Funktionalanalysis

Universität Freiburg, SS 2022 Nadine Große

Skript - Version vom 3. Mai 2024

Jenn Sie (Tipp-)Fehler finden, bin ich dankbar, wenn Sie mir d

Wenn Sie (Tipp-)Fehler finden, bin ich dankbar, wenn Sie mir diese mitteilen.

Inhaltsverzeichnis

W	orum	geht es?	1
1.	Hilb	erträume	5
	1.1.	Grundlegende Begriffe	5
	1.2.	Riesz-Theorem	9
	1.3.	Orthonormalbasen	12
2.	Ban	achräume	15
	2.1.	Beispiele	15
	2.2.		17
	2.3.	•	19
	2.4.	Vergleich zu Hilberträumen	22
		2.4.1. Reflexivität	22
		2.4.2. Annihilatoren	24
	2.5.	Noch ein bisschen Topologie auf metrischen/normierten Räumen	25
		2.5.1. Zu normierten Räumen	25
		2.5.2. Satz von Baire	26
		2.5.3. Gleichgradige Stetigkeit	26
3	Res	chränkte Operatoren	29
٠.		Beschränkheit und Stetigkeit	29
	3.2.		33
	3.3.		34
		Kompakte Operatoren	38
		Fredholmoperatoren	41
4.	Sch	wache Konvergenz	51
5.	Spe	ktrum beschränkter Operatoren	57
	5.1.	Definition und Eigenschaften	57
	5.2.	Spektralsatz für kompakte normale Operatoren	62
	5.3.		64
		5.3.1. Stetiges Funktionalkalkül	65
		5.3.2. Spektralfamilie	67
		5.3.3. Spektralsatz für beschränkte selbstadjungierten Operatoren .	71
6.	Unb	eschränkte Operatoren	77
		Grundbegriffe	77
	6.2.	Adjungierte	79

In halts verzeichnis

	6.3.	Selbstadjungiert vs. symmetrisch	80
	6.4.	Spektrum unbeschränkter Operatoren	82
	6.5.	Schrödingeroperatoren	88
		6.5.1. Regularität	89
		6.5.2. Spektra einiger Schrödingeroperatoren	91
Α.	Zusa	nmmenfassung Analysis 3	99
	A.1.	Vervollständigung	99
		L^p -Räume	99
В.	Etwa	as zu Sturm-Liouville-Problemen	101
	B.1.	(Reguläre) Sturm-Liouville Probleme	101
		B.1.1und Legendre-Polynomen	102
		B.1.2. Reguläre Sturm-Liouville als selbstadjungierter unbeschränkter	
		Operator	105
	B.2.	Singuläre Sturm-Liouville	106
Lit	eratu	ır	107

Vorl. 1

Worum geht es?

Ein Hauptgegenstand der Funktionalanalysis sind Funktionenräume, wie z.B. $C^0([a,b])$ und $L^2(\mathbb{R})$, und Abbildungen zwischen denen. Man überträgt geometrische Konzepte wie Punkt in einem Raum, offene Mengen, etc. auf Funktionenräume, also Räume deren Punkte selbst wieder Funktionen (oft mit besonderen Eigenschaften) sind. I.A. sind dies Vektorräume und mit einer Norm ausgestattet, wie wir es schon bei $C^0([a,b])$ und $L^2(\mathbb{R})$ getan haben. Die betrachteten Abbildungen sind normalerweise lineare Abbildungen. In diesem Sinne kann man dies als Weiterführung der linearen Algebra auf unendlich dimensionale normierte Räume verstehen. Allerdings werden dabei vor allem analytische und topologische Eigenschaften untersucht. Dabei werden wir recht abstrakte Sätze kennenlernen, die sich dann aber auf sehr konkrete Probleme anwenden lassen. Vor allem wird Funktionalanalysis bei der Analyse von Differentialoperatoren verwendet und bei der Untersuchung partieller Differentialgleichungen. Außerdem ist Funktionalanalysis der mathematische Rahmen für die Quantenmechanik.

Ein konkretes Problem für dessen Lösung man i.A. Funktionalanalysis verwendet, ist das Dirichlet-Problem des Laplace-Operators:

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt mit $\partial \Omega$ nett genug (z.B. eine glatte Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^n). Dann ist

$$\Delta u := -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^{2} u}{\partial x_{i}^{2}} = f \in C^{0}(\bar{\Omega}) \quad \text{ auf } \Omega$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0 \quad \text{ auf } \partial\Omega$$

das Dirichlet-Problem des Laplace auf Ω und beschreibt z.B. stationäre Wärmeverteilung auf Ω , dessen Wand konstant auf gegebener Temperatur (hier Null) ist. Mittels funktionalanalytischen Sätzen kann man zeigen, dass für gegebenes $f \in C^0(\bar{\Omega})$ dieses Problem immer genau eine Lösung besitzt. Dies ist i.A. nur ein abstraktes Existenzresultat und man kann die Lösung meist nicht einfach hinschreiben. Aber wir können etwas über Eigenschaften dieser Lösung aussagen. So ist hier in diesem Fall $u \in C^2(\Omega)$ und man erhält auch Abschätzungen für die C^2 -Norm von u in Abhängigkeit von f. Solche Abschätzungen nennt man apriori-Abschätzung.* Solche Apriori-Abschätzung spielen in PDEs eine große Rolle, sowohl in der Theorie als auch in der Numerik (dort um Konvergenzaussagen für numerische Algorithmen zu erhalten).

^{*}Apriori-Abschätzung \sim ohne die Lösung zu kennen, hat man Abschätzung an geeignete Normen, falls die Lösung existiert.

Der Laplace wird in der Funktionalanalysis als lineare Abbildung auf geeigneten Funktionenräumen verstanden. Für obiges Problem wollen wir zwar am Ende Lösungen in C^2 , aber es wird sich ein als nützlich erweisen, den Laplace auf anderen Funktionenräumen zu betrachten – sogenannten Sobolevräumen. Das sind Verallgemeinerungen von L^p -Räumen bei denen auch noch die Ableitungen (im geeigneten Sinne) in L^p sind. Elemente in diesen Räumen sind zwar i.A. nicht genügend differenzierbar als das man im herkömmlichen Sinne (=klassischen Sinne) dort den Laplace anwenden kann. Aber wir werden dem Problem noch immer Sinn geben (das werden dann Ableitungen im 'schwachen Sinne' sein), so dass wir für das analoge Problem von oben in Sobolevräumen auch Existenz von Lösungen zeigen werden können. Das wird (nach Einführung aller Definitionen) dann auch gar nicht mehr so schwer sein - deshalb der Übergang zu Sobolevräumen (Hauptunterschied: Normen auf Sobolevräumen, wie bei L^p werden über Integration gebildet, während Normen auf C^k sind mit Suprema. Suprema sind aber erst einmal schwerer zu kontrollieren als integrierte Größen. Man sagt, man handelt Regularität (wie oft ist etwas diffenzierbar) gegen Integrabilität*. Natürlich reicht es einem am Ende dann nicht, zu wissen, dass man eine Lösung im schwachen Sinne hat. Sondern möchte wieder mit Abschätzungen zeigen, dass diese dann doch schon in C^2 ist und damit eine Lösung wie ursprünglich gesucht ist. Das wird mit sogenannten Einbettungenssätzen erreicht, welche untersuchen, welche Funktionenräume (Sobolevund C^k -Räume) wie ineinander enthalten sind.

Dies ist ein Problem auf das wir im Laufe der Vorlesung funktionalanalytische Sätze und Konzepte anwenden werden. Ein anderes oft auftretendes Problem ist eine Weiterführung der Untersuchungen linearer Abbildungen von einem Vektorraum in sich selbst. Im Falle eines endlich-dimensionalen Vektorraumes hat man in lineare Algebra das Konzept der Eigenwerte und Eigenvektoren kennengelernt und gesehen, dass für nett-genuge Matrizen man darüber eine Eigenbasis-Zerlegung des Vektorraumes erhält. Dies ist ein Konzept, was sich auf nett-genuge lineare Abbildungen von einem Hilbertraum in sich selbst verallgemeinern. Ein solches Beispiel haben wir in Wirklichkeit schon gesehen in Analysis 3 gesehen mit Fourierreihen:

Jedes $f \in L^2([-\pi, \pi])$ kann man schreiben als $f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$. Die Basiselemente e^{ikx} kann man als Eigenvektoren (hier Eigenfunktionen) der linearen Abbildung

$$A \colon f$$
 geeignete Funktion auf $S^1 \mapsto f''$

verstehen: $Ae^{\mathrm{i}kx}=-k^2e^{\mathrm{i}kx}$. Ein Unterschied zu LA: Basis bedeutet hier nicht wie in Lineare Algebra: Jedes Element lässt sich als endliche Linearkombination von Basisvektoren schreiben (=Hamelbasis). Sondern: Jedes Element lässt sich als unendliche Linearkombination von Basisvektoren schreiben, wobei die Reihe bzgl. der Norm des Hilbertraumes konvergiert. (=Hilbertbasis)). Ein anderer Unterschied: Auch wenn A gar nicht auf ganz $L^2([-\pi,\pi])$ definiert werden kann, sondern nur auf einer dichten Teilmenge, erhalten wir am Ende eine Zerlegung von ganz $L^2([-\pi,\pi])$ vor.

^{*}Natürlich kann man z.B. auch auf $C^0(\bar{\Omega})$ die L^p -Norm betrachten, hat nur den Nachteil, dass C^0 mit dieser Norm nicht vollständig ist. (Fast) Alles, was wir in Funktionalanalysis machen werden, wird auf vollständigen normierten Räumen stattfinden – auf Banachräumen und oft sogar auf Hilberträumen (= die Norm kommt von einem inneren Produkt)

Solche Eigenwertprobleme kommen in verschiedenen Kontexten vor, z.B: Betrachten wir den Laplaceoperator Δ dieses Mal auf ganz \mathbb{R}^2 und wieder $\Delta u = 0$. In Polarkoordinaten ist der Laplace:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

ist.

Nehmen wir mal an, eine Lösung habe die Form $u(r,\varphi) = f(r)\cos(\nu\varphi)$ für $\nu \in \mathbb{Z}$ (Separationsansatz). Dann löst dieses u genau dann $\Delta u = \mu u$, wenn

$$r^2 f''(r) + r f'(r) = \nu^2 f(r)$$

gilt. Diese GDGL ist die Bessel-Differentialgleichung (vgl. auch [3, Abschnitt 3.7]). Für alle $\nu \in \mathbb{Z}$ erhält man hier Lösungen aufgespannt durch Besselfunktionen erster Art (diese sind in L^2 und führen zu einer Eigenbasis von L^2) und Besselfunktionen zweiter Art (nicht in L^2 und es kommt aufs konkrete Problem an, ob die relevant sind oder die erster Art ausreichen, vgl. Wasserstoffatom weiter unten).

Diese zwei Beispiele (Bessel und Fourier) sind Spezialfälle sogenannter Sturm-Liouville Probleme. In 1836-1837 Sturm und Liouville haben in einer Reihe von Papern lineare GDGL zweiter Ordnung (ggf. mit Randwerten) untersicht. Das ist historisch gesehen einer der Anfänge der Funktionalanalysis und führt bei den zugehörigen Eigenfunktionen zur Untersuchtung spezieller Funktionen. Während die genauen Eigenschaften der Lösungen von dem konkreten Problem abhängen, kann man durch abstrakte Resultate Zerlegunsresultate und Summierungseigenschaften direkt ablesen ohne es jedesmal neu nachzurechnen.

Ein weiteres wichtiges Anwendungsgebiet für Funktionalanalysis ist die mathematische Formulierung von Quantenmechanik: Ein physikalisches System wird grob gesagt i.A. durch Zustände, Observablen ('misst den Wert von Zuständen') und deren Dynamik (zeitliche Entwicklung) beschrieben. Klassisch sind Zustände Punkte im Phasenraum (~ Orts- und Impulsraum) und Observablen sind reell-wertige Funktionen auf diesem. Quantenmechanisch werden Zustände von Teilchen als Wellenfunktion dargestellt, deren Betragsquadrat die Wahrscheinlichkeitsdichte beschreibt, mit der sich das Teilchen an diesem Punkt aufhält. Oft sind Zustände dann Elemente in einem Hilbertraum (= ein vollständiger Vektorraum mit innerem Produkt, z.B. $L^2(\mathbb{R}^3)$.) Observablen sind geeignete (selbstadjungierte) lineare Abbildungen auf dem Zustandsraum (=Raum der Zustände). Die Dynamik wird durch dann durch zeitabhängie (eine Ein-Parameter-Gruppe) unitäre Abbildungen auf diesem Hilbertraum beschrieben. Auch hier spielen Eigenwert-Zerlegungen bzw. deren Verallgemeinerungen eine große Rolle. Z.B. wird das Wasserstoffatom* mittels des Laplaceoperators plus einem Potentialterm ($\sim 1/\text{Abstand zum Kern} = \text{Coloumbpotential}$) beschrieben. Betrachtet man diesen Operator auf L^2 entsprechen Eigenfunktionen, die wirklich in L^2 sind, gebundenen Zuständen (Elektron und Kern bilden wirklich das Atom - 'das Elektron ist nicht zu weit weg und wird durch die Anziehung nicht beim Kern gehalten'). Der

 $^{^*}$ Annahme: Kern ist fix im Ursprung und wir suchen den Zustand/die Wellenfunktion des Elektrons

Inhaltsverzeichnis

Eigenwert entspricht dann der Energie des Zustandes. Allerdings werden hier diese L^2 -Eigenfunktionen nicht mehr zu einer (Hilbert-)Basis führen. Interessiert einem das L^2 aber nicht dann gibt es viel mehr Eigenfunktionen (Die, wenn sie nicht L^2 sind,* ungebundenen Zuständen/Streuzuständen.) beschreiben. Da gibt es mathematisch (min.) zwei Möglichkeiten diesen Problem zu behandeln: Erstens – man bleibt beim L^2 -Hilbertraum und verallgemeinert den Begriff eines Eigenwertes (Spektrum) und erhalt dann in Verallgemeinerung der Eigenwertzerlegung aus Lineare Algebra eine sogenannte Spektralzerlegung. Nachteil: Die ungebundenen Zustände sind dann nicht nur appromativ in diesem Rahmen enthalten, aber deren Energie ist im Spektrum noch ablesbar. Zweitens – man vergrößert L^2 geeignet, so dass die ungebundenen Zustände als Eigenfunktionen in dem Raum enthalten sind ($Gelfandtripel/Rigged\ spaces$). Nachteil: Kein Hilbertraum mehr.

Bei der konkreten Berechnung der Eigenzustände des Wasserstoffatoms kann man (wegen der Rotationssymmetrie des Potentials) auch wieder einen Separationsansatz machen und erhält auch wieder ein Sturm-Liouville-Problem.

^{*}In der Mathematik nennen wir diese dann zur Abgrenzung verallgemeinerte Eigenfunktionen.

1. Hilberträume

1.1. Grundlegende Begriffe

Definition 1.1.1. Ein *Hilbertraum* ist ein komplexer Vektorraum V mit einer positiv definiten hermitischen Sesquilinearform* $\langle .,. \rangle_V$, so dass V bzgl. der Norm $\|x\|_V := \sqrt{\langle x,x \rangle_V}$ vollständig[†] ist.

Wenn der Hilbertraum sich aus dem Kontext ergibt, wird der Index bei der Norm und der Sesquilinearform auch oft weggelassen. Statt Sesquilinearform sagen wir im folgenden auch oft *inneres Produkt*.

Man kann auch reelle Hilberträume definieren, in dem einen reellen Vektorraum mit vollständigem Skalarprodukt betrachtet. Die allermeisten Sachen gehen da genau analog.

Beispiel 1.1.2.

(i) \mathbb{C}^n mit der Standard-Sesquilinearform

$$\langle z = (z_1, \dots, z_n), y = (y_1, \dots, y_n) \rangle := \sum_{i=1}^n \overline{z_i} y_i$$

ist ein Hilbertraum, [2, Folg. 3.9.8 und Lem. 3.9.13].

(ii) $L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) := \overline{C_c^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})}^{\|.\|_2} = \overline{C_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})}^{\|.\|_2}$, hierbei ist $\|c\|_2 := \left(\int_{\mathbb{R}^n} |c|^2 \mathrm{dvol}\right)^{\frac{1}{2}}$ für $c \in C_c^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ als Mehrfachintegral wie in [3, Satz 2.4.4], ist mit der fortgesetzten Norm $\|.\|_2$ auf die Vervollständigung ein Hilbertraum [4, S.41]. Alle anderen L^p -Räume für $p \neq 2$ sind mit der L^p -Norm keine Hilberträume [4, ÜA24].

Vergleiche auch Appendix A.

(iii) Sei $f \in C_c^{\infty}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$. Wir setzen[‡] für $k \in \mathbb{N}$

$$(f,g)_{H^k} := \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leqslant k} (D^{\alpha}f, D^{\alpha}g)_{L^2}.$$

^{*}Hier immer komplex antilinear in der ersten Komponente

[†]vollständig = jede Cauchyfolge konvergiert

[‡]Hier benutzen wir die Multiindex-Notation, vgl. [3, S. 22]: $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n),\ x^\alpha=x_1^{\alpha_1}\ldots x_n^{\alpha_n}.$ Dann ist $|\alpha|=\sum_{i=1}^n\alpha_i$ und $D^\alpha=\frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}}\ldots\frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}}.$

1. Hilberträume

Damit ist $C_c^{\infty}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ ein komplexer Vektorraum mit der Sesquilinearform $(.,.)_{H^k}$. Es ist $(.,.)_{H^0} = (.,.)_{L^2}$. Wie für k=0 ist auch für alle höheren k $C_c^{\infty}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ mit der H^k -Norm nicht vollständig.

Die Vervollständigung $H^k(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}):=\overline{C_c^{\infty}(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})}^{\|\cdot\|_{H^k}}$ ist ein Hilbertraum, s. [4, Satz 1.3.4 und ÜA 24].

(iv) ℓ_2 ist die Menge komplexer Folgen $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ mit $\sum_{i=0}^{\infty}|a_i|^2<\infty$ mit der Sesquilinearform

$$((a_i)_i,(b_i)_i)_{\ell_2} := \sum_{i=0}^{\infty} \overline{a_i} b_i$$

ist ein Hilbertraum. (Vollständigkeit = ÜA1.)

(v) (Direkte Summe) Seien H_i , $i \in \mathbb{N}$, Hilberträume mit Sesquilinearform $\langle .,. \rangle_i$. Dann ist $H_1 \oplus H_2$ versehen mit

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = \langle x_1, x_2 \rangle_{H_1} + \langle y_1, y_2 \rangle_{H_2}$$

ein Hilbertraum (ÜA1).

