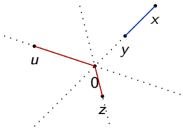
QQ 1 – Stetigkeit in metrischen Räumen

Eisenbahnmetrik:



$$d_E(x,y) = \begin{cases} |x-y| & x,\ y \text{ lin. abh.} \\ |x|+|y| & \text{sonst} \end{cases}$$

Welche der folgenden Funktionen $f : (\mathbb{R}^2, d_E) \to (\mathbb{R}, d_{\text{euklidisch}})$ ist stetig?

A
$$f : (x_1, x_2) \mapsto \begin{cases} 2(x_1^2 + x_2^2) & \frac{x_1}{x_2} \in \mathbb{Q} \text{ oder } \frac{x_2}{x_1} \in \mathbb{Q} \\ x_1^2 + x_2^2 & \text{sonst} \end{cases}$$

B
$$f : (x_1, x_2) \mapsto \begin{cases} 1 & (x_1, x_2) = (1, 0) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

C f ist aufgefasst als Funktion von $(\mathbb{R}^2, d_{\text{euklidisch}})$ nach $(\mathbb{R}, d_{\text{euklidisch}})$ stetig.

QQ 2 – Wahr oder falsch?

Sei X ein reeller Vektorraum und $B\colon X \times X \to \mathbb{R}$ eine Bilinearform.

A B sei symmetrisch. Dann bestimmt $v \in X \mapsto B(v, v)$ das B eindeutig.

B B sei antisymmetrisch. Dann bestimmt $v \in X \mapsto B(v, v)$ das B eindeutig.

C $v \in X \mapsto B(v, v)$ bestimmt das B eindeutig.

Für die richtige(n) Aussage(n): Was muss angepasst werden, wenn X ein komplexer Vektorraum ist und B eine Sesquilinearform?

QQ 3 – vollständig?

Sei X der Vektorraum aller beschränkten reellen Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Sei

$$\|(a_n)_n\|_\infty := \sup_n |a_n|.$$

Damit wird $(X, \|.\|_\infty)$ zu einem normierten Vektorraum.

Welche der folgenden Teilmengen von X sind zusammen mit $\|.\|_\infty$ vollständig?

A X

B c_0 die Menge aller Nullfolgen

C c_1 die Menge der Folgen, die gegen 1 konvergieren.

D c_{00} die Menge aller Folgen, für welche nur endlich viele Folgenglieder ungleich Null sind.

Was sind jeweils die Vervollständigungen dieser metrischen Räume?

QQ 4 – abgeschlossen

Sei $(X, \|.\|)$ ein normierter Raum. Sei $A \subset X$.

Richtig oder falsch?

Dann ist A genau dann abgeschlossen, wenn

A $X \setminus A$ offen ist.

B für alle $x_i \in A$ mit $x_i \to y$ in X dann $y \in A$ folgt.

C jede Folge in A konvergiert.

D jede Cauchyfolge $x_i \in A$ eine in A konvergente Teilfolge besitzt.

QQ 5 – Wahr oder falsch?

Sei $A\colon \operatorname{dom} A = X \to Y$ ein beschränkter Operator zwischen normierten Räumen. Was gilt?

- A A bildet beschränkte Folgen auf beschränkte Folgen ab.
- B A bildet Cauchyfolgen auf Cauchyfolgen ab.
- C A bildet konvergente Folgen auf konvergente Folgen ab.

QQ 6 – Banachräume?

Sei $A\colon \operatorname{dom} A = X \to Y$ ein Operator (= lineare Abbildung) zwischen Banachräumen $(X, \|.\|_X)$ und $(Y, \|.\|_Y)$.

Was ist immer ein Banachraum, was nicht immer?

A $(\ker A, \|.\|_X)$

B $(\operatorname{Bild} A, \|.\|_Y)$

(Bei eventuellen Beispielen, z.B: an den Ortsoperator denken...)

QQ 7 – Wahr oder falsch?

