ eine neue Länge zugeordnet wird, nämlich $g(x_{i+1}) - g(x_i)$.

Zeigen Sie:

(i) Ist g differenzierbar, dann ist $\int_a^b f dg = \int_a^b f(x)g'(x)dx$.

(ii) Ist g stetig und stückweise differenzierbar, dann ist $\int_a^b f dg = \sum_{j=1}^n \int_{I_j} f(x)g'(x)dx$, wobei $[a,b] = I_1 \sqcup \ldots \sqcup I_n$ mit $g|_{I_j}$ diffenzierbar ist. (Damit ist $\int_a^b f dg = \int_a^b f(x)g'(x)dx$, wenn man g' als schwache Ableitung versteht.)

(iii) Ist $g = 0$ für $x \leq c$ und $g = 1$ für $x > c$, $c \in (a,b)$, dann ist $\int_a^b f dg = f(c)$.

(iv) Sei $\mu \geq 0$, $g_i\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ monoton steigend. Dann ist $\int_a^b f d(\mu g_1 + g_2) = \mu \int_a^b f dg_1 + \int_a^b f dg_2$.

Aufgabe 42. Sei $A \in \mathcal{L}(H)$ selbstadjungiert und nichtnegativ. Zeigen Sie:

(i) $\sigma(A) \subset [0, \infty)$

(ii) (Existenz einer Wurzel) Es gibt einen selbstadjungierten nichtnegativen Operator B mit $B^2 = A$.

(iii) Sei auch $B \in \mathcal{L}(H)$ selbstadjungiert und nichtnegativ. Dann ist AB genau dann ein selbstadjungierter nichtnegativer Operator, wenn A mit B kommutiert.

Hinweis: Für die Nichtnegativität in (iii) (ii) verwenden.

Aufgabe 43. Sei A ein beschränkter selbstadjungierter Operator auf einem Hilbertraum H und $\varphi\colon C^0(\sigma(A)) \to \mathcal{L}(H)$ die zugehörige Abbildung aus Satz 5.3.1 ($\varphi(f) = f(A)$). Wir wollen (b) dieses Satzes beweisen (Falls f ein komplexes Polynom ist, wissen wir schon, dass die Aussage wahr ist).

Dazu sei $f \in C^0(\sigma(A))$.

(i) Sei $\lambda \notin \operatorname{Bild} f$ und $g = (f - \lambda)^{-1}$. Zeigen Sie, dass $\varphi(g) = (\varphi(f) - \lambda)^{-1}$.

(ii) Sei $\lambda \in \operatorname{Bild} f$. Zeigen Sie, dass es für alle $\epsilon > 0$ ein $x \in H$ mit $\|x\| = 1$ und $\|(\varphi(f) - \lambda)x\| < \epsilon$ gibt. Folgern Sie daraus, dass $\lambda \in \sigma(\phi(f))$ ist.

(iii) Folgern Sie nun: $\sigma(\varphi(f)) = \{f(\lambda) | \lambda \in \sigma(A)\}$.

Aufgabe 44. Sei $H = L^2([0,1])$ und $M\colon H \to H,\ f(x) \mapsto xf(x)$.

(i) Sei $g \in C^0(\sigma(M))$. Bestimmen Sie $g(M)$.

(ii) Bestimmen Sie die Spektralfamilie $(E_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ für M.

(iii) Für $f \in H$ berechnen Sie mit Hilfe von (ii) explizit

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda d(E_\lambda f, f)_{L^2}$$

(also ohne zu verwenden, dass Sie wissen, das dies gleich $(Mf, f)_{L^2}$ sein muss).

Abgabe am Mittwoch 20.07.22 bis 14 Uhr