Sei H die Menge von Folgen $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ mit $x_i\in H_i$ und $\sum_{i=0}^{\infty}\|x_i\|_{H_i}^2<\infty$ ist zusammen mit

$$\langle (x_i)_i, (y_i)_i \rangle := \sum_{i=0}^{\infty} \langle x_i, y_i \rangle_{H_i}$$

ein Hilbertraum (Argument wie im letzten Fall) und wird mit $H =: \bigoplus_{i=0}^{\infty} H_i$ bezeichnet.

Im Folgenden werden wir in $L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$, $C_c^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$, ... den Wertebereich \mathbb{C} i.A. nicht mehr mitschreiben. Aber da wir (wenn nicht anders gesagt) mit komplexen Vektorräumen arbeiten, ist das dann immer gemeint.

Vorl. 2 Eine große Rolle werden Operatoren zwischen Hilberträumen spielen:

Definition 1.1.3. Seien H_1, H_2 Hilberträume. Ein *Operator* A: dom $A \subset H_1 \to H_2$ ist eine lineare Abbildung definiert auf einem linearen Unterraum* dom $A \subset H_1$.

!! Achtung: Selbst, wenn von einem Operator $A \colon H_1 \to H_2$ gesprochen wird (wie meistens der Fall), heißt das nicht, dass der Definitionsbereich ganz H_1 ist. Oft wird das dom A nicht mitgeschrieben. !!

Beispiel 1.1.4.

(i) Eine komplexe Matrix definiert eine lineare Abbildung $A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$, $v \mapsto Av$ und damit einen Operator.

^{*}dom = domain (Definitionsbereich)

- (ii) Ortsoperator* $H = L^2(\mathbb{R})$. Sei dom $T \subset L^2(\mathbb{R})$ die Menge aller $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ mit $\int_{\mathbb{R}} x^2 |\varphi(x)|^2 dx < \infty$ und $(T\varphi)(x) := x\varphi(x)$.
- (iii) $Impulsoperator^{\dagger} H = L^{2}(\mathbb{R})$. Sei dom T die Menge der $\varphi \in L^{2}(\mathbb{R}) \cap C^{1}(\mathbb{R})$ mit $\int_{\mathbb{R}} |\varphi'(x)|^{2} dx < \infty$ (also $\varphi' \in L^{2}(\mathbb{R})$) und $(T\varphi)(x) := i\varphi'(x)$. ‡
- (iv) Seien H_1 , H_2 zwei normierte Räume. Einen Operator A: dom $A = H_1 \rightarrow H_2$, so dass die $Operatornorm^{\S}$

$$\|A\|\!:=\!\sup_{|x|_{H_1}=1}\|Ax\|_{H_2}<\infty$$

ist, nennen wir beschränkt. Die Menge aller beschränkten Operatoren von H_1 nach H_2 bezeichnen wir mit $\mathcal{L}(H_1, H_2)$. Diese Menge ist selber wieder ein \mathbb{C} -Vektorraum und $\|.\|$ eine Norm darauf. (Falls H_2 vollständig ist, wird $(\mathcal{L}(H_1, H_2), \|.\|)$ zu einem Banachraum, vgl. Beispiel 2.1.1.v).

(i) ist ein beschränkter Operator. (ii) und (iii) können nicht Einschränkungen eines beschränktes Operators von $L^2(\mathbb{R})$ auf sich selbst sein, s. ÜA2+3.

Die Operatornorm hängt davon ab, auf welchen Räumen der Operator betrachtet wird, vgl. ÜA3. I.A. sind die Räume aus dem Kontext klar, wenn nicht schreiben wir $\|A\|_{H_1 \to H_2}$.

(v) Multiplikationsoperator M_f : Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und beschränkt und

$$\operatorname{dom} M_f := \{ \varphi \in L^2(\mathbb{R}^n) \mid f\varphi \in L^2(\mathbb{R}^n) \}^{\P}.$$

Sei M_f : dom $M_f \subset L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \mapsto f\varphi$. Ist f beschränkt, dann ist dom $M_f = L^2(\mathbb{R})$ und M_f ein beschränkter Operator:

- dom $M_f = L^2(\mathbb{R})$ folgt aus $||f\varphi||_2 \le \sup |f| \cdot ||\varphi||_2 < \infty$.
- Aus der letzten Ungleichung folgt auch $||M_f|| \leq \sup |f|$ und damit M_f beschränkt.

^{*}Der Ortsoperator gehört in der Quantenmechanik zur Ortsmessung von Teilchen. Der Zustand eines Teilchens wird durch ein Element $\psi \in L^2(\mathbb{R}^3)$ mit L^2 -Norm eins beschrieben. Interpreatiation: $\int_K |\psi|^2$ dvol ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich ein Teilchen, beschrieben durch ψ , im Gebiet $K \subset \mathbb{R}^3$ aufhält. $(T\psi,\psi)_{L^2} = \int_{\mathbb{R}^n} x|\psi|^2$ dvol gibt dann den Erwartungswert für den Ort des Teilchens. Der Operator im Beispiel ist die eindimensionale Version.

[†]Der Impulssoperator gehört in der Quantenmechanik zur Impulsmessung von Teilchen – dort eigentlich $p_i = -i\hbar\partial_{x_i}$, i=1,2,3, mit \hbar das Plancksche Wirkungsquantum (Naturkonstante)

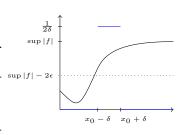
 $^{^{\}ddagger}$ Wir werden später sehen, dass die Multiplikation mit i dazu gut ist, dass der Operator T symmetrisch wird (das ist die Verallgemeinerung symmetrischer Matrizen (im reellen Fall) bzw. hermitischer Matrizen (im komplexen Fall)).

[§]Man rechnet direkt nach, dass dies wirklich eine Norm ist.

[¶]Hierbei ist $f\varphi$ als punktweise Multiplikation von f mit einer Realisierung von f zu verstehen und falls die dadurch entstandene Funktion wieder Realisierung eines Elementes in $L^2(\mathbb{R}^n)$ ist, ist $f\varphi\in L^2(\mathbb{R}^n)$

1. Hilberträume

Es gilt sogar $\|M_f\|=\sup|f|$: Ist f=0, dann ist die Aussage klar richtig. Sei nun f nicht die Nullfunktion. Für $\epsilon\in(0,\sup|f|/2)$ sei $\frac{1}{2\delta}$ $x_{\epsilon}\in\mathbb{R}$ derart, dass $|f|(x_0)>\sup|f|-\epsilon$ ist. Sei nun $\delta>0$, so dass $|f|>\sup|f|-2\epsilon$ für alle $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ ist. Wir wähsup $|f|-2\epsilon$ len $\varphi=\frac{1}{2\delta}\chi_{x_0-\delta,x_0+\delta}$. Dann ist $\|f\varphi\|_{L^2}^2=\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}|f|^2dx\geqslant (\sup|f|-2\epsilon)^2$ und damit $\|M_f\|\geqslant\sup|f|-2\epsilon$. Für $\epsilon\to0$ folgt die Behauptung.



Definition 1.1.5. Zwei Hilberträume H_1 und H_2 heißen isomorph, falls es es einen surjektiven Operator U: dom $U = H_1 \rightarrow H_2$ mit $\langle Ux, Uy \rangle_{H_2} = \langle x, y \rangle_{H_1}$ für alle $x, y \in H_1$. Solch einen Operator U nennt man $unit\ddot{a}r$.

Beim Überprüfen der Definition reicht es $||Ux||_{H_2} = ||x||_{H_1}$ für alle $x \in H_1$ statt $\langle Ux, Uy \rangle_{H_2} = \langle x, y \rangle_{H_1}$ nachzurechnen, da dies dann durch Polarisation mit

$$4\langle x, y \rangle = \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 - i\|x + iy\|^2 + i\|x - iy\|^2$$

folgt.*

Beispiel 1.1.6.

- (i) Die Abbildung $L^2([-\pi, \pi]) \to \ell_2$, $f \mapsto (\hat{f}(k))_{k \in \mathbb{Z}}$, mit $\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{ikx} dx$ den Fourierreihenkoeffizienten, ist ein Isomorphismus von Hilberträumen, [4, Folg. 2.1.4].
- (ii) Sei $\iota \colon \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ eine Bijektion (existiert, da beides abzählbar ist, [2, Abschnitt 3.10]). Sei

$$U \colon L^2(\mathbb{R}) \to \ell_2, \quad f \mapsto \left(\hat{f}_m(k)\right)_{\iota(k,m)}$$

mit $\hat{f}_m(k)$ ist der k.
te Fourierkoeffizient von $f|_{[2m\pi-\pi,2m\pi+\pi]}$ multipliziert mit $\frac{\|f\|_2}{\|f|_{[2m\pi-\pi,2m\pi+\pi]}\|_2}$ falls $f|_{[2m\pi-\pi,2m\pi+\pi]} \neq 0$ sonst gleich Null. Dann ist U ein Isomorphismus von Hilberträumen:

- Operator mark
- $||Uf||_{\ell_2} = ||f||_2$ folgt aus (i) und der Wahl des Vorfaktors in $\hat{f}_m(k)$.
- Surjektiv: Für festes $m \in \mathbb{Z}$ ist $f|_{[2m\pi-\pi,2m\pi+\pi]} \in L^2([2m\pi-\pi,2m\pi+\pi])$ eindeutig durch $(\hat{f}_m(k))_k$ bestimmt. Damit haben wir über alle $m \in \mathbb{Z}$ einen Kandidaten für f. Noch zu zeigen $f \in L^2(\mathbb{R})$: Es ist

$$\|f\|_2 = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \|f|_{[2m\pi - \pi, 2m\pi + \pi]} \|_2 \stackrel{(i)}{=} \sum_{k, m \in \mathbb{Z}} \|\hat{f}_m(k)\|_2 < \infty.$$

^{*}Die Variante für reelle Vektorräume kam in der Berechnung von $[4,\,\dot{\mathrm{U}}\mathrm{A24}]$ vor. Die komplexe Variante sieht etwas komplizierter aus, kann man aber auch einfach direkt nachrechnen.

Wir werden später noch andere (nützlichere) Isomorphismus von $L^2(\mathbb{R})$ mit ℓ_2 kennenlernen. Aber diesen hier konnten wir mit (i) recht einfach hinschreiben.

Wir werden später sehen, dass jeder Hilbertraum, der eine abzählbare unendliche Basis* besitzt (das nennt man dann separabel), isomorph zu ℓ_2 ist.

1.2. Riesz-Theorem

Sei H hier und im Weiteren immer ein Hilbertraum. Dann haben wir mit dem inneren Produkt aus der linearen Algebra die folgenden Begriffe:

Definition 1.2.1.

- (i) $x, y \in H$ sind orthogonal, $x \perp y$, genau dann, wenn $\langle x, y \rangle = 0$.
- (ii) Sei $M \subset H$. Dann ist das orthogonale Komplement

$$M^{\perp} := \{ y \in H \mid \langle x, y \rangle = 0 \ \forall x \in M \}.$$

Außerdem gilt die Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$|\langle x, y \rangle| \leqslant ||x|| \, ||y||,$$

mit Gleichheit genau dann, wenn x und y linear abhängig sind, vgl. [2, Lem. 3.9.3 – Beweis für allgemeine Vektorräume mit innerem Produkt analog], und die Parallelogrammidentität [4, ÜA24]

$$||x + y||^2 + ||x - y||^2 = 2(||x||^2 + ||y||^2).$$

Lemma 1.2.2. Für alle $x \in H$ sind die Abbildungen $y \in H \mapsto \langle x, y \rangle \in \mathbb{C}$ und $y \in H \mapsto \langle y, x \rangle \in \mathbb{C}$ stetig.[†] Auch die Abbildung $y \in H \to \|y\| \in \mathbb{R}$ ist stetig.

Nach unserer Konvention für das innere Produkt ist $y \in H \mapsto \langle x, y \rangle$ linear und $y \in H \mapsto \langle y, x \rangle$ antilinear.

Beweis. Da jeder normierte Raum mit $d(x,y):=\|x-y\|$ ein metrischer Raum ist, reicht es Folgenstetigkeit zu überprüfen: Sei $y_i\to y$ in H. Dann gilt

$$|\langle x, y_i \rangle - \langle x, y \rangle| = |\langle x, y_i - y \rangle| \le ||x|| ||y_i - y|| \to 0 \quad \text{für } i \to \infty.$$

Die Stetigkeit der zweiten Abbildung folgt analog (oder da die komplexe Konjugation stetig ist).

Die Stetigkeit der Norm folgt direkt aus $|||y_i|| - ||y||| \le ||y_i - y||$.

^{*}Basis hier nicht im Sinne der linearen Algebra, sondern als Hilbertbasis wie bei den Fourierreihen in [4, S, 57]

[†] Jeweils stetig als Abbildung des normierten Raumes $(H, \|.\| = \sqrt{\langle ., . \rangle})$ nach \mathbb{C} , vgl. [3, Def. 1.1.2].

Lemma 1.2.3. Sei $M \subset H$. Dann ist M^{\perp} ein abgeschlossener linearer Unterraum* von H mit $M \cap M^{\perp} \in \{\{0\}, \emptyset\}$. Damit ist M^{\perp} mit der Norm von H insbesondere selbst wieder ein Hilbertraum.

Beweis. Linearer Unterraum folgt aus der Linearität des inneren Produkts in der zweiten Komponente. Um zu zeigen, dass M^{\perp} abgeschlossen ist, betrachten wir eine Folge $(y_i)_i$ in M^{\perp} , welche gegen ein $y \in H$ konvergiert. Wegen Stetigkeit des inneren Produkts folgt, $0 = \langle x, y_i \rangle \rightarrow \langle x, y \rangle$ für alle $x \in M$ und damit $y \in M^{\perp}$.

Sei nun $x \in M \cap M^{\perp}$. Dann ist $||x||^2 = \langle x, x \rangle = 0$. Ist also $0 \in M$, dann ist $M \cap M^{\perp} = \{0\}$; sonst ist der Schnitt leer.

Lemma 1.2.4. Sei H ein Hilbertraum. Sei M ein abgeschlossener linearer Unterraum von H und sei $x \in H$. Dann existiert ein eindeutiges Element z, welches den Abstand ||x-z|| unter allen $z \in M$ minimiert (also am nähesten an x ist).

Beweis. Sei y_i eine Folge in M mit $||x - y_i|| \to d := \inf_{y \in M} ||x - y||$. Wir zeigen, dass dann die y_i eine Cauchyfolge bilden: Es gilt

$$||y_i - y_j||^2 = ||y_i - x + x - y_j||^2 \stackrel{\text{Parall.}}{=} 2||y_i - x||^2 + 2||y_j - x||^2 - ||y_i + y_j - 2x||^2$$

$$= 2||y_i - x||^2 + 2||y_j - x||^2 - 4||x - \frac{1}{2}(y_i + y_j)||^2$$

$$\leq 2||y_i - x||^2 + 2||y_j - x||^2 - 4d^2$$

und für $i, j \to \infty$ konvergiert die linke Seite gegen 0.

Da H vollständig ist, gibt es ein $z \in H$ mit $y_i \to z$. Da M abgeschlossen ist, ist $z \in M$. Wegen Stetigkeit der Norm folgt $\|x - y_i\| \to \|x - z\|$, also $\|x - z\| = d$. Dieses z ist eindeutig: Angenommen es gibt noch einen Minimierer \bar{z} , dann ist z_i gegeben durch $z_{2i} = y_i$ und $z_{2i+1} = \bar{z}$ auch eine minimierende Folge von inf $y \in M$. Damit folgt aus obigen, dass z_i konvergiert. Damit müssen z und \bar{z} als Grenzwerte von Teilfolgen übereinstimmen.

Vorl. 3 Satz 1.2.5 (Projektionssatz). Ist $M \subset H$ ein abgeschlossener linearer Unterraum,

$$H = \{x + y \mid x \in M, y \in M^{\perp}\}.$$

Die Zerlegung eines Elementes von H in diese Form x + y ist eindeutig.

Beweis. Die \subset -Inklusion ist klar. Sei nun $z \in H$. Sei $x \in M$ das Element aus letztem Lemma, welches z am nächsten ist. Es ist zu zeigen, dass $z - x \in M^{\perp}$: Auf Grund der Wahl von x gilt für alle $u \in M$ und alle $t \in \mathbb{R}$

$$||x - z||^2 \le ||x - (z + tu)||^2 = ||x - z||^2 - 2t\operatorname{Re}\langle x - z, u \rangle + t^2||u||^2$$

und damit

$$t^2 \|u\|^2 \geqslant 2t \operatorname{Re}\langle x - z, u \rangle.$$

^{*}linearer Unterraum = Untervektorraum

Da t im Betrag beliebig klein gewählt werden kann, folgt $\operatorname{Re}\langle x-z,u\rangle=0$ für alle $u\in M$. Das analoge Argument für $x-(z+t\mathrm{i} u)$ liefert $\operatorname{Im}\langle x-z,u\rangle=0$ für alle $u\in M$ und damit $x-z\in M^\perp$.

Zur Eindeutigkeit sei $x_1+y_1=x_2+y_2$ mit $x_i\in M$ und $y_i\in M^\perp$. Dann ist $M\ni x_1-x_2=y_2-y_1\in M^\perp$. Wegen $M\cap M^\perp=\{0\}$ folgt $x_1=x_2$ und $y_1=y_2$.

Der letzte Satz impliziert die Isomorphie der Hilberträume H und $M \oplus M^{\perp}$. Wir schreiben dafür kurz $H = M \oplus M^{\perp}$.

Definition 1.2.6. Die Menge $H^*:=\mathcal{L}(H,\mathbb{C})$ heißt *Dualraum* von H. Die Elemente von H^* nennt man stetige lineare Funktionale*.

Satz 1.2.7 (Riesz-Theorem). Für alle $A \in H^*$ gibt es genau ein $y_A \in H$ mit $Ax = \langle y_A, x \rangle$ für alle $x \in H$. Außerdem gilt $||y_A||_H = ||A||$. Die Abbildung $A \mapsto y_A$ ist antilinear und bijektiv mit antilinearem Inversem

$$H \to H^*, y \mapsto \langle y, . \rangle.$$

Die letzte Abbildung nennen wir den kanonisch antilinearen Isomorphismus von H nach H^* .

Für $L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ hatten wir dies in einer reellwertigen Version in [4, Satz 1.8.9] skizziert.

Beweis. Die Existenz und Eindeutigkeit von y_A folgt, da das innere Produkt nicht entartet ist. Falls $y_A = 0$ ist, folgt A = 0. Sei nun $y_A \neq 0$. Dann gilt

$$\|y_A\|_H = \frac{|\langle y_A, y_A \rangle|}{\|y_A\|_H} \overset{x=y_A}{\leqslant} \underbrace{\sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{|Ax| = |\langle y_A, x \rangle|}{\|x\|_H}}_{=\|A\|} \overset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leqslant} \|y_A\|_H,$$

woraus $||y_A||_H = ||A||$ folgt.