Seien $(X_1, \|.\|_i)$ Banachräume. Auf $X_1 \oplus X_2$ betrachten wir:

$$\|(x_1, x_2)\|_A := \|x_1\|_1 + \|x_2\|_2$$

$$\|(x_1, x_2)\|_B := \left(\|x_1\|_1^2 + \|x_2\|_2^2\right)^{\frac{1}{2}} .$$

A Konvergiert eine Folge bzgl. $\|.\|_A$, dann auch bzgl. $\|.\|_B$.

B Konvergiert eine Folge bzgl. $\|.\|_B$, dann auch bzgl. $\|.\|_A$.

C $\|.\|_A$ und $\|.\|_B$ sind äquivalent.

QQ 8 – Dualraum

Sei X ein endlich-dimensionaler Banachraum. Was ist wahr, was nicht?

Dann ist

A X^* gleich dem Dualraum von X im Sinne der linearen Algebra.

B X separabel.

C X nur dann reflexiv, wenn X^* als Banachraum zu X isomorph ist.

QQ 9

Welche Abbildungen sind beschränkt?

A $x \in X \mapsto x \in X$ für X ein Banachraum

B $f \in C^0([0,1]) \mapsto f \in L^2([0,1])$

C $f \in L^2([0,1]) \mapsto f \in L^1([0,1])$

QQ 10 – Wahr oder falsch?

Die Menge $\{e_i \in \ell_p \mid i \in \mathbb{N}\}$ ist

A abgeschlossen

B beschränkt

C kompakt

QQ 11 – Wahr oder falsch?

Die Abbildung $u \in C^2([a,b]) \subset X \to u'' \in C^0([a,b]) \subset Y$ ist beschränkt (genauer besitzt eine stetige Fortsetzung) für:

A $X = L^2([a,b]),\ Y = L^2([a,b)]$

B $X = H^2([a,b]),\ Y = L^2([a,b)]$

C $X = H^2([a,b]),\ Y = H^2([a,b)]$

QQ 12

Sei $U = \{e_1\} \subset \ell_p$ für $p \in [1, \infty)$.

Wir identifizieren ℓ_p^* mit ℓ_q für $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Was ist $U^\perp$?

QQ 13

Sei $A_i \in \mathcal{L}(X_i, Y)$ und sei

$$A\colon X_1 \oplus X_2 \to Y, (x_1, x_2) \mapsto A_1 x_1 + A_2 x_2.$$

Was ist $\|A\|$?

QQ 14

Gibt es eine stetige Fortsetzung auf ganz X?

A $u \in C^\infty([0,1]) \subset X = C^1([0,1]) \mapsto u' \in C^0([0,1])$

B $u \in C^\infty([0,1]) \subset X = C^0([0,1]) \mapsto u' \in C^0([0,1])$

C $u \in C^\infty([0,1]) \subset X = H^1([0,1]) \mapsto u' + u \in L^2([0,1])$

QQ 15

Sei $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Dann hat genau dann abgeschlossenes Bild, wenn es ein $c > 0$ mit

$$\|Ax\|_Y \geq c \inf_{v \in \ker A} \|x + v\|_X$$

gibt, vgl. ÜA11/Lem. 3.1.6(i).

Sei A nun eine komplexe $n \times n$-Matrix.

Hat A immer abgeschlossenes Bild?

Was ist das größte c, was man in obiger Ungleichung wählen kann?

QQ 16 – Operatornorm

Sei $A\colon X \to Y$ ein Operator zwischen normierten Räumen.
Dann ist

- A $\|A\| = \sup_{x \in X, \|x\|_X = 1} \|Ax\|_Y$
- B $\|A\| = \sup_{x \in B_1^X(0)} \|Ax\|_Y$
- C $\|A\| = \sup_{x \in \overline{B_1^X(0)}} \|Ax\|_Y$
- D $\|A\| = \sup_{x \in B_r^X(0)} \|Ax\|_Y$ für alle $r > 0$.

QQ 17 - Wahr oder falsch?

Sei $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$. Wir identifizieren A mit der zugehörigen komplexen $n \times n$-Matrix.

