Übungsblatt 12– Bonuspunkteblatt

Aufgabe 41. Sei H ein Hilbertraum und $P \in \mathcal{L}(H)$. Wir nennen P genau dann eine Orthogonalprojektion, wenn es einen abgeschlossen Unterraum $H_1 \subset H$ gibt und P die Form $H_1^\perp \oplus H_1 \mapsto H_1^\perp \oplus H_1$, $(u, v) \mapsto (u, 0)$ hat (dann ist $H_1 = \ker P$).

(i) Orthogonalprojektionen sind selbst-adjungiert.

(ii) Das Produkt zweier Orthogonalprojektionen ist wieder eine Orthogonalprojektion.

Aufgabe 42. Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig (nicht unbedingt beschränkt). Sei $\operatorname{dom} M_f = \{\phi \in L^2(\mathbb{R}) \mid f\phi \in L^2(\mathbb{R})\}$. Sei $M_f\colon \operatorname{dom} M_f \subset L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$, $\phi \mapsto f\phi$. Bestimmen Sie M_f^* und das Spektrum von M_f.

Aufgabe 43. Sei $A\colon \operatorname{dom} A \subset H \to H$ ein abgeschlossener Operator. Sei $B \in \mathcal{L}(H)$. Zeigen Sie, dass $A + B$ auf $\operatorname{dom} A$ wohldefiniert und $A + B\colon \operatorname{dom} A \subset H \to H$ auch abgeschlossen ist.

Aufgabe 44. Sei $A \in \mathcal{L}(H)$ selbstadjungiert.

(i) Zeigen Sie, dass $\|(A \pm \mathrm{iId})u\|^2 = \|Au\|^2 + \|u\|^2$ ist und folgern Sie, dass $A \pm \mathrm{iId}$ invertierbar ist.

(ii) Rechnen Sie nach, dass die Cayley-Transformierte $U_A{:=}(A + \mathrm{iId})(A - \mathrm{iId})^{-1}$ ein unitärer Operator ist.

Freiwillige Abgabe am Mittwoch 27.07.22 bis 14 Uhr