Die Antilinearität von $A \mapsto y_A$ kommt daher, dass y_A in der ersten Komponente des inneren Produkts steht – genauer gilt:

$$\langle y_A + \overline{\alpha} y_B, x \rangle = \langle y_A, x \rangle + \alpha \langle y_B, x \rangle = Ax + \alpha B(x) = (A + \alpha B)(x) = \langle y_{A+\alpha B}, x \rangle$$

für alle $A, B \in H^*$ und $\alpha \in \mathbb{C}$.

Man rechnet direkt nach, dass die zweite Abbildung die Inverse ist. \Box

Folgerung 1.2.8. Sei $B: H \times H \to \mathbb{C}$ eine Sesquilinearform[‡]. Außerdem sei B beschränkt, d.h. $\exists C > 0: |B(x,y)| \leq C\|x\| \|y\|$. Dann gibt es einen eindeutigen beschränkten Operator $A: H \to H$ mit

$$B(x,y) = \langle x, Ay \rangle.$$

^{*}Wir werden später sehen, dass bei Operatoren (lineare Abbildungen) Beschränktheit und Stetigkeit dasselbe ist, daher der Name.

 $^{^\}dagger \mathrm{Das}~x$ muss hier in der zweiten Komponente stehen und nicht in der ersten, da sonst Anicht linear sein könnte.

 $^{^{\}ddagger}$ linear in der zweiten und antilinear in der ersten Komponente

1. Hilberträume

Beweis. Für $y \in H$ definiert $x \mapsto \overline{B(x,y)}$ einen Operator, der beschränkt ist, da B beschränkt ist. Damit ist es ein Element in $\tilde{B} \in \underline{H^*}$ zu dem es nach letztem Satz ein Element gibt, welches wir Ay nennen, mit $\overline{B(x,y)} = \tilde{B}x = \langle Ay,x \rangle$, also $B(x,y) = \langle x,Ay \rangle$. Die dadurch definierte Abbildung $y \mapsto Ay$ ist linear, da B linear in der zweiten Komponente ist. Eindeutigkeit folgt aus der Nichtdegeneriertheit des inneren Produkts, da für ein A' mit den gleichen Eigenschaften $\langle x,Ay-\tilde{A}y \rangle = 0$ für alle $x,y \in H$ und damit $Ay = \tilde{A}y$ folgt.

Es bleibt die Beschränktheit von A zu zeigen:

$$||Ay||^2 = B(Ay, y) \le C||Ay|| ||y||$$
 und damit $||A|| \le C$.

1.3. Orthonormalbasen

Definition 1.3.1. Sei H ein Hilbertraum. Eine Teilmenge $S \subset H$ heißt orthonormal, falls $\langle x,y \rangle = 0$ und $\|x\| = 1$ für alle $x,y \in S$ mit $x \neq y$ gilt. Eine orthonormale Teilmenge S heißt eine orthonormale (Hilbert)Basis/ein vollständiges Orthonormalsystem von H, falls es keine orthonormale Teilmenge $S' \subset H$ mit $S \subset S'$ und $S \neq S'$ gibt.

Mit dem Auswahlaxiom (Zornsches Lemma) sieht man leicht, dass jeder Hilbertraum eine solche Basis besitzt. Wir werden den Begriff aber nur für Hilberträume mit abzählbarer Basis, sogenannte separable Hilberträume, verwenden.

Lemma 1.3.2 (Pythagoras). Sei $S = \{x_k \mid 1 \le k \le N\}$ eine orthonormale Teilmenge eines Hilbertraumes H. Dann gilt für alle $x \in H$

$$||x||^2 = \sum_{k=1}^N |\langle x, x_k \rangle|^2 + \left||x - \sum_{k=1}^N \langle x, x_k \rangle x_k\right||^2.$$

Beweis. Ansatz: $x = \sum_{k=1}^{N} \langle x, x_k \rangle x_k + \left(x - \sum_{k=1}^{N} \langle x, x_k \rangle x_k\right)$ und nachrechnen.

Satz 1.3.3. Sei H ein separabler Hilbertraum und $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine orthonormale Basis von H. Dann gilt für alle $y \in H$

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} \langle x_k, y \rangle x_k \quad und \quad \|y\|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |\langle x_k, y \rangle|^2.$$

Beweis. Die zweite Gleichheit folgt direkt aus der ersten und der Orthonormalität.

Nach letztem Lemma ist $\sum_{k=0}^{N} |\langle x_k, y \rangle|^2 \leq ||y||^2$ für alle N. Also ist $\left(\sum_{k=0}^{N} |\langle x_k, y \rangle|^2\right)_N$ eine monoton steigende beschränkte Folge und konvergiert somit.

Sei nun $y_n := \sum_{k=0}^n \langle x_k, y \rangle x_k$ Dann gilt für n > m

$$||y_n - y_m||^2 = \left\| \sum_{i=m+1}^n \langle x_k, y \rangle x_k \right\|^2 = \sum_{i=m+1}^n |\langle x_k, y \rangle|^2,$$

Also ist y_n eine Cauchyfolge in H und konvergiert gegen ein $\hat{y} \in H$. Es bleibt $y = \hat{y}$ zu zeigen. Dies folgt, da für alle Basiselemente gilt:

$$\langle y - \hat{y}, x_{\ell} \rangle = \lim_{k \to \infty} \langle y - \sum_{k=1}^{n} \langle x_k, y \rangle x_k, x_{\ell} \rangle = \langle y, x_{\ell} \rangle - \langle y, x_{\ell} \rangle = 0.$$

Wäre nun $y - \hat{y} \neq 0$, dann wäre $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}} \cup \{\frac{y - \hat{y}}{\|y - \hat{y}\|}\}$ eine größere orthonormale Teilmenge, was der Definition der Orthonormalbasis widerspricht.

Lemma 1.3.4. Ist $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine orthonormale Teilmenge eines Hilbertraumes H, so dass es für alle $y\in H$ eine komplexe Folge $(\alpha_n)_n$ mit $y=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_ne_n$ gibt, dann ist $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Orthonormal(hilbert)basis.

Beispiel 1.3.5. $(e_k := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx})_{k \in \mathbb{Z}}$ ist eine orthonormale Hilbertbasis von $L^2([-\pi, \pi])$:

Orthonomalität folgt wegen

$$(e_k, e_\ell)_{L^2} = \frac{1}{2k} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(\ell - k)x} dx = \delta_{kl}.$$

Die Fourierreihe [4, Abschnitt 2.1.2] ist die Darstellung jedes Elementes aus $L^2([-\pi, \pi])$ bezüglich dieser e_k , also muss es nach letztem Lemma eine Orthonormalbasis sein.

2. Banachräume

Allgemeiner als Hilberträume ist der Begriff der Banachräume, der schon in Analysis 2 und 3 eine Rolle gespielt hat:

Ein Banachraum ist ein vollständig normierter Vektorraum.

Operatoren zwischen Banachräumen und die Operatornorm sind ganz analog wie auf Hilberträumen definiert. Zwei Banachräume heißen *isomorph*, wenn es eine isometrische bijektive lineare Abbildung zwischen diesen gibt.

Wir beschränken uns hier wieder auf komplexe Vektorräume.

2.1. Beispiele

Wir sammeln hier einige wichtige Banachräume:

Beispiel 2.1.1.

- (i) L^p -Räume $(p \in [1, \infty))$ sind per Konstruktion Banachräume: $L^p(\mathbb{R}^n) = \overline{C_c^0(\mathbb{R}^n)}_{\|.\|_p}$ mit $\|c \in C_c^0(\mathbb{R}^n)\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |c|^p \mathrm{d}\mathrm{vol}\right)^{\frac{1}{p}}$, vgl. Appendix A.
- (ii) L^{∞} mit der Supremumsnorm $\|.\|_{\infty}$ ist ein Banachraum [7, S.20].
- (iii) Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen. $C^0(D) := \{c \colon D \to \mathbb{C} \text{ stetig } | \|c\|_{C^0} < \infty \}$ zusammen mit der Supremumsnorm $\|c\|_{C^0} := \|c\|_{\infty} := \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |c(x)|$ ist ein Banachraum, vgl. für den Fall $C^0([a,b])$ [3, Bsp. 3.3.3] allgemeiner Beweis ist analog.
 - $C^0(D)$ ist ein abgeschlossener Unterraum von $L^{\infty}(D)^*$.
- (iv) $C^k(D) := \{c : D \to \mathbb{C} \ k \text{mal stetig differenzierbar} \ | \ \|c\|_{C^k} < \infty\}^{\dagger}$ mit

$$||c||_{C^k} := \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq k} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^{\alpha}} f(x) \right|.$$

Für $C^1([a,b])$ siehe Beweisstrategie in [3, ÜA2], so geht auch der allgemeine Fall.

^{*}Das gilt sogar für alle $D \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue-messbar.

[†]Vgl. mit [4, Def. 2.2.7] – dort heißt $C^k(\mathbb{R}^n)$ allerdings $C_b^k(\mathbb{R}^n)$.

2. Banachräume

(v) Sei X ein normierter Raum und Y ein Banachraum. Dann ist $\mathcal{L}(X,Y)$ zusammen mit der Operatornorm (s. Beispiel 1.1.4.iv) ein Banachraum:

Sei A_i eine Cauchyfolge in $\mathcal{L}(X,Y)$. Dann ist nach Definition der Operatornorm A_ix für jedes $x \in X$ eine Cauchyfolge in Y. Setze $Ax := \lim_{i \to \infty} A_ix$ – existiert da Y vollständig ist.

A ist der Kandidat für den Grenzwert der A_i . Zunächst zeigen wir, dass $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ ist: Die Linearität von A ist klar. Wir zeigen als nächstes, dass A beschränkt ist: Es gilt nach der Dreiecksungleichung für Normen

$$|||A_i|| - ||A_i||| \le ||A_i - A_i||.$$

Also ist $(\|A_i\|)_i$ eine Cauchyfolge in \mathbb{R} . Der Grenzwert sei a. Dann folgt $\|Ax\|_Y = \lim_{i \to \infty} \|A_ix\|_Y \le \lim_{i \to \infty} \|A_i\|\|x\|_X \le a\|x\|_X$, also ist A beschränkt.

Es bleibt $\|A-A_i\| \to 0$ zu zeigen: Für alle $\epsilon>0$ gibt es ein i_0 , so dass $\|A_j-A_i\|<\epsilon$ für alle $i,j>i_0$. Dann ist

$$||Ax - A_i x||_Y = \lim_{j \to \infty} ||A_j x - A_i x||_Y \le \lim_{j \to \infty} ||A_j - A_i|| ||x||_X < \epsilon ||x||_X$$

und somit $||A - A_i|| \le \epsilon$.

Vorl. 4 (vi) (Folgenräume) Die Folgenräume

$$\ell_{\infty} := \left\{ (a_k)_{k \in \mathbb{N}} \mid \|(a_k)_k\|_{\infty} := \sup_{k} |a_k| < \infty \right\}$$

$$c_0 := \left\{ (a_k)_{k \in \mathbb{N}} \mid \lim_{k \to \infty} a_k = 0 \right\}$$

$$\ell_p := \left\{ (a_k)_{k \in \mathbb{N}} \mid \|(a_k)_k\|_p := \left(\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}$$

mit der gliedweisen Addition und skalaren Multiplikation und der Supremumsnorm $\|.\|_{\infty}$ für die Räume ℓ_{∞} und c_0 und der L^p -Norm $(1 \leq p < \infty)$ $\|.\|_p$ für ℓ_p sind Banachräume [7, S. 8-14].

(vii) Seien $(X_i, \|.\|_i)$, i = 1, 2, Banachräume. Dann ist $X_1 \oplus X_2$ mit

$$||(x,y)|| := ||x||_1 + ||y||_2$$

wieder ein Banachraum (bzw. wie die Hilbertraumversion).

!! Vergleich zur Hilbertraumversion aus Beispiel 1.1.2.v: Dort ist die Norm auf $H_1 \oplus H_2$ gegeben durch $\|(x,y)\| = \sqrt{\|x\|_1 + \|y\|_2}$ äquivalent zur obigen Norm. Der Unterschied ist, dass die von einem inneren Produkt kommt und damit $H_1 \oplus H_2$ wieder zu einem Hilbertraum macht. Für die obige Norm auf $X_1 \oplus X_2$ stimmt das nicht, selbst wenn die Normen auf X_i selbst von inneren Produkten kommen (Das sieht man, in dem man nachrechnet, dass die Parallelogrammidentität, S. 9, nicht gilt. !!

(viii) Sei X ein Banachraum und U ein linearer Unterraum von X. Dann ist U mit der induzierten Norm genau dann vollständig, wenn er abgeschlossen ist:

U ist mit der Norm von X wieder ein normierter Raum. Ist U vollständig, muss er automatisch abgeschlossen sein. Da eine Folge in U, die in X konvergiert, eine Cauchyfolge in U ist und damit dort schon konvergieren musste. Sei andererseits U abgeschlossen und x_i eine Cauchyfolge in U. Dann ist diese auch Cauchyfolge in X und muss dort gegen ein $X \in X$ konvergieren. Da U aber abgeschlossen was, muss schon $X \in U$ gelten. Also ist U vollständig.

Die analoge Aussage gilt auch für Hilberträume – gleicher Beweis.

(ix) Sei U ein abgeschlossener linearer Unterraum von einem Banachraum X. Dann ist X/U zusammen mit der Norm

$$||x + U|| := \inf_{u \in U} ||x + u||_X (= \operatorname{dist}(x, U))$$

wieder ein Banachraum: ÜA6

Ein wichtiges Kriterium zur Überprüfung von Vollständigkeit ist: (wird z.B. für (ii) von oben benutzt)

Lemma 2.1.2. Ein normierter Vektorraum $(X, \|.\|)$ ist genau dann vollständig, wenn für jede Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\sum_{k=0}^{\infty} \|x_k\| < \infty$ die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$ konvergiert.

Beweis.
$$\ddot{\text{U}}\text{A5}$$

2.2. Separabilität

Definition 2.2.1. Ein metrischer Raum heißt *separabel*, falls es eine abzählbare dichte Teilmenge gibt.

Wir müssen natürlich am Ende noch sehen, dass dieses 'separabel' mit dem Begriff 'separabel' für Hilberträume kompatibel ist. Zunächst überlegen wir uns:

Lemma 2.2.2. Für einen normierten Raum X sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (i) X ist separabel.
- (ii) Es gibt eine abzählbare Teilmenge $U \subset X$ mit $X = \overline{\operatorname{span} U}$.

Beweis. (i) \implies (ii) klar.

(ii) \implies (i) Da U abzählbar ist, sagen wir $U = \{u_1, u_2, \ldots\}$, ist auch

$$V = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i \mid n \in \mathbb{N}, \lambda_i \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \right\}$$

abzählbar. Da $\mathbb Q$ dicht in $\mathbb R$ und damit $\mathbb Q \times \mathbb Q \in \mathbb C$ liegt, liegt V dicht in span U. Also liegt V dicht in X.

2. Banachräume

Beispiel 2.2.3.

(i) ℓ_p , $1 \leq p < \infty$, ist separabel: Wähle $A := \{e_i \mid i \in \mathbb{N}\}$, wobei $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ mit 1 an der *i*.ten Stelle ist. Dann ist $\ell_p = \overline{\operatorname{span} A}^{\|.\|_{\ell_p}}$: Für $(a_i)_i \in \ell_p$ gilt

$$\|(a_i)_i - \sum_{k=0}^n a_i e_i\|_{\ell_p} = \|\sum_{k=n+1}^\infty a_i e_i\|_{\ell_p} = \left(\sum_{k=n+1}^\infty |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \to 0.$$

- (ii) c_0 ist separabel: Beweis analog zu (i).
- (iii) ℓ_{∞} sind nicht separabel: Für $M \subset \mathbb{N}$ sei χ_M definiert durch $\chi_M(n) = 1$ für $n \in M$ und Null sonst. Dann ist $Z = \{\chi_M \mid M \subset \mathbb{N}\} \subset \ell_{\infty}$ überabzählbar, [2, Satz 3.10.5], und $\|\chi_M \chi_{M'}\|_{\ell_{\infty}} = 1$ für alle $M \neq M'$. Sei $A \subset \ell_{\infty}$ abzählbar. Dann kann nach Dreiecksungleichung für jedes $x \in A$ die Menge $\{y \in \ell_{\infty} \mid \|x y\|_{\ell_{\infty}} < \frac{1}{4}\}$ höchstens ein $y \in Z$ enthalten. Somit kann A nicht dicht liegen.
- (iv) Sei (X,d) ein separabler metrischer Raum. Sei $A\subset X$ abgeschlossen. Dann ist (A,d) ebenfalls separabel:

Da X separabel ist, gibt es eine abzählbar dichte Teilmenge $B \subset X$. Sei $\epsilon > 0$. Dann gilt $\cup_{x \in B} B_{\epsilon}(x) = X$. Zu jedem $x \in B$ und jedem $n \in \mathbb{N}$ für welches $B_{\frac{1}{n}}(x) \cap A \neq \emptyset$, wähle ein Element in dieser Menge. Alle solch erhaltenen Elemente vereinigt bilden die Menge C. Diese ist noch immer abzählbar, da B und \mathbb{N} abzählbar sind. Dann gilt $\overline{C} = A$: Sei $x \in A \subset X$. Dann gibt es eine Folge $x_i \in B$ mit $x_i \to x$. Für n_0 gross genug, gibt es für alle $i \geq n_0$ ein $y_i \in C$ mit $d(x_i, y_i) < \frac{1}{i}$. Dann gilt

$$d(y_i, x) \le d(x_i, y_i) + d(x_i, x) \to 0.$$

(v) $L^{\infty}([0,1])$ und somit $L^{\infty}(\mathbb{R})$ sind nicht separabel:

Da wir $L^{\infty}([0,1])$ durch Nullfortsetzung als abgeschlossene Teilmenge von $L^{\infty}(\mathbb{R})$ auffassen können, reicht es nach letztem Punkt zu zeigen, dass $L^{\infty}([0,1])$ nicht separabel ist.

Wir betrachten

$$\Phi: \ell_{\infty} \to L^{\infty}([0,1]), (y_n)_{n \geqslant 0} \mapsto f,$$

mit $f(x) = y_k$ auf $x \in (\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}]$ und f(0) = 0. Dann ist Φ injektiv und es gilt $\|\Phi((y_n)_n)\|_{\infty} = \|(y_n)_n\|_{\ell_{\infty}}$. Also können wir ℓ_{∞} als Unterraum von $L^{\infty}([0,1])$ auffassen. Da ℓ_{∞} nicht separabel ist, ist auch $L^{\infty}([0,1])$ nicht separabel.

(vi) Andere separable Räume sind $C^k(\mathbb{R}^n)$, $L^p(\mathbb{R}^n)$ für $1 \leq p < \infty$.

Lemma 2.2.4. Ein Hilbertraum ist genau dann separabel, wenn er eine abzählbare Orthonormalbasis besitzt.