- A A^* ist die zu A transponierte Matrix.
- B A^* ist die zu A komplex konjugierte Matrix.
- C A^* ist die zu A komplex konjugierte und transponierte Matrix.
- D A-C sind i.A. falsch.

QQ 18 - Wahr oder falsch?

$$A\colon \ell_2 \to \ell_2, \quad (x_1, x_2, x_3, \ldots) \mapsto (x_1, \tfrac{x_2}{2}, \tfrac{x_3}{3}, \ldots,)$$

- A A ist beschränkt.
- B $\mathrm{Bild}\, A$ ist abgeschlossen.
- C $\overline{\mathrm{Bild}\, A} = \ell_2$
- D $\mathrm{coker} A$ ist unendlich dimensional.

QQ 19 – Wahr oder falsch?

Sei X ein Banachraum und $\mathrm{Id}\colon X \to X$ die Identität.

A Id ist beschränkt.

B Id ist kompakt.

C Id ist Fredholm.

QQ 20 – offene Eigenschaften

Welche der folgenden Eigenschaften für komplexe $n \times n$ Matrizen sind offen?

A Der Kern ist $\{0\}$.

B Die Matrix ist invertierbar.

C Alle Eigenwerte sind einfach.

D Es gibt einen doppelten Eigenwert.

QQ 21 – Wahr oder falsch?

In allen endlich dimensionalen normierten komplexen/reellen Vektorräumen V gilt:

Eine Teilmenge von V ist genau dann kompakt, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist.

Gibt es einen unendlich dimensionalen normierten komplexen/reellen Vektorraum für den diese Aussage gilt?

QQ 22

Sei $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ und $A\colon L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ definiert durch

$$(Af)(x) = (g, f)_{L^2} g(x).$$

Für welche g ist A

A beschränkter linearer Operator?

B bijektiv?

C endlichen Ranges?

D kompakt?

E eine Projektion[1]?

Was ist bei $(Af)(x) = (f, g)_{L^2} g(x)$?

[1] $P\colon X \to X$ ist Projektion, wenn beschränkt und $P^2 = P$, vgl. ÜA18.

QQ 23

X, Y Banachräume.

Wahr oder falsch:

Ist $\mathcal{K}(X, Y) \cap \mathrm{Fred}(X, Y) \neq \varnothing$, dann ist $\mathcal{K}(X, Y) \subset \mathrm{Fred}(X, Y)$.

Für welche Banachräume gilt $\mathcal{K}(X, Y) \cap \mathrm{Fred}(X, Y) \neq \varnothing$?

QQ 24

Sei e_i die Folge in ℓ_p, die überall Null ist, aber an der i-ten Stelle eine Eins hat. Sei $p \in [1, \infty)$.

Für welche p konvergiert $(e_i)_i$ in ℓ_p schwach, für welche stark, und was ist dann jeweils der Grenzwert?

QQ 25

H ein Hilbertraum, $V \subset H$.

Wann folgt aus $\langle x, v \rangle_H = 0$ für alle $v \in V$, dass $x = 0$ gilt?

A Für $V = H$.

B Für V abgeschlossen.

C Für V dicht.

QQ 26

X ein Banachraum

Was ist das Spektrum von $\mathrm{Id}\colon X \to X$?

QQ 27

X_1, X_2 Banachräume

Was ist das Spektrum von

$$(x, y) \in X_1 \oplus X_2 \mapsto (3x, 0) \in X_1 \oplus X_2$$

QQ 28

Mit welchem Normen (rechts) sind die Vektorräume (links) Banachräume?

A $C^0([a,b])$

B $C^n([a,b])$

C $L^2([a,b])$

D $L^\infty([a,b])$

E ℓ_2

F c_0

1. $\sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$
2. $\inf_{N\subset[a,b] \text{ Nullmenge}} \sup_{x\in[a,b]\setminus N} |f(x)|$
3. $\int_a^b |f(x)|^2 \mathrm{dvol}$
4. $\sum_{|\alpha|\leq n} \sup_{x\in[a,b]} |D^\alpha f(x)|$
5. $\sup_i |x_i|$
6. $(\sum_{i=0}^\infty |x_i|^2)^{\frac{1}{2}}$

QQ 29

Sei X ein Banachraum und $Y \subset X$ abgeschlossen.