Das letzte Lemma impliziert insbesondere, dass jeder separable unendlich-dimensionale Hilbertraum isometrisch zum Hilbertraum ℓ_2 ist.

 $Beweis.\$ Falls der Hilbertraum eine abzählbare Orthonormalbasis besitzt, folgt separabel mit Lemma 2.2.2.

Falls der Hilbertraum H separabel ist, dann gibt es nach letztem Lemma eine abzählbare Teilmenge U mit $H = \overline{\text{span } A}$. Sei $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$. Dann führt man iterativ Gram-Schmidt auf A aus. Dabei bleibt der Span erhalten und man hat am Ende eine Orthonormalbasis.

2.3. Hahn-Banach

Als nächstes werden wir den Satz von Hahn-Banach, der in seiner Form auf normierten Räumen X, sicherstellt, dass X^* 'genügend' Elemente enthält, um bei vielen Existenzresultaten hilfreich zu sein. Er wird leider nur für separable normierte Räume konstruktiv sein, sonst benutzt es das Lemma von Zorn.

Wir beginnen mit einer Version noch ohne Norm:

Satz 2.3.1 (Hahn-Banach – lineare Algebraversion in reell). Sei X ein reeller Vektorraum und $p: X \to \mathbb{R}$ sublinear, d.h.

$$p(\lambda x) = \lambda p(x) \qquad \forall \lambda \geqslant 0, x \in X$$
$$p(x+y) \leqslant p(x) + p(y) \quad \forall x, y \in X$$

Sei $V \subset X$ ein linearer Unterraum und $\varphi \colon V \to \mathbb{R}$ linear mit $\varphi(v) \leqslant p(v)$ für alle $v \in V$. Dann gibt es eine lineare Abbildung $\psi \colon X \to \mathbb{R}$ mit $\psi|_V = \varphi$ und $\psi \leqslant p$ auf ganz X.

Für X separabel ist der folgende Beweis konstruktiv. Im Allgemeinen braucht man das Auswahlaxiom.

Beweis. Sei zunächst $X=V\oplus\mathbb{R}x$ für ein $x\notin V$. Dann muss wegen Linearität und $\psi|_V=\varphi$ die gesuchte Fortsetzung die Form $\psi(v+\alpha x)=\varphi(v)+\alpha s$ für ein geeignetes $s\in\mathbb{R}$ haben. Die noch fehlende Bedingung $\psi\leqslant p$ ist dann

$$p(v + \alpha x) \geqslant \varphi(v) + \alpha s$$

für alle $v \in V$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Für $\alpha = 0$ ist das unabhängig von s wahr. Sei nun $\alpha \neq 0$. Da V ein linearer Unterraum und φ linear ist, reicht es $\alpha \in \{\pm 1\}$ zu betrachten, da dann für alle $\beta > 0$

$$p(v \pm \beta x) = \beta p(\beta^{-1}v \pm x) \geqslant \varphi(v) \pm \beta s$$

folgt. Wir brauchen also für $s: p(v+x) - \varphi(v) \ge s \ge \varphi(v) - p(v-x)$ für alle $v \in V$.

Aus der Sublinearität von p und $\varphi \geqslant p|_V$ folgt für alle $v, w \in V$

$$p(v+x) + p(w-x) \ge p(v+w) \ge \varphi(v+w) = \varphi(v) + \varphi(w)$$

und damit

$$\inf_{v \in V} p(v+x) - \varphi(v) \geqslant \sup_{w \in V} \varphi(w) - p(w+x).$$

Hieraus folgt die Existenz des gesuchten s.

Vorl. 5 Sei nun X separabel und $X = V \oplus V^{\perp}$ für die Wahl eines Skalarproduktes auf X. Dann ist nach Beispiel 2.2.3.iv auch V^{\perp} separabel und es gibt eine abzählbare Teilmenge $A = \{x_1, x_2, \ldots\}$ die dicht in V^{\perp} ist. Wir führen iterativ obige Konstruktion zunächst für $X_1 := V \oplus \mathbb{R} x_1$ aus. Sei i_0 das kleinste i mit $x_i \notin X_1$. Dann obige Konstruktion für $X_2 := X_1 \oplus \mathbb{R} x_i$ und so weiter. Am Ende haben wir eine lineare Fortsetzung auf $\psi \colon V \oplus \overline{\operatorname{span}} \to \mathbb{R}$ mit den gesuchten Eigenschaften.

Ist X nicht unbedingt separabel, können wir das Zornsche Lemma verwenden: Sei C die Menge aller $(U, \psi \colon U \to \mathbb{R})$ mit $U \subset X$ linearer Unterraum mit $V \subset U$ und ψ linear, so dass $\psi|_V = \varphi$ und $\psi \leqslant p|_U$ gilt. Auf C definiert

$$(U_1,\psi_1)\leqslant (U_2,\psi_2)$$
genau dann, wenn $U_1\subset U_2$ und $\psi_2|_{U_1}=\psi_1$

eine partielle Ordnung*. Sei $C_1 \subset C$ eine total geordnete Teilmenge. Dann sieht man direkt, dass C_1 eine obere Schranke mit $U := \cup_{(U_i, \psi_i) \in C_1} U_i$ und $\psi : U \to \mathbb{R}, \ \psi|_{U_i} = \psi_i$ für alle $(U_i, \psi_i) \in C_1$ besitzt. Außerdem ist C nicht-leer, da $(V, \varphi) \in C$ ist. Nach Lemma von Zorn hat also C ein maximales Element (U, ψ) . Wäre $U \neq X$, dann könnten wir die Konstruktion vom Anfang auf ein $x \in X \setminus U$ und (U, ψ) anwenden und dies würde der Maximalität von (U, ψ) widersprechen.

Satz 2.3.2 (Hahn-Banach – lineare Algebraversion in komplex). Sei X ein komplexer Vektorraum und $p: X \to \mathbb{R}$ sublinear. Sei $V \subset X$ ein linearer Unterraum und $\varphi: V \to \mathbb{C}$ \mathbb{C} -linear mit $\operatorname{Re} \varphi(v) \leqslant p(v)$ für alle $v \in V$. Dann gibt es eine \mathbb{C} -lineare Abbildung $\psi: X \to \mathbb{C}$ mit $\psi|_V = \varphi$ und $\operatorname{Re} \psi \leqslant p$ auf ganz X.

Beweis. Betrachten wir X zunächst als reellen Vektorraum, gibt uns die reelle Version eine \mathbb{R} -lineare Abbildung $F\colon X\to\mathbb{R}$ mit $F|_V=\operatorname{Re}\varphi$ und $F\leqslant p$. Wir setzen $\psi(x)=F(x)-\mathrm{i}F(\mathrm{i}x)$. Dann ist $\operatorname{Re}\psi=F,\,\psi|_V=\varphi$ (da V komplexer Untervektorraum) und man kann nachrechnen, dass $\psi\colon X\to\mathbb{C}$ \mathbb{C} -linear ist: Es ist $\psi(\mathrm{i}x)=F(\mathrm{i}x)-\mathrm{i}F(\mathrm{i}\mathrm{i}x)=\mathrm{i}(F(x)-\mathrm{i}F(x))=\mathrm{i}\psi(x)$. Der Rest folgt mit der \mathbb{R} -Linearität von F.

Satz 2.3.3 (Hahn-Banach für lineare Funktionale). Sei X ein normierter reeller oder komplexer Vektorraum. Sei $V \subset X$ ein linearer Unterraum mit der induzierten Norm. Dann gibt es für alle $\varphi \in V^*$ ein $\psi \in X^*$ mit $\psi|_V = \varphi$ und $\|\psi\|_{X^*} = \|\varphi\|_{V^*}$

Beweis. Sei X zunächst ein reeller Vektorraum. Wir setzen $p(x \in X) = \|\varphi\|_{V^*} \|x\|_{X}$. Wegen der Eigenschaften ist dann p sublinear. Außerdem gilt $|\varphi(x)| \leq \|\varphi\|_{V^*} \|x\|_{X} = p(x)$ für alle $x \in V$. Nach Satz 2.3.1 erhalten wir eine \mathbb{R} -lineare Abbildung $\psi \colon X \to \mathbb{R}$ mit $\psi(x) \leq p(x)$ für alle $x \in X$. Wir haben sogar $|\psi(x)| \leq p(x) = \|\varphi\|_{V^*} \|x\|_{X}$, denn $-\psi(x) = \psi(-x) \leq p(-x) = p(x)$. Also folgt $\|\psi\|_{X^*} \leq \|\varphi\|_{V^*}$. Zusammen mit

$$\|\varphi\|_{V^*} = \sup_{x \in V \setminus \{0\}} \frac{|\varphi(x)|}{\|x\|_X} = \sup_{x \in V \setminus \{0\}} \frac{|\psi(x)|}{\|x\|_X} \leqslant \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{|\psi(x)|}{\|x\|_X} = \|\psi\|_{X^*}.$$

^{*}partielle Odnung: transitiv, reflexiv und antisymmetrisch

Zusammen ist demnach $\|\psi\|_{X^*} = \|\varphi\|_{V^*}$.

Sei nun X ein komplexer Vektorraum. Dann betrachten wir X zunächst wieder als reellen Vektorraum und definieren p wie oben und erhalten zunächst eine \mathbb{R} -lineare Fortsetzung, aus der wir wie im Beweis des letzten Satzes wieder eine \mathbb{C} -lineare Fortsetzung $\psi \in X^*$ mit $\|\operatorname{Re} \psi\|_{X^*} = \|\varphi\|_{V^*}$. Es bleibt $\|\operatorname{Re} \psi\|_{X^*} = \|\psi\|_{X^*}$ zu zeigen: Für $x \in X$ existiert ein $\lambda(x) \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda(x)| = 1$ und $\psi(x) = \lambda(x)|\psi(x)|$. Dann ist $|\psi(x)| = \lambda(x)^{-1}\psi(x) = \psi(\lambda(x)^{-1}x) = |\operatorname{Re} \psi(\lambda(x)^{-1}x)|$ und damit

$$\|\psi\|_{X^{*}} = \sup_{x \in X \backslash \{0\}} \frac{|\psi(x)|}{\|x\|_{X}} = \sup_{x \in X \backslash \{0\}} \frac{|\mathrm{Re}\,\psi(\lambda(x)^{-1}x)|}{\|\lambda(x)^{-1}x\|_{X}} \leqslant \|\mathrm{Re}\,\psi\|_{X^{*}}.$$

Die inverse Ungleichung folgt mit $|\text{Re }\psi| \leq |\psi|$.

Aus der letzten Folgerung ergibt sich umgehend:

Folgerung 2.3.4.

- (i) Sei X ein normierter Raum und $x \in X$, $x \neq 0$. Dann gibt es ein $\varphi \in X^*$ mit $\varphi(x) = 1$ und $\|\varphi\|_{X^*} = \|x\|_X^{-1}$.
- (ii) Sei X ein normierter Raum und $x \in X$. Dann ist x = 0 genau dann, wenn $\varphi(x) = 0$ für alle $\varphi \in X^*$.
- (iii) Sei X ein normierter Raum und $x_1, x_2 \in X$ mit $x_1 \neq x_2$. Dann gibt es $\varphi \in X^*$ mit $\varphi(x_1) \neq \varphi(x_2)$.
- Zu (iii) sagt man: X^* trennt die Punkte von X.

Beweis. (i) Sei $V = \operatorname{span}\{x\}$. Sei $\psi \in V^*$ definiert durch $\psi(x) = 1$. Dann ist $\|\psi\|_{V^*} = \|x\|_X^{-1}$. Nach letztem Satz gibt es ein $\varphi \in X^*$ mit $\|\varphi\|_{X^*} = \|x\|_X$.

- (ii) Folgt aus (i).
- (iii) Hahn-Banach angewendet auf $V = \text{span}\{x_1, x_2\}$ und $\varphi \in V^*$ definiert durch $\psi(x_1) = 1$ und $\psi(x_2) = -1$.

Folgerung 2.3.5. Sei X ein normierter Raum. Dann gilt

$$||x||_X = \sup_{\varphi \in X^* \setminus \{0\}} \frac{|\varphi(x)|}{||\varphi||_{X^*}}$$

Beweis. ÜA □

Folgerung 2.3.6. Sei X ein normierter Raum, U ein abgeschlossener linearer Unterraum, $x \in X \setminus U$. Dann gibt es ein $\varphi \in X^*$ mit $\varphi|_U = 0$ und $\varphi(x) = 1$.

Folgerung 2.3.7. Sei X ein normierter Raum und U ein linearer Unterraum. Dann liegt U genau dann in X dicht ist, wenn aus $\varphi|_U = 0$ für $\varphi \in X^*$ schon $\varphi = 0$ folgt.

Beweis.
$$\dot{\mathsf{U}}\mathsf{A}$$

2.4. Vergleich zu Hilberträumen

Einige Begriffe, die wir bei Hilberträumen kennengelernt haben, gelten auch noch für Banachräume – Operator und beschränkter Operator. Aber dadurch, dass i.A. die Norm nicht von einem inneren Produkt kommt, gehen manche Sachen nicht mehr:

2.4.1. Reflexivität

Für Hilberträume H folgt aus dem Riesztheorem 1.2.7, dass $H \to H^* \to H^{**}:=(H^*)^*$ als Hintereinanderausführung zweier antilinearer bijektiver normerhaltener Abbildungen ein Hilbertraumisomorphismus ist.

Für Banachräume X hat man i.A. immer noch eine kanonische Inklusion

$$J: X \to X^{**}:=(X^*)^*, x \mapsto (\varphi \in X^* \mapsto \varphi(x)).$$

Dies ist ein injektiver isometrischer Operator. Injektivität folgt, da aus J(x)=0 folgt, $\varphi(x)=0$ für alle x und damit x=0 nach Folgerung 2.3.4.ii. Isometrisch folgt mit:

$$|J(x)(\varphi \in X^*)| = |\varphi(x)| \le ||\varphi||_{X^*} ||x||_X$$

und damit $||J(x)||_{X^{**}} \leq ||x||_X$. Die umgekehrte Ungleichung folgt mit Folgerung 2.3.4.i – dort erhält man für $x \in X \setminus \{0\}$ ein $\varphi \in X^*$ mit $\varphi(x) = 1$ und $||\varphi||_{X_*} ||x||_X = 1$ und damit

$$||J(x)||_{X^{**}} \ge \frac{|\varphi(x)|}{||\varphi||_{X^*}} = ||x||_X.$$

I.A. ist aber J nicht surjektiv.

Definition 2.4.1. Ein Banachraum X heißt reflexiv, falls X^{**} als Banachraum isomorph zu X ist.

Lemma 2.4.2. Ein normierter Raum mit separablem Dualraum ist selbst separabel.

Vorl. 6 Beweis. Sei X der normierte Raum und X^* sei separabel. Nach Beispiel 2.2.3.iv ist dann $S_1^{X^*}(0) := \{ \varphi \in X^* \mid \|\varphi\|_{X^*} = 1 \}$ als Teilmenge wieder separabel. Damit gibt es $\{ \varphi_1, \varphi_2, \dots, \} \subset S_1^{X^*}(0)$, welche in $S_1^{X^*}(0)$ dicht liegt. Sei $x_i \in S_1^X(0) := \{ x \in X \mid \|x\|_X = 1 \}$ so gewählt, dass $|\varphi_i(x_i)| \ge \frac{1}{2}$ ist (möglich, da $\|\varphi\|_{X^*} = 1$). Wir zeigen, dass $A = \{x_1, x_2, \dots\}$ dicht in X ist: Dazu sei $\varphi \in X^*$ mit $\varphi|_A = 0$. Angenommen $\varphi \neq 0$. O.B.d.A. sei dann $\|\varphi\|_{X^*} = 1$. Da die φ_i in $S_1^{X^*}(0)$ dicht liegen, gibt es dann ein φ_k mit $\|\varphi - \varphi_k\|_{X^*} \le \frac{1}{4}$. Somit gilt:

$$\frac{1}{2} \leqslant |\varphi_k(x_k)| = |\varphi_k(x_k) - \varphi(x_k)| \leqslant \|\varphi - \varphi_k\|_{X^*} \|x_k\|_X \leqslant \frac{1}{4},$$

was den Widerspruch gibt. Also muss schon $\varphi \equiv 0$, damit nach Folgerung 2.3.7 span A dicht in X und somit nach Lemma 2.2.2 X separabel sein.

Beispiel 2.4.3.

(i) Sei $1 und <math display="inline">\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$ Die lineare Abbildung

$$\varphi \colon \ell_p \to (\ell_q)^*, \quad (x_n)_n \mapsto \left((y_n)_n \in \ell_q \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} x_n y_n \right)$$

ist ein isometrischer bijektiver Operator, also ein Banachraum isomorphismus:

Wohldefiniert folgt mit $\left|\sum_{n=0}^{\infty} x_n y_n\right| \leq \|(x_n)_n\|_{\ell_p} \|(y_n)_n\|_{\ell_q}$.

Injektivität folgt aus $\varphi((x_n)_n)(e_m) = x_m$ für alle m.

Surjektivität: Sei $\psi \in \ell_q^*$. Setze $x_n := \psi(e_n)$. Dann ist wegen

$$\|(x_n)_n\|_{\ell_p}^p = \sum_{k=0}^\infty |x_k|^p = \sum_{k, x_k \neq 0} x_k \frac{|x_k|^p}{x_k} = \sum_{k, x_k \neq 0} \psi(e_k) \frac{|x_k|^p}{x_k}$$

$$= \psi\left(\sum_{k, x_k \neq 0} \frac{|x_k|^p}{x_k} e_k\right) \leqslant \|\psi\|_{\ell_q^*} \left(\sum_{k=0}^\infty (|x^k|^{p-1})^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= \|\psi\|_{\ell_q^*} \|(x_k)_k\|_{\ell_p}^{\frac{p}{q}} < \infty$$

Also ist $(x_n)_n \in \ell_p$. Außerdem ist $\varphi((x_n)_n)(y_n)_n = \sum_{n=0}^{\infty} \psi(e_n)y_n = \psi((y_n)_n)$, wo der letzte Schritt benutzt, dass e_n eine Basis von ℓ_q ist. Also ist φ surjektiv.

Isometrie: Aus obigem folgt $\|(x_n)_n\|_{\ell_p} \leq \|\varphi((x_n)_n)\|_{\ell_q^*}$. Die andere Ungleichung folgt mittels Hölder:

$$\|\varphi((x_n)_n)\|_{\ell_q^*} = \sup_{(y_n)_n \in \ell_q} \frac{|\varphi((x_n)_n)(y_n)_n|}{\|(y_n)_n\|_{\ell_q}} \le \|(x_n)_n\|_{\ell_p}.$$

Somit haben wir gesehen, dass $(\ell_q)^*$ als Banachraum isomorph zu ℓ_p ist und damit das Bidual $(\ell_q)^{**}$ isomorph zu $(\ell_p)^*$ und damit zu ℓ_q ist. Also sind die ℓ_p für 1 .

(ii) Der Beweis aus (i) funktioniert auch für $p=\infty$ und q=1, also ist der Dualraum von ℓ_1 isomorph zu ℓ_∞ : Es geht alles genau so, nur bei der Surjektivität muss man noch nachrechnen, dass bei $\psi \in \ell_1^*$ und $x_n := \psi(e_n)$ wirklich $(x_n)_n \in \ell_\infty$ ist. Dazu ist

$$\|(x_n)_n\|_{\ell_\infty} = \sup_n |\psi(e_n)| \le \|\psi\|_{\ell_1^*} \sup_n |e_n| = \|\psi\|_{\ell_1^*}.$$

Allerdings kann der Dualraum von ℓ_{∞} nicht ℓ_1 sein, da ℓ_1 separabel ist, ℓ_{∞} nicht und es damit Lemma 2.4.2 widersprechen würde.

Der Dualraum von c_0 ist isomorph zu ℓ_1 , ÜA12. Also ist $(c_0)^{**}$ isomorph zu ℓ_{∞} .

2. Banachräume

- (iii) Der Dualraum von $L^p(\Omega \subset \mathbb{R}^n)$ für $1 ist <math>L^q(\Omega \subset \mathbb{R}^n)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ Lebesguemessbar und $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$, ÜA16. Also sind diese Räume reflexiv. Der Dualraum von L^1 ist L^{∞} , aber der Dualraum von L^{∞} ist größer als L^1 . Also sind L^1 und L^{∞} beide nicht reflexiv.
- (iv) Abgeschlossene Unterräume reflexiver Räume sind wieder reflexiv:

Beweis. Sei X reflexiv und $U \subset X$ abgeschlossen. Es ist zu zeigen, dass $J \colon U \to U^{**}$ surjektiv ist. Dazu sei $u'' \in U^{**}$. Wir setzen $\varphi \colon x' \in X^{*} \mapsto u''(x'|_{U}) \in \mathbb{C}$. Wegen

$$|\varphi(x') = u''(x'|_U)| \le ||u''||_{U^{**}} ||x'||_{U^{*}} \le ||u''||_{U^{**}} ||x'||_{X^{*}}$$

ist $\varphi \in X^{**}$. Da X reflexiv ist, gibt es ein $x \in X$ mit

$$x'(x) = \varphi(x') = u''(x'|_U)$$
 für alle $x' \in X^*$.

Es ist $x \in U$: Wäre $x \notin U$, dann gebe es nach Folgerung 2.3.6 ein $x' \in X^*$ mit $x'|_{U} = 0$ und x'(x) = 1, was der Wahl von x widerspricht.

Es bleibt u''(u') = u'(x) für alle $u' \in U^*$ zu zeigen: Dazu sei $u' \in U^*$. Dann gibt es ein $x' \in X^*$ mit $x'|_U = u'$. Daraus folgt $u''(u') = u''(x'|_U) = x'(x \in U) = u'(x)$.

2.4.2. Annihilatoren

Ein weiterer Unterschied zu Hilberträumen: Da i.A. die Norm nicht von einem inneren Produkt kommt, gibt es den Begriff von orthogonal bzw. orthogonalem Komplement so erst einmal nicht. Das fehlende orthogonale Komplement kann man aber in gewissem Sinne ersetzen. Statt diesem sind folgende Begriffe manchmal nützlich:

Annihilator von $U \subset X$

$$U^{\perp} := \{ x^* \in X^* \mid x^*(u) = 0 \ \forall u \in U \}$$

 $Pr\ddot{a}$ -Annihilator von $V \subset X^*$

$$V_{\perp} := \{ x \in X \mid v(x) = 0 \ \forall \ v \in V \}$$

 U^{\perp} und V_{\perp} sind jeweils lineare Unterräume von X^* bzw. X.

 $U^{\perp} \subset X$ und $V_{\perp} \subset X^*$ sind jeweils abgeschlossene linearer Unterräume.

Lemma 2.4.4. Sei X ein Banachraum und $V \subset X$ ein abgeschlossener linearer Unterraum. Dann ist

$$X^*/V^{\perp} \to V^*, \ \varphi + V^{\perp} \mapsto (v \mapsto \varphi(v))$$

als auch

$$(X/V)^* \to V^{\perp}, (\varphi \colon X/V \to \mathbb{C}) \mapsto (x \mapsto \varphi(x+V))$$

ein wohldefinierter Isomorphismus von Banachräumen ist.

Beweis. $\ddot{\text{U}}\text{A}14$

2.5. Noch ein bisschen Topologie auf metrischen/normierten Räumen

Wir sammeln noch ein paar 'topologischere' Resultate, diee wir in Zukunft öfter brauchen werden.

2.5.1. Zu normierten Räumen

Lemma 2.5.1 (Rieszsches Lemma). Sei $(X, \|.\|)$ ein normierter Raum. Sei $U \subset X$ ein abgeschlossener Unterraum mit $U \neq X$. Sei $\delta \in (0,1)$. Dann gibt es ein $x \in X$ mit $\|x\| = 1$ und $\|x - u\| \ge 1 - \delta$ für alle $u \in U$.

Beweis. Sei $y \in X \setminus U$. Da U abgeschlossen ist, ist $d(y,U) := \inf\{\|y-u\| \mid u \in U\} > 0$. Dann gibt es ein $u \in U$ mit $\|y-u\| < \frac{d(y,U)}{1-\delta}$. Wir setzen

$$x := \frac{y - u}{\|y - u\|}.$$

Dann ist ||x|| = 1 und für alle $v \in U$ gilt

$$||x - v|| = \frac{1}{||y - u||} ||y - (\underbrace{u + ||y - u||v}_{\in U})|| \ge \frac{d(y, U)}{||y - u||} > 1 - \delta.$$

Zum Kompaktheitsbegriff: Eine Teilmenge A eines metrischen Raumes X heißt (folgen-)kompakt, falls jede Folge in A eine in A konvergente Teilfolge besitzt. Für metrische Räume ist dies äquivalent zum Begriff überdeckungskompakt: Eine Teilmenge A eines metrischen Raumes heißt (überdeckungs-)kompakt, falls es jede offene Überdeckung von A eine endliche Teilüberdeckung besitzt, d.h für jede Familie $\{U_{\alpha}\}_{\alpha\in I}$ von offenen Teilmengen in X mit $A\subset \cup_{\alpha}U_{\alpha}$ eine endliche Teilmenge $\{i_1,\ldots,i_j\}\subset I$ mit $A\subset \cup_{k=1}^j U_{i_k}$ gibt, [3,].

Lemma 2.5.2. Der Abschluss des Einheitsballs $\overline{B_1(0)}$ in einem normierten Raum ist genau dann kompakt, wenn der Raum endlichdimensional ist.

Dass der Abschluss des Einheitsballs in ℓ_p nicht kompakt ist, sieht man z.B. direkt, indem man die Folge $(e_n)_n$ in ℓ_p betrachtet. Hier gilt $\|e_n\|_{\ell_p} = 1$. Würde eine Teilfolge von $(e_n)_n$ konvergieren, konvergiert auch die Teilfolge jedes Eintrages. D.h. wenn es konvergiert, dann gegen die Nullfolge. Doch $\|e_n - 0\|_{\ell_p} = 1$, was den Widerspruch gibt.

Beweis. Ist der Vektorraum endlich dimensional, also isomorph zu \mathbb{R}^n , dann folgt die Kompaktheit des Einheitsballs mittels Bolzano-Weierstrass.

Sei nun $\overline{B_1(0)} \subset V$ kompakt. Angenommen dim $X = \infty$. Dann erhalten wir mittels des Rieszschen Lemma 2.5.1 iterativ eine Folge e_i , $i \in \mathbb{N}$, in X mit $\|e_i\| = 1$ und $\|e_i - e_j\| \ge \frac{1}{2}$ für alle $i, j \in \mathbb{N}$ mit $i \ne j$ wie folgt: Sei e_1 mit $\|e_1\| = 1$. Sei nun e_i für alle

Vorl. 7- S. 101

Vorl. 8

 $1 \le i \le k$ mit obigen Eigenschaften gegeben. Das Rieszsche Lemma angewendet auf span $\{e_i \mid 1 \le i \le k\}$ gibt e_{k+1} mit den gesuchten Eigenschaften. Die beschränkte Folge e_i kann somit keine Cauchyteilfolge und damit keine konvergente Teilfolge besitzen. Also kann $\overline{B_1(0)}$ nicht kompakt sein.

2.5.2. Satz von Baire

Satz 2.5.3 (Satz von Baire). Sei (X,d) ein vollständiger metrischer Raum. Jede Vereinigung von abzählbar vielen abgeschlossenen Mengen ohne innere Punkte hat keinen inneren Punkt.

Beweis. Seien A_k , $k \in \mathbb{N}_{>0}$, abgeschlossene Mengen. Wir führen einen Widerspruchsbeweis und nehmen an alle A_k enthalten keine innere Punkte, aber $\cup_{k=1}^{\infty} A_k$ enthalte einen offenen Ball B_0 . Wir definieren nun induktiv für $k \geq 1$: Sei $r_k \in (0, \frac{1}{k})$ und $x_k \in X$ derart, dass $\overline{B_k} := \overline{B_{r_k}}(x_k) \subset B_{k-1} \setminus A_k$ gilt. Das ist möglich, da $B_{k-1} \setminus A_k$ offen und nichtleer ist. Somit gilt nun $d(x_k, x_\ell) < \frac{1}{k}$. Also ist x_k eine Cauchyfolge. Da X vollständig ist, konvergiert x_k gegen ein $x \in X$ mit $x \in \overline{B_k}$ und damit $x \notin A_k$ für alle k. Mit $x \in \overline{B_1} \subset B_0$ und der Wahl von B_0 ergibt sich der Widerspruch.

2.5.3. Gleichgradige Stetigkeit

Definition 2.5.4. Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume. Sei \mathcal{F} eine Familie von Funktionen von X nach Y. Die Familie \mathcal{F} heißt gleichgradig stetig, falls

$$\forall \epsilon > 0 \ \forall x \in X \ \exists \delta > 0 \ \forall f \in \mathcal{F} \ \forall x' \in X \ \text{mit} \ d_X(x, x') < \delta : \ d_Y(f(x), f(x')) < \epsilon.$$

Die Familie \mathcal{F} heißt gleichmäßig gleichgradig stetig, falls

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall f \in \mathcal{F} \ \forall x, x' \in X \ \text{mit} \ d_X(x, x') < \delta : \ d_Y(f(x), f(x')) < \epsilon.$$

Satz 2.5.5 (Arzela-Ascoli). Seien X ein kompakter metrischer Raum und Y ein Banachraum. Sei \mathcal{F} eine Familie stetiger Abbildungen von X nach Y (versehen mit der Supremumsnorm $||f||_{C^0} = \sup_{x \in X} ||f(x)||_Y$). Sei \mathcal{F} ist gleichgradig stetig für jedes $x \in X$ und für jedes $x \in X$ ist $\{f(x) \mid f \in \mathcal{F}\} \subset Y$ relativ kompakt*. Dann ist \mathcal{F} ist relativ kompakt in \mathcal{F} .

Beweis. Der kompakte metrische Raum X ist separabel: Es ist für alle $n \cup_{x \in X} B_{\frac{1}{n}}(x)$ eine offene Überdeckung von X und hat deswegen eine endliche Teilüberdeckung $\cup_{i=1}^{k(n)} B_{\frac{1}{n}}(x_{in})$. Dann ist $\{x_{in} \mid n \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq k(n)\}$ eine abzählbare dichte Teilmenge von X.

Sei nun f_n eine Folge in \mathcal{F} und sei $D = \{d_1, d_2, \ldots\}$ eine abzählbare dichte Teilmenge von X. Wir zeigen als nächstes, dass es eine Teilfolge von f_n gibt, die eingeschränkt auf D punktweise gegen ein $f: D \to Y$ konvergiert. Da $\{f(x) \mid f \in \mathcal{F}\}$ für jedes $x \in X$ relativ kompakt ist, hat $(f_n(d_1))_n$ eine konvergente Teilfolge f_{n_k} , Grenzwert heiße $f(d_1)$.

 $^{^*}A$ ist relativ kompakt in $X=\operatorname{der}$ Abschluss von A in X ist kompakt

Diese Teilfolge nennen wir auch wieder f_n . Dann hat auch $(f_{n_k}(d_2))_k$ eine konvergente Teilfolge, Grenzwert heiße $f(d_2)$ So erhalten wir iterativ die Funktion $f: D \to Y$, die punktweiser Grenzwert einer Teilfolge von $(f_n|_D)_n$ ist.

Diese Teilfolge nennen wir ab jetzt selbst wieder f_n und zeigen, dass dann $f_n \colon X \to Y$ sogar gleichmäßig auf ganz X konvergiert. Dann wäre \mathcal{F} relativ kompakt in Y und wir wären fertig: Dazu sei $\epsilon > 0$. Wir müssen zeigen, dass es ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$ für alle $n, m \ge N$ gibt.

Zunächst haben wir für jedes $d \in D$ ein N(d), so dass $|f_n(d) - f_m(d)| < \epsilon/5$ für alle $n, m \ge N(d)$ haben.

Aus der gleichgradigen Stetigkeit folgt: Für jedes $x \in X$ gibt es ein $\delta(x) > 0$, so dass $|f_n(x) - f_n(y)| < \epsilon/5$ für alle n und alle $y \in B_{\delta(x)}(x)$ gilt. Wegen Kompaktheit von X gibt es eine endliche Teilüberdeckung von $X = \bigcup_{x \in X} B_{\delta(x)}(x)$ – diese sei durch die Bälle um $\{x_1, \ldots, x_M\}$ gegeben. Da D dicht in X liegt, gibt es für alle i mit $1 \le i \le M$ ein $d_{k(i)} \in D \cap B_{\delta(x_i)}(x_i)$.

Sei nun $x \in X$. Dann gibt es ein i mit $x \in B_{\delta(x_i)}(x_i)$. Wir setzen $N := \max\{N(d_i) \mid 1 \le i \le M\}$ und erhalten für alle $m, n \ge N$:

$$|f_n(x) - f_m(x)| \le |f_n(x) - f_n(x_i)| + |f_n(x_i) - f_n(d_{k(i)})| + |f_n(d_{k(i)}) - f_m(d_{k(i)})| + |f_m(d_{k(i)}) - f_m(x_i)| + |f_m(x_i) - f_m(x)| < \epsilon \qquad \Box$$

Als Spezialfall erhalten wir:

Satz 2.5.6 (Satz von Ascoli). Sei f_n eine Folge gleichmäßig beschränkter, gleichgradig stetiger Funktionen auf [0,1]. Dann gibt es eine Teilfolge, die gleichmäßig auf [0,1] konvergiert.

Beweis. Wir setzen $\mathcal{F} = \{f_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset C^0([0,1])$. Da f_n gleichmäßig beschränkt ist, ist $\{f(x) \mid f \in \mathcal{F}\} \subset \mathbb{C}$ für jedes $x \in [0,1]$ beschränkt und damit als Teilmenge von \mathbb{C} relativ kompakt (Heine-Borel, [2, Satz 4.1.31]). Zusammen mit der gleichgradigen Stetigkeit können wir Arzela-Ascoli anwenden und erhälten, dass $(f_n)_n$ eine in $C^0([0,1])$ konvergente Teilfolge besitzt. Konvergenz in $C^0([0,1])$ ist genau gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen.

3. Beschränkte Operatoren

Ab sofort (wenn nicht anders dazu gesagt) sind X, Y immer Banachräume.

3.1. Beschränkheit und Stetigkeit

Die Beschränktheit eines Operators zwischen Banachräumen ist äquivalent zu seiner Stetigkeit. Dies gilt allgemein für lineare Abbildungen zwischen normierten Räumen:

Lemma 3.1.1 (Stetigkeit \equiv Beschränktheit). Seien $(X, \|.\|_X)$ und $(Y, \|.\|_Y)$ normierte Räume und sei $A: \text{dom } A = X \rightarrow Y$ linear. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (i) A ist beschränkt, also $||A|| < \infty$.
- (ii) A ist stetiq.
- (iii) A ist stetig in $0 \in X$.

Beweis. Aus (ii) folgt klarerweise (iii). Gelte nun (i). Dann folgt die Stetigkeit, also (ii), mit $||Ax - Ay||_Y = ||A(x - y)||_Y \le ||A|| ||x - y||_X$ (Das zeigt, dass A sogar Lipschitz ist).

Sei nun A in 0 stetig. Dann gibt es zu $\epsilon=1$ ein $\delta>0$, so dass $\|Ax-A0=Ax\|_Y\leqslant 1$ für alle $x\in X$ mit $\|x\|_X\leqslant \delta$ ist. Damit folgt für alle $x\in X$ mit $\|x\|_X=1$

$$||Ax||_Y = \frac{1}{\delta} ||A(\delta x)||_Y \leqslant \frac{1}{\delta}$$

und damit $||A|| \leq \frac{1}{\delta}$.

Auch bei Sequilinearformen auf normierten Räumen entspricht Beschränktheit Stetigkeit. Der Beweis ist sehr ähnlich.

Beispiel 3.1.2.

(i) Ein Operator $A \colon X \to Y$ mit dim $X < \infty$ ist automatisch beschränkt:

Es ist $X \cong \mathbb{C}^n$. Sei e_i eine Basis von X. Da X endlich dimensional ist, gibt es ein C > 0 mit $C \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |\alpha_i| \leqslant \|\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i\|_X$, nach ÜA4. Dann folgt

$$\begin{split} \|A\| &= \sup_{x = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i \in X \setminus \{0\}} \frac{\|\sum_{i=1}^n \alpha_i A e_i\|_Y}{\|\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i\|_X} \leqslant \sup_{x = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i \in X \setminus \{0\}} \frac{\sum_{i=1}^n |\alpha_i| \|A e_i\|_Y}{C \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |\alpha_i|} \\ &\leqslant \frac{n}{C} \max_{i=1,...,n} \|A e_i\|_Y < \infty. \end{split}$$

3. Beschränkte Operatoren

(ii) Ein Integraloperator ist ein Operator der Form

$$K \colon \varphi \mapsto \left(x \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} k(x, y) \varphi(y) d\text{vol}_y\right).$$

Die Funktion k auf $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ nennt man *Integralkern*. Ist φ komplexwertig, wird k auch komplexwertig sein. Allgemeiner könnte z.B. φ Werte in \mathbb{C}^m annehmen, dann würde k in komplexe $m \times m$ -Matrizen abbilden.