Was fehlt?

- A Dann ist Y mit der Norm von X auch ein __________.
- B Sei $x' \in X^*$. Dann ist $\|x'|_Y\|_{Y^*}$ ___ $\|x'\|_{X^*}$.
- C Dann ist X^* größer als (oder gleich) Y^*, da ....

QQ 30

Sei X ein Banachraum und $Y \subset X$ dicht.

Wahr oder falsch?

A Dann ist Y mit der Norm von X ein Banachraum.

B Sei $x' \in X^*$. Dann ist $\|x'|_Y\|_{Y^*} \leq \|x'\|_{X^*}$.

C Dann ist $X^* \subset Y^*$.

QQ 31 – Schwache Ableitung

Existiert die schwache Ableitung? Wenn ja, was ist sie?

A $f(x \in \mathbb{R}) = \sin x$

B $f(x \in \mathbb{R}) = \begin{cases} \sin x & x \leq \frac{\pi}{2} \\ 3(x - \frac{\pi}{2}) & x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$

C $f(x \in \mathbb{R}) = \begin{cases} \sin x & x \leq \frac{\pi}{2} \\ 3x & x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$

D $f((x, y) \in \mathbb{R}^2) = \begin{cases} 1 & x \leq 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases}$

Schwache Ableitung[2]

Sei

$$f((x,y)\in\mathbb{R}^2) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}.$$

In Polarkoordinaten ist: $f(r,\phi)=\frac{1}{2}\sin(2\phi)$ – also in $(0,0)$ nicht stetig, aber nahe $(0,0)$ beschränkt. Ähnlich: $\partial_x f$ und $\partial_y f$ sind nahe $(0,0)$ beschränkt. Damit kann man für $\phi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ abschätzen :

$$\int_{\mathbb{R}^2} f\partial_x\phi \mathrm{dvol} \overset{\epsilon\to 0}{\leftarrow} \int_{\mathbb{R}^2\setminus[-\epsilon,\epsilon]^2} f\partial_x\phi \mathrm{dvol}$$

$$= \int_{-\epsilon}^{\epsilon}(f(-\epsilon,y)\phi(-\epsilon,y) - f(\epsilon,y)\phi(\epsilon,y))dy - \int_{\mathbb{R}^2\setminus[-\epsilon,\epsilon]^2}(\partial_x f)\phi\mathrm{dvol}$$

$$\overset{\epsilon\to 0}{\to} -\int_{\mathbb{R}^2\setminus[-\epsilon,\epsilon]^2}(\partial_x f)\phi\mathrm{dvol}$$

(Analog für ∂_y) – also ist f schwach ableitbar.

[2] Beispiel in 2D: Nicht stetig, aber schwach ableitbar

QQ 32 - Stetiges Funktionalkalkül

Sei A eine Jordanblock zum Eigenwert λ. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stetig.

Was ist $f(A)$?

QQ 33 - Stetiges Funktionalkalkül

Sei A eine hermitische $n \times n$-Matrix.

Sei $f(x) = e^x$. Dann gilt

$$e^A := f(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

Warum?

QQ 34 - Abschliessbar?

Sei $R\colon \mathrm{dom} R = C^\infty([0,1]) \subset L^2([0,1]) \to L^2([0,1])$ gegeben durch

$$(R\phi)(x) = \phi(0).$$

Ist R abschliessbar?

QQ – Spektralfamilie

Sei A eine quadratische hermitische $n \times n$ Matrix über $\mathbb{C}$ – aufgefasst als Element in $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$.

Wie sieht die zugehörige Spektralfamilie aus?

QQ – Spektralfamilie

Sei $P \colon H \to H$ eine Projektion.

Wie sieht die zugehörige Spektralfamilie aus?