Sei hier nun $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ und $k \in L^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. Dann ist dank der Hölder-Ungleichung das Integral wohldefiniert, $K \colon L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$, und der Operator K ist beschränkt:

$$\begin{split} \|K\varphi\|_2 &= \left|\int_{\mathbb{R}^n} \left|\int_{\mathbb{R}^n} k(x,y)\varphi(y) \mathrm{d}\mathrm{vol}_y \right|^2 \right|^{\frac{1}{2}} \leqslant \left|\int_{\mathbb{R}^n} \|y \mapsto k(x,y)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \right|^{\frac{1}{2}} \|\varphi\|_2 \\ &\leqslant \|k\|_{L^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)} \|\varphi\|_2, \end{split}$$

wo wir im vorletzten Schritt Hölder auf das innere Integral und im letzten Schritt Fubini [4, Satz 1.7.1 und Satz 1.8.5] verwendet haben. Also ist $||K|| \leq ||k||_{L^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)}$.

(iii) Betrachten wir periodische Funktionen mit Periode 1 als Funktionen auf S^1 . Also sei $C^k(S^1)$ die Menge der 1-periodischen C^k -Funktionen auf \mathbb{R} zusammen mit der Norm $\|c\|_{C^k(S^1)}:=\|c|_{[0,1]}\|_{C^k}$. Das ist auch ein Banachraum. Wir betrachten

$$\partial_x \colon C^k(S^1) \to C^{k-1}(S^1).$$

Dieser Operator ist beschränkt.

Betrachten wir diesen Ableitungsoperator allerdings z.B. als Operator von $L^2(S^1)$ nach $L^2(S^1)$ mit Definitionsbereich $C^k(S^1)$. Dann ist der Operator unbeschränkt, vgl. auch ÜA3.

(iv) Seien X_1, X_2, Y_1, Y_2 Banachräume und $A_{ij} \in \mathcal{L}(X_i, Y_j)$. Dann ist

$$A := \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} : X_1 \oplus X_2 \to Y_1 \oplus Y_2$$

auch beschränkt.

(v) Sei $A \in \mathcal{L}(X,Y)$. Dann ist $\ker A \subset X$ abgeschlossen und damit $X/\ker A$ auch wieder ein Banachraum. Dann ist $x + \ker A \mapsto Ax$ ebenfalls beschränkt, ÜA11.ii.

Als wir Operatoren $A\colon X\to Y$ definiert haben, haben wir gesagt, dass der Definitionsraum i.A. nur ein linearer Unterraum von X sein wird. Für beschränkte Operatoren haben wir aber dom A=X gefordert. Das nächste Lemma sagt, dass bei dichtem Definitionsbereich Beschränktheit als Operator auf dem Definitionsbereich automatisch zu Beschränkheit auf X führt (nach stetiger Fortsetzung):

Vorl. 9

Lemma 3.1.3. Sei $D \subset X$ ein dichter linearer Unterraum und $A \in \mathcal{L}(D,Y)$. Dann gibt es genau dann eine stetige Fortsetzung $\tilde{A} \in \mathcal{L}(X,Y)$. Außerdem gilt $\|\tilde{A}\| = \|A\|$.

Beweis. Sei $x \in X$. Dann gibt es eine Folge $x_n \in D$ mit $x_n \to x$ in X. Insbesondere ist damit x_n eine Cauchyfolge in X. Aus der Beschränktheit von A folgt, dass dann Ax_n eine Cauchyfolge in Y ist und somit konvergiert. Wir setzen $\tilde{A}x = \lim_{n \to \infty} Ax_n$.

Wohldefiniertheit: Sei y_n eine weitere Folge in D mit $x_n \to x$. Dann konvergiert $x_n - y_n \to 0$ und damit $Ax_n - Ay_n \to 0$.

Fortsetzung von A: Für $x \in D$ wähle $x_n = x$.

Eindeutigkeit: Für jede stetige Fortsetzung muss $\tilde{A}x = \lim_{n\to\infty} Ax_n$ für $x_n \to x$ gelten.

Normgleichheit: $||A|| \leq ||\tilde{A}||$ folgt da $D \subset X$ und $\tilde{A}|_D = A$ ist. Die andere Ungleichung folgt, da aus obiger Konstruktion von \tilde{A} folgt: $||\tilde{A}x|| = \lim_{n \to \infty} ||Ax_n|| \leq ||A|| \lim_{n \to \infty} ||x_n|| = ||A|| ||x||$.

Die Hintereinanderausführung (sofern definiert) beschränkter Operatoren ist wieder beschränkt:

Lemma 3.1.4. Sei $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ und $B \in \mathcal{L}(Y,Z)$. Dann ist $BA \in \mathcal{L}(X,Z)$ mit $||BA|| \leq ||B|| ||A||$.

Beweis.

$$||BA|| = \sup_{\|x\|_X = 1} ||BAx||_Z = \sup_{\|x\|_X = 1, Ax \neq 0} ||Ax||_Y ||B\frac{Ax}{\|Ax\|_Y}||_Z$$

$$\leq \sup_{\|x\|_X = 1} ||Ax||_Y \sup_{\|y\|_Y = 1} ||By||_Z = ||A|| ||B||.$$

Oft wird es wichtig sein Informationen über das Bild eines Operators zu erhalten. Der nächste Satz gibt ein Kriterium für Surjektivität. Danach sehen wir erste Kriterien, wann das Bild zumindest abgeschlossen ist:

Satz 3.1.5 (Satz der offenen Abbildung). Ein beschränkter Operator zwischen zwei Banachräumen ist genau dann surjektiv, wenn er offen ist, d.h. er bildet offene Mengen auf offene Mengen ab.

Beweis. Sei $A \in \mathcal{L}(X,Y)$. Ist A offen, dann muss insbesondere das Bild von A in Y offen sein. Da das Bild aber immer ein linearer Unterraum von Y ist, muss es dann schon automatisch Y sein. Also ist A surjektiv.

Sei nun A surjektiv. Wegen Linearität reicht es die Aussage für offene Teilmengen um $0 \in X$ zu zeigen: $A(B_r(x)) = A(x) + A(B_r(0))$. Wir müssen also zeigen, dass $A(B_r(0))$ eine Umgebung von $0 \in Y$ ist. Da A linear ist, reicht es wegen Skalierung diese Aussage für ein r > 0 zu zeigen.

Wir zeigen als erstes, dass es ein $\delta > 0$ mit $B_{\delta}(0) \subset \overline{A(B_1(0))}$ gibt: Da A surjektiv ist, gilt $Y = \bigcup_{k=1}^{\infty} A(B_k(0)) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \overline{A(B_k(0))}$. Nach dem Satz 2.5.3 von Baire muss

3. Beschränkte Operatoren

mindestens ein $\overline{A(B_k(0))}$ einen inneren Punkt enthalten. Also gibt es ein $k \in \mathbb{N}$, $\epsilon > 0$ und ein $y_0 \in Y$ mit $B_{\epsilon}(y_0) \subset \overline{A(B_k(0))}$.

Sei nun $z \in B_{\epsilon}(0)$. Dann gibt es eine Folge $x_j \in B_k(0)$ mit $A(x_j) \to y_0 + z \in B_{\epsilon}(y_0)$ und eine Folge $w_j \in B_k(0)$ mit $A(w_j) \to y_0$. Dann ist $\frac{x_j - w_j}{2k} \in B_1(0)$ und somit

$$A\left(\frac{x_j - w_j}{2k}\right) = \frac{1}{2k} \left(A(x_j) - A(w_j)\right) \to \frac{z}{2k}$$
 für $j \to \infty$.

Daraus folgt $B_{\frac{\epsilon}{2k}}(0) \subset \overline{A(B_1(0))}$. Die Behauptung ist also für $\delta = \frac{\epsilon}{2k}$ erfüllt.

Da A linear ist, liefert Skalierung: $B_{\frac{\delta}{2^\ell}}(0) \subset \overline{A(B_{\frac{1}{2^\ell}}(0))}$. Damit gibt es für jedes $z \in B_{\frac{\delta}{2^\ell}}(0)$ ein $\|x\| < \frac{1}{2^\ell}$ mit $\|z - Ax\| < \frac{\delta}{2^{\ell+1}}$. Wir verwenden dies induktiv und starten mit $z = y \in B_\delta(0)$ und erhalten ein $x_0 \in B_1(0)$ mit $\|y - Ax_0\| < \frac{\delta}{2}$. Im $\ell + 1$.ten Schritt verwenden wir $z = y - \sum_{j=0}^\ell Ax_j \in B_{\frac{\delta}{2^\ell}}(0)$ und erhalten ein $x_{\ell+1}$ mit $\|x_{\ell+1}\| < \frac{1}{2^{\ell+1}}$ mit $\|z - \sum_{j=0}^{\ell+1} Ax_j\| < \frac{\delta}{2^{\ell+2}}$. Also ist $z = \sum_{j=0}^\infty Ax_\ell$ und $\sum_{j=0} \|x_\ell\| \le 2$. Da X vollständig ist, folgt aus Lemma 2.1.2, dass $\sum_{j=0}^\infty x_\ell$ konvergiert. Der Grenzwert sei x. Dann ist $x \in \overline{B_2(0)} \subset B_3(0)$ und y = Ax. Also ist $B_\delta(0) \subset AB_3(0)$

Lemma 3.1.6. Sei $A \in \mathcal{L}(X,Y)$.

(i) A hat genau dann abgeschlossenes Bild, wenn es ein c > 0 mit

$$||Ax||_Y \geqslant c \inf_{v \in \ker A} ||x + v||_X.$$

(ii) Hat A endlich dimensionalen Kokern coker A := Y/Bild A, dann ist $Bild A \subset Y$ abgeschlossen.

Beweis. (i) ÜA11

(ii) Seien $y_1, \ldots, y_n \in Y$ derart, dass $y_i + \text{Bild } A$ eine Basis von coker A ist. Wir definieren den Operator

$$\tilde{A}: X \oplus \mathbb{C}^n \mapsto Y, (x, \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)) \mapsto Ax + \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i.$$

Es ist $\tilde{A} \in \mathcal{L}(X \oplus \mathbb{C}^n, Y)$. Nach Konstruktion ist \tilde{A} surjektiv (und hat damit insbesondere abgeschlossenes Bild) und es gilt ker $\tilde{A} = \ker A \times \{0\}$. Nach (i) gibt es somit ein c > 0 mit

$$\|\tilde{A}(x,\lambda)\|_{Y} \ge c \inf_{v \in \ker A} (\|x+v\|_{X} + \|\lambda\|_{\mathbb{C}^{n}})$$

für alle $x \in X$ und $\lambda \in \mathbb{C}^n$. Für $\lambda = 0$ ergibt sich

$$||Ax||_Y \geqslant c \inf_{v \in \ker A} ||x + v||_X$$

und damit nach (i), dass Bild A abgeschlossen ist.

3.2. Inverse

Ein beschränkter Operator heißt invertierbar, wenn er bijektiv ist.

Satz 3.2.1 (Satz der beschränkten Inversen). Die Inverse eines beschränkten bijektiven Operator A zwischen zwei Banachräumen ist ein beschränkter Operator mit $||A^{-1}|| \ge ||A||^{-1}$.

Beweis. Dass A^{-1} selbst wieder linear ist, folgt direkt aus $A(A^{-1}(x) + \lambda A^{-1}(y)) = x + \lambda y$ für alle $x, y \in X$ und $\lambda \in \mathbb{C}$.

Da A beschränkt und surjektiv ist, bildet A nach Satz 3.1.5 der offenen Abbildung offene Teilmengen auf offene Teilmengen ab. Also ist A^{-1} stetig und damit nach Lemma 3.1.1 beschränkt.

Mit Id =
$$A \cdot A^{-1}$$
 und Lemma 3.1.4 folgt $||A||^{-1} \le ||A^{-1}||$.

I.A. gilt nicht Gleichheit in der Normungleichung: Z.B. A = diag(1,2). Hier ist ||A|| = 2 und $||A^{-1}|| = 1$.

Aus obigen Satz folgt, dass für einen invertierbaren Operator $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ folgt, dass es ein c > 0 (das größtmögliche wäre $||A^{-1}||^{-1}$) mit

$$||Ax|| \geqslant c||x|| \quad \forall x \in X$$

gibt. In folgenden Sinne gilt auch die Umkehrung:

Lemma 3.2.2. Sei $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ derart, dass $||Ax|| \ge c||x||$ für ein c > 0 und alle $x \in X$ gilt. Dann ist Bild A abgeschlossen und A als Operator von X nach Bild A invertierbar mit $||A^{-1}|| \le c^{-1}$.

Beweis. Aus $||Ax|| \ge c||x||$ folgt direkt, dass A injektiv ist. Nach Lemmea 3.1.6 hat A abgeschlossenes Bild. Also ist $A \colon X \to \operatorname{Bild} A$ bijektive Abbildung zwischen Banachräumen und damit invertierbar.

Folgerung 3.2.3. Invertierbarkeit ist auf $\mathcal{L}(X,Y)$ eine offene Eigenschaft, d.h.: Sei $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ invertierbar. Dann gibt es ein $\epsilon > 0$, so dass alle $B \in \mathcal{L}(X,Y)$ mit $\|B - A\| < \epsilon$ invertierbar sind.

Beweis. Da A invertierbar ist, gibt es ein c > 0 mit $||Ax|| \ge c||x||$ für alle $x \in X$. Sei $\epsilon \in (0,c)$. Dann gilt für alle $B \colon \mathcal{L}(X,Y)$ mit $||B-A|| < \epsilon$:

$$||Bx|| \ge ||Ax|| - ||(B-A)x|| \ge c||x|| - ||B-A|| \, ||x|| \ge (c-\epsilon)||x||.$$

Nach letztem Lemma ist somit $B: X \to \text{Bild } B$ invertierbar.

Es bleibt zu zeigen, dass für ϵ klein genug schon Bild B=Y gilt: Nach Lemma 3.1.6.ii und obiger Abschätzung ist Bild $B\subset Y$ abgeschlossen. Angenommen Bild $B\neq Y$. Dann wäre $Y\backslash \text{Bild }B$ offen und nichtleer. Dann gibt es $\delta>0$ und $z\in Y$ mit $B_{\delta}(z)\subset Y\backslash \text{Bild }B$. Sei $x\in X$ mit Ax=z. Dann ist $\|Bx-z\|=\|(B-A)x\|\leqslant \epsilon\|x\|$. Für $\epsilon<\delta$ ist dies ein Widerspruch zu $B_{\delta}(z)\subset Y\backslash \text{Bild }B$.

Sei nun $A^n := A \circ A \circ ... \circ A$ mit n Faktoren für n > 0 und $A^0 = Id$.

Satz 3.2.4. Sei $A \in \mathcal{L}(X)$. Konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} A^n$ in $\mathcal{L}(X)$, dann ist $\mathrm{Id} - A$ invertierbar mit Inversem

$$(\mathrm{Id} - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n.$$

Falls zusätzlich ||A|| < 1 ist, gilt $||(Id - A)^{-1}|| \le (1 - ||A||)^{-1}$.

Hier wird $\sum_{n=0}^{\infty} A^n$ Neumann-Reihe genannt.

Beweis. Mittels einer Teleskopsumme sehen wir

$$(\mathrm{Id} - A) \sum_{n=0}^{m} A^n = \sum_{n=0}^{m} A^n (\mathrm{Id} - A) = \mathrm{Id} - A^{m+1}.$$

Da $\sum_{n=0}^{\infty} A^n$ konvergiert, muss $||A^n|| \to 0$ für $n \to \infty$ sein. Damit folgt

$$Id = \lim_{m \to \infty} (Id - A^{m+1}) = (Id - A) \lim_{m \to \infty} \sum_{n=0}^{m} A^n = (Id - A) \sum_{n=0}^{\infty} A^n$$

und analog Id = $\sum_{n=0}^{\infty} A^n (\text{Id} - A)$. Somit ist $(\text{Id} - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n$.

Ist ||A|| < 1, dann ist

$$\|(\operatorname{Id} - A)^{-1}\| \le \sum_{n=0}^{\infty} \|A^n\| \stackrel{\text{Lem. 3.1.4}}{\le} \sum_{n=0}^{\infty} \|A\|^n = (1 - \|A\|)^{-1}.$$

3.3. Der Adjungierte eines beschränkten Operators

Vorl. 10 Wie es in der linearen Algebra den Begriff der dualen Abbildung gibt, gibt es in diesem Sinne auch die duale Abbildung zu einem (beschränkten) Operator – das heißt dann Adjungierte:

Definition 3.3.1. Sei $A \in \mathcal{L}(X,Y)$. Der Operator $A' \colon Y^* \to X^*$ definiert durch (A'y)(x) := y(Ax) für alle $x \in X$ und $y \in Y^*$ heißt $der\ zu\ A\ adjungierte\ Operator$.

Sind H_1 und H_2 Hilberträume und $A \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. Dann ist der (im Hilbertraumsinne) adjungierte Operator $A^* \colon H_2 \to H_1$ definiert durch:

$$\langle Ax, y \rangle_{H_2} = \langle x, A^*y \rangle_{H_1} \quad \forall x \in H_1, y \in H_2.$$

Diese Definition gilt so erst einmal wirklich <u>nur für beschränkte Operatoren</u>. Allgemein ist diese Definition komplizierter, kommt später.

Man überprüft direkt die Linearität von A' bzw. A^* – es ist also wirklich ein Operator. Außerdem ist A' selbst wieder beschränkt mit ||A'|| = ||A||, ÜA21,

Die Abbildung $A \in \mathcal{L}(X,Y) \mapsto A' \in \mathcal{L}(Y^*,X^*)$ ist linear, die Abbildung $A \in \mathcal{L}(H_1,H_2) \mapsto A^* \in \mathcal{L}(H_2,H_1)$ hingegen antilinear.

Beispiel 3.3.2. Sei $f \in L^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ und $M_f : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \mapsto f\varphi$, $1 . Wegen <math>||f\varphi||_p \le ||f||_{\infty} ||\varphi||_p$ ist der Multiplikationsoperator M_f beschränkt. Dann ist

$$(M_f)'(\alpha' \in (L^p)^*)(\varphi \in L^p) = \alpha(f\varphi).$$

Identifizieren wir $\psi \in L^q \mapsto (\alpha \colon \varphi \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} \varphi \psi dvol) \in (L^p)^*$ für $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, wie in ÜA16, dann ist $(M_f)'(\psi \in L^q) = f\psi$.

Im Fall p=2 können wir auch die Adjungierte im Hilbertraumsinne berechnen: Für $\varphi,\psi\in L^2(\mathbb{R}^n)$

$$(M_f \varphi, \psi)_{L^2} = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{f \varphi} \psi \operatorname{dvol} = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\varphi}(\overline{f} \psi) \operatorname{dvol} = (\varphi, \overline{f} \psi)_{L^2},$$

also ist $(M_f)'(\psi) = \overline{f}\psi$, vgl. auch Lemma 3.3.8.

Zweimal Adjungieren gibt im Prinzip den Operator A wieder zurück – modulo dessen, dass die Banachräume nicht reflexiv sein müssen:

Lemma 3.3.3. Sei $A \in \mathcal{L}(X,Y)$. Seien $J_X \colon X \to X^{**}$ und $J_Y \colon Y \to Y^{**}$ die kanonischen Inklusionen aus Abschnitt 2.4.1. Dann gilt $A'' \circ J_X = J_Y \circ A$.

Beweis.
$$A'' \circ J_X(x)(\psi \in Y^*) = J_X(x)(A'\psi) = (A'\psi)(x) = \psi(Ax) = J_Y(Ax)(\psi)$$
.

Lemma 3.3.4. Sei $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ und $B \in \mathcal{L}(Y,Z)$. Dann ist (BA)' = A'B'

Beweis. Für
$$z' \in Z^*$$
 und $x \in X$ gilt $((BA)'z')(x) = z'(B(A(x))) = (B'z')(Ax) = (A'B'z')(x)$.

Kommen wir nun wieder zur Frage, wann der Operator abgeschlossenes Bild hat. Dazu zunächst:

Lemma 3.3.5. Sei $A \in \mathcal{L}(X,Y)$. Dann gilt $\overline{\text{Bild } A} = (\ker A')_{\perp}$ und $\overline{\text{Bild } A'} = (\ker A)^{\perp}$.

Beweis. Sei $y \in \overline{\text{Bild } A}$. Falls $y \in \text{Bild } A$ war, gibt es ein $z \in X$ mit y = Az. Dann ist x'(y) = x'(Az) = (A'x')(z) = 0 für alle $x' \in \ker A'$ und damit $y \in (\ker A')_{\perp}$.

Sei nun $y \in \overline{\text{Bild } A}$. Dann gibt es eine Folge $y_i \in \text{Bild } A$ mit $y_i \to y$. Aus obigen Überlegungen folgt $y_i \in (\ker A')_{\perp}$. Für $x' \in \ker A'$ ist somit $x'(y_i) = 0 \to x(y)$. Also ist $y \in (\ker A')_{\perp}$. Somit ist $\overline{\text{Bild } A} \subset (\ker A')_{\perp}$.

Sei nun $y \notin \overline{\operatorname{Bild} A}$. Dann gibt es nach Hahn-Banach ein $\varphi \in Y^*$ mit $\varphi(y) = 1$ und $\varphi|_{\overline{\operatorname{Bild} A}} = 0$. Doch dann ist $(A'\varphi)(x) = \varphi(Ax) = 0$ für alle $x \in X$ und somit $\varphi \in \ker A'$. Doch dann muss $y \notin (\ker A')_{\perp}$ sein, was $\overline{\operatorname{Bild} A} \subset (\ker A')_{\perp}$ impliziert.

$$\overline{\text{Bild } A'} = (\ker A)^{\perp} \text{ wird ganz analog gezeigt.}$$

Lemma 3.3.6. Sei $A \in \mathcal{L}(X,Y)$. Dann ist A genau dann invertierbar, wenn A' invertierbar ist.

Beweis. Sei A invertierbar. Dann gilt $AA^{-1} = \text{Id}$ und damit nach Lemma 3.3.4 $(A^{-1})'A' = \text{Id}' = \text{Id}$. Analog folgt aus $A^{-1}A = \text{Id}$ dann $A'(A^{-1})' = \text{Id}$. Also ist A' invertierbar mit Inverser $(A^{-1})'$.

Sei A' invertierbar. Da A' injektiv ist, muss $\overline{\text{Bild }A} = Y$ sein. Wegen der Surjektivität von A' ist A' nach Satz 3.1.5 offen. Also gibt es ein c > 0 mit $B_c^{X*}(0) \subset A'B_1^{Y*}(0)$. Dann gilt

$$||Ax||_{Y} \stackrel{\text{ÜA }13(i)}{=} \sup_{\|\varphi\|_{Y^{*}}=1} |\varphi(Ax)| = \sup_{\|\varphi\|_{Y^{*}}=1} |(A'\varphi)(x)|$$

$$\stackrel{B_{c}^{X^{*}}(0)\subset A'B_{1}^{Y^{*}}(0)}{\geqslant} \sup_{x'\in B_{c}^{X^{*}}(0)} |x'(x)| = c||x||.$$

Nach Lemma 3.2.2 ist dann Bild A abgeschlossen und A injektiv. Also ist Bild A = Y und A insgesamt bijektiv.

Satz 3.3.7 (Satz vom abgeschlossenen Bild). Sei $A \in \mathcal{L}(X,Y)$. Dann Bild $A \subset Y$ genau dann abgeschlossen, wenn Bild $A' \subset X^*$ abgeschlossen ist.

Beweis. Sei zunächst Bild A abgeschlossen. Wir werden zeigen, dass $(\ker A)^{\perp} \subset \operatorname{Bild} A'$ ist, woraus mit Lemma 3.3.5 folgt, dass Bild A' abgeschlossen ist. Dazu sei $\alpha \in (\ker A)^{\perp} \subset X^*$. Wir definieren $\varphi \colon \operatorname{Bild} A \to \mathbb{C}, y \mapsto \alpha(x)$ für ein $x \in X$ mit Ax = y. Dies ist eine wohldefinierte Abbildung, da mindestens ein x existieren muss, da $y \in \operatorname{Bild} A$ ist und da aus $Ax_1 = Ax_2 = y, x_1 - x_2 \in \ker A$ und damit $\alpha(x_1 - x_2) = 0$ folgt.

 φ ist beschränkt: Es ist $|\varphi(y)| = |\alpha(x)| \leq ||\alpha||_{X^*} ||x||_X$ und damit

$$|\varphi(y)| \leq \|\alpha\|_{X^*} \inf_{v \in \ker^A} \|x + v\|_X.$$

Da BildAabgeschlossen ist, folgt mit Lemma 3.1.6, dass es ein ${\cal C}>0$ mit

$$|\varphi(y)| \leqslant C \|\alpha\|_{X^*} \|Ax = y\|_Y$$

und damit φ beschränkt ist.

Sei nun $\psi \in Y^*$ eine Fortsetzung von φ (existiert nach Hahn-Banach). Dann gilt für alle $x \in X$

$$\alpha(x) = \varphi(Ax) = \psi(Ax) = (A'\psi)(x)$$

und somit $\alpha \in \text{Bild } A'$.

Sei nun Bild A' abgeschlossen und $Z:=\overline{\text{Bild }A}\subset Y$ (Z also ein Banachraum). Sei

$$C: X \to Z, Cx := Ax.$$

Es ist Bild $(C': Z^* \to X^*)$ = Bild $(A': Y^* \to X^*)$: Dies folgt mit $(A'y')(x) = y'(Ax) = y'(Cx) = y'|_Z(Cx) = C'(y'|_Zx)$ und Hahn-Banach (wonach jedes Element in Z^* als ein $y'|_Z$ mit $y' \in Y^*$ darstellbar ist).

Damit ist Bild $C' \subset X^*$ abgeschlossen. Nach Konstruktion hat C dichtes Bild, also ist nach (i) $(\ker C')_{\perp} = Z$. Dann ist nach Folgerung 2.3.4.ii $\ker C' = \{0\}$ und damit ist $C' \colon Z^* \to \operatorname{Bild} C'$ injektiv und somit invertierbar. Nach letztem Lemma ist dann aber auch C invertierbar. Insbesondere ist damit $\operatorname{Bild} C = \overline{\operatorname{Bild}} C$ und somit $\operatorname{Bild} A$ abgeschlossen.

Zur Hilbertraumadjungierten Seien H_1, H_2, H Hilberträume.

Lemma 3.3.8. Sei $A \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. Seien $\Phi_i : H_i \to H_i^*$ die kanonisch antilinearen isometrischen Isomorphismen aus Satz 1.2.7. Dann gilt:

(i)
$$A^* = \Phi_1^{-1} A' \Phi_2$$
 und $||A^*|| = ||A'|| = ||A||$

(ii)
$$(A^*)^* = A$$

(iii)
$$||A^*A|| = ||AA^*|| = ||A||^2$$

Beweis. (i) Für $x \in H_2$ und $z \in H_1$ haben wir

$$A'(\Phi_2(x))(z) \stackrel{\mathrm{Def.}}{=} {}^{A'} \Phi_2(x)(Az) \stackrel{\mathrm{Def.}}{=} {}^{\Phi_2} \langle x, Az \rangle \stackrel{\mathrm{Def.}}{=} {}^{A^*} \langle A^*x, z \rangle \stackrel{\mathrm{Def.}}{=} {}^{\Phi_1} \Phi_1(A^*x)(z).$$

Die Normgleichheit von A' und A^* folgt, da die Φ_i Isometrien sind und ||A'|| = ||A|| gilt.

- (ii) Folgt aus $\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^*y \rangle = \langle (A^*)^*x, y \rangle$ für alle $x \in H_1$ und $y \in H_2$.
- (iv) Es ist $||Ax||^2 = \langle x, A^*Ax \rangle \leqslant ||x|| \, ||A^*Ax||$ und damit

$$\|A\|^2 \leqslant \|A^*A\| \overset{\text{Lem. } 3.1.4}{\leqslant} \|A^*\| \|A\| \overset{(i)}{=} \|A\|^2.$$

Also ist $||A^*A|| = ||A||^2$. Die Gleichheit mit $||AA^*||$ folgt, indem man A durch A^* ersetzt.

Definition 3.3.9. Sei $A \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$

- (i) A heißt unitär, falls A invertierbar mit $A^{-1} = A^*$ ist.
- (ii) Sei $H_1 = H_2$. Dann heißt A selbstadjungiert, falls $A = A^*$ ist.
- (iii) Sei $H_1 = H_2$. Dann heißt A normal, falls $AA^* = A^*A$ ist.

Das unitär hier ist das gleiche wie in Definition 1.1.5, vgl. ÜA24. Dort heißt ein lineares $U \colon H_1 \to H_2$ unitär, wenn U surjektiv mit $\langle Ux, Uy \rangle_{H_2} = \langle x, y \rangle_{H_1}$ für alle $x, y \in H_1$ ist.

Unitäre Operatoren mit $H_1 = H_2$ und selbstadjungierte Operatoren sind normal.

3.4. Kompakte Operatoren

Vorl. 11 Definition 3.4.1. Ein Operator $K \in \mathcal{L}(X,Y)$ heißt kompakt, falls die Folge $(Kx_i)_{i \in \mathbb{N}}$ für jede beschränkte Folge $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge besitzt. Die Menge der kompakten Operatoren von X nach Y bezeichnen wir mit $\mathcal{K}(X,Y)$.

Beispiel 3.4.2.

(i) Sei A: dom $A = X \to Y$ ein Operator mit dim $X < \infty$. Dann ist A kompakt:

Nach Beispiel 3.1.2.i ist A beschränkt und damit nach Lemma 3.1.1 stetig. Sei x_i eine beschränkte Folge in X. O.B.d.A. sei $\|x_i\|_X=1$. Dann gibt es nach Lemma 2.5.2 eine konvergente Teilfolge x_{i_k} . Wegen der Stetigkeit von A konvergiert dann auch Ax_{i_k} . Also ist A kompakt.

(ii) Sei $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ mit dim Bild $A < \infty$. Dann ist A kompakt:

Wegen dim Bild $A < \infty$, ist Bild A ein endlich dimensionaler normierter Vektorraum. Sei x_i eine beschränkte Folge in X. Da A beschränkt ist, ist Ax_i eine beschränkte Folge. Wegen Bolzano-Weierstrass und da auf endlich dimensionalen Vektorräumen alle Normen äquivalent sind, folgt, dass Ax_i eine konvergente Teilfolge besitzt. Also ist A kompakt.

Solche Operatoren heißen Operatoren endlichen Ranges.

(iii) Die Identität Id: $X \to X$ auf einem Banachraum X ist genau dann kompakt, wenn X endlich dimensional ist:

Die Identität ist immer beschränkt. Ist X endlich dimensional, folgt Kompaktheit aus (i). Sei nun Id kompakt. Wäre X nicht endlich dimensional, dann ist nach Lemma $2.5.2 \ \overline{B_1(0)}$ nicht kompakt. Also gibt es eine beschränkte Teilfolge in X, die keine konvergente Teilfolge hat, was den Widerspruch zur Kompaktheit der Identität gibt.

(iv) Sei $\overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Lebesgue-messbare Menge. Dann sind Integraloperatoren auf $C^0(\overline{\Omega})$ mit stetigem Kern $k \in C^0(\overline{\Omega}^2)$ sind kompakt:

Sei $(K\varphi)(x):=\int_{\overline{\Omega}}k(x,y)\varphi(y)\mathrm{dvol}_y$. Dann ist $K\colon C^0(\overline{\Omega})\to C^0(\overline{\Omega})$ beschränkt. Sei φ_i eine durch C>0 beschränkte Folge in $C^0(\overline{\Omega})$. Dak stetig auf der kompakten Menge $\overline{\Omega}^2$ ist, ist k gleichmäßig stetig. Damit gibt es für jedes $\epsilon>0$ ein $\delta>0$, so dass $|k(x,y)-k(x',y)|<\epsilon$ für alle $x,x',y\in\overline{\Omega}$ mit $|x-x'|<\delta$ gilt. Damit folgt

$$|(K\varphi_i)(x) - (K\varphi_i)(x')| < \epsilon \operatorname{vol}(\bar{\Omega}) \|\varphi_i\|_{C^0} \le C\epsilon.$$

Also ist $\{K\varphi_i\}$ gleichmäßig gleichgradig stetig. Nach dem Satz 2.5.5 von Arzela-Ascoli ist $\overline{\{K\varphi_i\}_{i\in\mathbb{N}}}$ in $C^0(\overline{\Omega})$ kompakt und damit besitzt $K\varphi_i$ eine in $C^0(\overline{\Omega})$ konvergente Teilfolge.

(v) Die Inklusion $C^1([0,1]) \hookrightarrow C^0([0,1])$ ist kompakt: Beschränkt und linear ist klar. Nach dem Satz 2.5.6 von Ascoli folgt dann die Kompaktheit:

Sei $f_i \in C^1([0,1])$ beschränkt. Gleichgradige Stetigkeit folgt mit

$$|f_i(x) - f_i(x')| \le \sup_{z \in [0,1]} |f_i'(z)| |x - x'| \le C|x - x'|.$$

Eine Inklusion zwischen Banachräumen, die beschränkt ist, nennt man stetige Einbettung. Ist sie sogar kompakt, nennt man sie kompakte Einbettung.

Lemma 3.4.3. Der Operator $K \in \mathcal{L}(X,Y)$ ist genau dann kompakt, wenn für alle beschränkten Teilmengen $B \subset X$ die Menge $\overline{K(B)} \subset Y$ kompakt ist.

Beweis. Sei K kompakt. Sei $B \subset X$ beschränkt und y_i eine Folge in $\overline{K(B)}$. Dann gibt es für jedes $i \in \mathbb{N}$ ein $x_i \in B$ mit $\|y_i - K(x_i)\| < \frac{1}{i}$. Da x_i beschränkt und K kompakt ist, gibt es eine Teilfolge x_{i_j} , so dass Kx_{i_j} konvergiert. Dann muss auch y_i in Y konvergiert und der Grenzwert in $\overline{K(B)}$ sein, da diese Menge abgschlossen ist. Also ist $\overline{K(B)}$ kompakt.

Sei andererseits $\overline{K(B)}$ für jedes beschränkte $B \subset X$ kompakt. Sei x_i eine beschränkte Folge in X. Setze $B = \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$. Dann besitzt Kx_i als beschränkte Folge im kompakten $\overline{K(B)}$ eine konvergente Teilfolge. Also ist K kompakt. \square

Lemma 3.4.4. $\mathcal{K}(X,Y)$ ist ein abgeschlossener linearer Unterraum von $\mathcal{L}(X,Y)$ und damit insbesondere selbst ein Banachraum.

Sei $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ und $B \in \mathcal{L}(Y,Z)$. Ist A oder B kompakt, dann ist auch BA kompakt.*

Beweis. Wir zeigen als erstes, dass $\mathcal{K}(X,Y)$ ein linearer Unterraum ist. Dazu seien $S,T\in\mathcal{K}(X,Y)$ und $\alpha\in\mathbb{C}$. Sei x_i eine beschränkte Folge in X. Dann gibt es eine Teilfolge x_{i_j} , so dass Sx_{i_j} konvergiert. Da diese Teilfolge selbst wieder beschränkt sein muss, gibt es davon eine Teilfolge $x_{i_{j_k}}$, so dass $Tx_{i_{j_k}}$ und somit auch $(\alpha S+T)x_{i_{j_k}}$ konvergiert. Also ist $\alpha S+T$ auch wieder kompakt.

Um die Abgeschlossenheit der kompakten Operatoren in $\mathcal{L}(X,Y)$ zu zeigen, sei $S_i \in \mathcal{K}(X,Y)$ und $S \in \mathcal{L}(X,Y)$ mit $S_i \to S$. Sei $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in X. Wir konstruieren ein Diagonalfolgenargument: Da S_1 kompakt ist, gibt es eine Teilfolge $x_{k,1}$ von x_k , so dass $S_1x_{k,1}$ konvergiert. Da $(x_{k,1})$ beschränkt und S_2 kompakt ist, gibt es eine Teilfolge $x_{k,2}$ von $x_{k,1}$, so dass $S_2x_{k,2}$ konvergiert. Iterativ erhalten wir so beschränkte Teilfolgen $x_{k,\ell}$ mit $S_\ell x_{k,\ell}$ konvergiert. Sei nun $z_k = x_{k,k}$. Dann ist z_k per Konstruktion eine Teilfolge von x_k , für die $(S_n z_k)_k$ für alle n konvergiert. Wir zeigen nun, dass Sz_k eine Cauchyfolge ist und somit konvergiert: Sei $\epsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}$ mit $||S_n - S|| < \epsilon$ und $i_0 \in \mathbb{N}$ mit $||S_n z_k - S_n z_\ell|| < \epsilon$ für alle $k, \ell \geqslant i_0$. Dann ist

$$||Sz_k - Sz_\ell|| \le ||(S - S_n)z_k|| + ||S_n(z_k - z_\ell)|| + ||(S - S_n)z_\ell||$$

$$\le 2C||S - S_n|| + \epsilon \le (2C + 1)\epsilon$$

^{*} $\mathcal{K}(X,X)$ bildet damit insbesondere ein Ideal in $\mathcal{L}(X,X)$.

und somit konvergiert Sz_k .

Für die verbleibende Aussage sei x_k eine beschränkte Folge in X. Sei zunächst A kompakt. Dann gibt es eine Teilfolge x_{k_j} , so dass Ax_{k_j} konvergiert. Da B beschränkt und damit stetig ist, konvergiert BAx_{k_j} . Also ist BA kompakt.

Ist hingegen B kompakt, dann folgt aus A beschränkt, dass Ax_k beschränkt ist und somit BAx_k eine konvergente Teilfolge besitzt.

Da Operatoren endlichen Ranges kompakt sind und nach letztem Satz $\mathcal{K}(X,Y)$ vollständig ist, folgt direkt:

Folgerung 3.4.5. Ist $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ Grenzwert einer Folge Operatoren $A_n \in \mathcal{L}(X,Y)$ endlichen Ranges, dann ist A kompakt.

Die Umkehrung gilt i.A. nicht, nicht jeder kompakter Operator ist Grenzwert von Operatoren endlichen Ranges. Aber sie gilt z.B. für kompakte Operatoren auf Hilberträumen.

Satz 3.4.6. Jeder kompakte Operator zwischen Hilberträumen ist Grenzwert einer Folge von Operatoren endlichen Ranges.

Beweis. Sei $A \in \mathcal{K}(H_1, H_2)$. Dann ist $K := \overline{AB_1(0)} \subset H_2$ nach Lemma 3.4.3 kompakt. Sei $\epsilon > 0$. Dann gibt es eine endliche Menge $F_{\epsilon} = \{x_i \mid i = 1, \dots, N\}$ mit $K \subset \bigcup_{i=1}^N B_{\epsilon}(x_i) \subset H_2$. Somit gibt es für jedes $x \in B_1^{H_1}(0)$ ein $f_x \in F$ mit $||Ax - f_x|| < \epsilon$.

Außerdem ist $G_{\epsilon} = \operatorname{span} F_{\epsilon}$ ein endlichdimensionaler und damit abgeschlossener linearer Unterraum von H_2 . Nach Satz 1.2.5 ist dann $H_2 = G_{\epsilon} \oplus G_{\epsilon}^{\perp}$ als Hilberträume. Sei $P_{\epsilon} : H \to G_{\epsilon}$ die zugehörige Projektion. Dann ist $P_{\epsilon} A$ ein beschränkter Operator endlichen Ranges mit $\|P_{\epsilon}\| = 1$. Somit ist $\|P_{\epsilon}Ax - f_x\| = \|P_{\epsilon}Ax - P_{\epsilon}f_x\| < \epsilon$. Zusammen ist dann $\|P_{\epsilon}Ax - Ax\| < 2\epsilon$ für alle $x \in B_1^{H_1}(0)$ und damit $\|P_{\epsilon}A - A\| < 2\epsilon$. Für $\epsilon = \frac{1}{n}$ erhalten wir mit $P_{\frac{1}{n}}A$ damit eine Folge von Operatoren endlichen Ranges, die gegen A konvergieren.

Lemma 3.4.7. Sei $A \in \mathcal{L}(X,Y)$. Dann ist A genau dann kompakt, wenn $A' \in \mathcal{L}(Y^*,X^*)$ kompakt ist.

Sind X,Y zusätzlich Hilberträume, dann gilt auch $A^* \in \mathcal{K}(Y,X)$.

Beweis. Sei A kompakt. Dann ist $K:=\overline{AB_1^X(0)}$ kompakt. Sei φ_i eine beschränkte Folge in Y^* . Wir wollen zeigen, dass dann $A'\varphi_i$ eine konvergente Teilfolge besitzt. Dazu wollen wir Arzela-Ascoli (Satz 2.5.5) anwenden:

Wir betrachten die Folge $\psi_i:=\varphi_i|_K$ in $C^0(K,\mathbb{C})$. Diese ist beschränkt, da φ_i beschränkt war und wegen

$$|\psi_i(y) - \psi_i(y')| \le \sup_i ||\varphi_i||_{Y^*} ||y - y_i||_Y$$

gleichgradig stetig. Damit gibt es nach Arzela-Ascoli eine in $C^0(K,\mathbb{C})$ konvergente Teilfolge ψ_{i_j} . Damit gilt nun

$$||A'\varphi_{i_j} - A'\varphi_{i_k}||_{X^*} = \sup_{x \in B_1^X(0)} |(A'\varphi_{i_j} - A'\varphi_{i_k})(x)| = \sup_{x \in B_1^X(0)} |(\varphi_{i_j} - \varphi_{i_k})(Ax)|$$

Da jedoch $AB_1^X(0)$ dicht in K liegt, ist die rechte Seite gleich $\sup_{y \in K} |(\varphi_{i_j} - \varphi_{i_k})(y)| = \|\psi_{i_j} - \psi_{i_k}\|_{C^0}$. Also ist $A'\varphi_{i_j}$ eine Cauchyfolge in X^* und damit konvergent.

Sei nun A' kompakt. Dann ist nach obigen A'' kompakt und somit nach Lemma 3.4.4 und 3.3.3 auch $J_Y \circ A = A''J_X \colon X \to Y^{**}$.

Sei nun x_i eine beschränkte Folge in X. Dann besitzt $J_Y A x_i$ eine in Y^{**} konvergente Teilfolge $J_Y A x_{i_j}$. Da J_Y isometrisch ist, ist $A x_{i_j}$ dann eine Cauchyfolge in Y und damit auch konvergent.

Der Zusatz für Hilberträume folgt direkt mit Lemma 3.4.4 und 3.3.8(i). □

3.5. Fredholmoperatoren

Aus der linearen Algebra kennen wir den Rangsatz für lineare Abbildungen $f\colon V\to W$ zwischen endlichdimensionalen Vektorräumen: dim ker $f+\dim \operatorname{Bild} f=\dim V$. D.h. die linke Seite hängt gar nicht vom genauen f sondern nur von der Dimension des Definitionsbereiches ab. Für lineare Abbildungen auf unendlich dimensionalen Vektorräumen ist das keine interessante Aussage mehr (da auf beiden Seiten trivialerweise unendlich steht). Mit Hilfe des Kokerns coker $f=W/\operatorname{Bild} f$ lässt sich der Rangsatz umschreiben, als dim ker $f-\dim \operatorname{coker} f=\dim V-\dim W$. D.h. die interessante von f unabhängige Größe (sondern nur von dim V und dim W abhängige Größe ist dim ker $f-\dim \operatorname{coker} f$. Das ist für bestimmte Operatoren, sogenannte Fredholmoperatoren, auch weg von endlichdimensionalen Vektorräumen eine interessante Größe.

Definition 3.5.1. Ein beschränkter Operator $A: X \to Y$ ist ein Fredholmoperator, falls die Dimension des Kerns von A und die des Kokerns von A cokerA:=Y/Bild A endlich sind. Die Menge der Fredholmoperatoren von X nach Y bezeichenen wir mit Fred(X,Y).

Der Fredholmindex von A ist dann definiert als

$$\operatorname{ind} A = \dim \ker A - \dim \operatorname{coker} A \in \mathbb{Z}$$

Nach Lemma 3.1.6.ii ist für einen Fredholmoperator das Bild immer abgeschlossen. Damit folgt nach Lemma 3.3.5 Bild $A = (\ker A')_{\perp}$.

Beispiel 3.5.2.

- (i) Ist $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ bijektiv, dann ist ind A = 0.
- (ii) Jede lineare Abbildung $A \colon V \to W$ zwischen endlich dimensionalen Vektorräumen ist Fredholm mit

$$\operatorname{ind} A = \dim \ker A - \dim \operatorname{coker} A$$

 $\stackrel{\text{Bild abgeschl.}}{=} \dim \ker A + \dim \operatorname{Bild} A - \dim W = \dim V - \dim W.$

Vorl. 12

(iii) Für $\lambda \in \mathbb{R}$ sei $A_{\lambda} := \partial_x - 2\pi i \lambda$: $C^1(S^1 = [0, 1]/\sim) \to C^0(S^0)$. Hier ist A_{λ} beschränkt mit

$$\begin{split} \ker A_{\lambda} &= \begin{cases} e^{2\pi \mathrm{i} \lambda x} \mathbb{C} & \lambda \in \mathbb{Z} \\ \{0\} & \mathrm{sonst} \end{cases} \\ \mathrm{Bild}\, A_{\lambda} &= \{ f \in C^0(S^1) \mid \exists u \in C^1(S^1) : \ u' - 2\pi \mathrm{i} \lambda u = f \} \\ &= \{ f \in C^0(S^1) \mid \exists c \in \mathbb{C} : \ e^{2\pi \mathrm{i} \lambda x} \int_0^x f(s) e^{-2\pi \mathrm{i} \lambda s} ds + c e^{2\pi \mathrm{i} \lambda x} \in C^1(S^1) \} \\ &= \{ f \in C^0(S^1) \mid \exists c \in \mathbb{C} : \ e^{2\pi \mathrm{i} \lambda} \int_0^1 f(s) e^{-2\pi \mathrm{i} \lambda s} ds + c e^{2\pi \mathrm{i} \lambda} = c \} \\ &= \begin{cases} \{ f \in C^0(S^1) \mid \int_0^1 f(s) e^{-2\pi \mathrm{i} \lambda s} ds = 0 \} & \lambda \in \mathbb{Z} \\ C^0(S^1) & \mathrm{sonst} \end{cases} \end{split}$$

Also ist coker $A_{\lambda}=\{0\}$ für $\lambda\notin\mathbb{Z}$ und coker $A_{\lambda}=1+\operatorname{Bild}A_{\lambda}$ für $\lambda\in\mathbb{Z}$, wobei 1 die Funktion mit konstantem Wert 1 darstellt. Die Darstellung des letzten Kokerns folgt, da $y-\int_0^1 y(s)e^{-2\pi\mathrm{i}\lambda s}ds\cdot 1\in\operatorname{Bild}A_{\lambda}$ für jedes $y\in C^0(S^1)$ ist.

D.h. A_{λ} ist Fredholm, für $\lambda \in \mathbb{Z}$ haben wir dim ker $A_{\lambda} = \dim \operatorname{coker} A_{\lambda} = 1$ und für $\lambda \notin \mathbb{Z}$ ist dim ker $A_{\lambda} = \dim \operatorname{coker} A_{\lambda} = 0$. Damit ist ind $A_{\lambda} = 0$ für alle λ .

(iv) Der Rechtsshift $R: \ell_p \to \ell_p, (x_1, x_2, \ldots) \mapsto (0, x_1, x_2, \ldots)$ ist Fredholm (ähnlich für Linksshift):

Hier ist $\ker R = \{0\}$ und $\operatorname{coker} R = \mathbb{C}e_1$ und damit ind R = -1 (Index des Linksshifts ist 1).

(v) Sei A ein Fredholmoperator zwischen Hilberträumen. Dann ist Bild $A=(\ker A^*)^{\perp}$ und damit ind $A=\dim\ker A-\dim\ker A^*\stackrel{A^{**}=A}{=}-\operatorname{ind} A^*$.

Wie sieht ein Fredholmoperator aus? Für jeden endlich dimensionalen (und damit abgeschlossenen) linearer Unterraum U eines Vektorraums V existiert ein abgeschlossener linearer Unterraum $W \subset V$ mit $V = U \oplus W$ (Das W ist nicht eindeutig. Hat/wählt man ein inneres Produkt auf V, kann man z.B. $W = U^{\perp}$ bzgl. dieses Produktes wählen.) Da ein Fredholmoperator $A \colon X \to Y$ per Definition einen endlich dimensionalen Kern $K := \ker A \subset X$ und Kokern besitzt, gibt es abgeschlossene lineare Unterräume $U \subset X$ und $C \subset Y$ mit ($B := Bild A \subset Y$ ist da abgeschlossen selbst wieder ein Banachraum.)

$$X = U \oplus K$$
 und $Y = B \oplus C$.

Dabei ist dim $K < \infty$ und dim $C = \dim Y/B < \infty$.

Der Operator $A_0:=A|_U:U\to \operatorname{Bild} A=B$ ist nun bijektiv zwischen Banachräumen und besitzt somit nach Satz 3.2.1 eine Inverse $A_0^{-1}\in\mathcal{L}(B,U)$. Damit können wir A bzgl. der direkten Summen schreiben als

$$A = \begin{pmatrix} A_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : U \oplus K \to B \oplus C.$$

Satz 3.5.3. Die Menge Fred(X,Y) ist in $\mathcal{L}(X,Y)$ offen und die Abbildung

ind: Fred
$$(X,Y) \to \mathbb{Z}$$

ist lokal konstant.

Beweis. Sei für $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ Fredholm und sei dafür $X = U \oplus K$ und $Y = B \oplus C$ wie oben gewählt. Nun können wir jeden Operator $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ bzgl. dieser Splittings schreiben und erhalten Operatoren T_{ij} , $i, j \in \{1, 2\}$, durch

$$T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} : U \oplus K \to B \oplus C.$$

Diese T_{ij} sind selbst wieder beschränkt: Wir rechnen dies hier nur für T_{11} nach.

$$\begin{split} \|T_{11}u\|_{B} & \leq \|T_{11}u\|_{B} + \|T_{21}u\|_{C} = \|(T_{11}u, T_{12}u)^{T}\|_{B \oplus C} \\ & = \|T\binom{u}{0}\|_{B \oplus C} \leq \|T\| \, \left\|\binom{u}{0}\right\|_{B \oplus C} = \|T\| \, \|u\|_{B}. \end{split}$$

Die Abbildung $T \in \mathcal{L}(X,Y) \mapsto T_{11} \in \mathcal{L}(U,B)$ ist stetig. Da Invertierbarkeit von beschränkten Operatoren eine offene Eigenschaft ist, Folgerung 3.2.3, ist

$$\mathcal{U}:=\{T\in\mathcal{L}(X,Y)\mid T_{11}:U\to B \text{ ist invertierbar}\}\subset\mathcal{L}(X,Y)$$

eine offene Umgebung von A.

Wir werden zeigen, dass jedes $T \in \mathcal{U}$ Fredholm ist und ind $T = \operatorname{ind} A$ (und dabei dim ker $T \leq \dim \ker A$ und dim coker $T \leq \dim \operatorname{coker} A$) gilt. Damit wäre insbesondere ind dann lokal konstant. Dazu definieren wir zu einem $T \in \mathcal{U}$

$$\Phi\!:=\!\begin{pmatrix} \operatorname{Id} & -T_{11}^{-1}T_{12} \\ 0 & \operatorname{Id} \end{pmatrix} : U \oplus K \to U \oplus K \text{ und } \Psi\!:=\!\begin{pmatrix} \operatorname{Id} & 0 \\ -T_{21}T_{11}^{-1} & \operatorname{Id} \end{pmatrix} : B \oplus C \to B \oplus C.$$

Beide sind invertierbar mit

$$\Phi^{-1} = \begin{pmatrix} \operatorname{Id} & T_{11}^{-1} T_{12} \\ 0 & \operatorname{Id} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \Psi^{-1} = \begin{pmatrix} \operatorname{Id} & 0 \\ T_{21} T_{11}^{-1} & \operatorname{Id} \end{pmatrix},$$

und damit gilt insbesondere $\Phi \in \mathcal{L}(X,X)$ und $\Psi \in \mathcal{L}(Y,Y)$. Damit definieren wir

$$\tilde{T} := \Psi T \Phi = \begin{pmatrix} T_{11} & 0 \\ 0 & T^r := T_{22} - T_{21} T_{11}^{-1} T_{12} \end{pmatrix}.$$

Es ist $T^r \in \mathcal{L}(K,C)$. Da $T^r \colon K \to C$ eine lineare Abbildung zwischen endlich dimensionalen Vektorräumen ist, gilt nach Beispiel 3.5.2 ind $T^r = \dim K - \dim C = \operatorname{ind} A$.

Da T_{11} nach Wahl von T invertierbar ist und Φ , Ψ Banachraumisomorphismen sind, gilt

$$\ker T = \Phi(\ker \tilde{T}) = \Phi(\{0\} \oplus \ker T^r)$$

und damit dim $\ker T=\dim \ker T^r\leqslant \dim K=\dim \ker A$. Analog folgt Bild $T=\Psi(\operatorname{Bild} \tilde{T})=\Psi(B\oplus\operatorname{Bild} T^r)$ und damit

$$\operatorname{coker} \tilde{T} = (B \oplus C)/(B \oplus \operatorname{Bild} T^r) \cong C/\operatorname{Bild} T^r = \operatorname{coker} T^r.$$

Hieraus folgt dim coker $T = \dim \operatorname{coker} \tilde{T} = \dim \operatorname{coker} T^r \leq \dim C = \dim \operatorname{coker} A$. Also insbesondere ind $T = \operatorname{ind} T^r = \operatorname{ind} A$.

Aus letztem Satz folgt direkt:

Folgerung 3.5.4. Sei $s \in [0,1] \mapsto A_s \in \text{Fred}(X,Y)$ stetig. Dann ist ind A_s unabhängig von s.

Wie zeigt man, dass ein Operator Fredholm ist? ... also ohne direkt die Definition zu überprüfen. Dazu hilft manchmal ein Hilfsbegriff:

Definition 3.5.5. Ein beschränkter Operator $A: X \to Y$ ist *semi-Fredholm*, falls die Dimension des Kerns von A endlich ist und Bild A abgeschlossen ist.

Jeder Fredholm-Operator ist semi-Fredholm, da nach Lemma 3.1.6.ii der endlich dimensionale Kokern die Abgeschlossenheit des Bildes impliziert. Insbesondere gilt:

Lemma 3.5.6. Sei $A \in \mathcal{L}(X,Y)$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent.

- (i) A und A' sind beide semi-Fredholm.
- (ii) A ist Fredholm.
- (iii) A' ist Fredholm.

Falls A Fredholm ist, gilt

$$\dim \ker A = \dim \operatorname{coker} A' \quad und \quad \dim \operatorname{coker} A' = \dim \ker A$$

und somit ind A = -ind A'.

Beweis. Aus (i) folgt (ii) und (iii): Seien zunächt A und A^\prime beide semi-Fredholm. Dann ist mit Lemma 2.4.4 und Lemma 3.3.5

$$(\ker A)^* \cong X^*/(\ker A)^{\perp} = X^*/\text{Bild } A' = \operatorname{coker} A'$$

und

$$(\operatorname{coker} A)^* = (Y/\operatorname{Bild} A)^* \cong (\operatorname{Bild} A)^{\perp} = \ker A'.$$

Also ist der Kokern von A und A^* auch endlichdimensional und A und A' sind beide Fredholm.

Aus (ii) folgt (i): Sei nun A Fredholm. Dann können wir, da Bild A abgeschlossen ist, noch mit der zweiten abgesetzten Formel von oben folgern, dass ker A' auch endlich dimensional ist. Außerdem ist nach Satz 3.3.7 auch Bild A' abgeschlossen und somit A' semi-Fredholm.

Aus (iii) folgt (i): Sei nun A' Fredholm. Dann können wir da Bild A' abgeschlossen ist, mit der ersten abgesetzten Formel von oben folgern, dass ker A endlich dimensional ist. Der Rest folgt wie im letzten Abschnitt.

Die Aussage zu den Indizes und den Dimensionen der Kerne und Kokerne folgt direkt aus den abgesetzten Formeln. \Box

Weiterhin haben wir folgende Charakterisierung für semi-Fredholm:

Lemma 3.5.7. Ein Operator $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ ist genau dann semi-Fredholm, wenn es einen Banachraum Z, ein $K \in \mathcal{K}(X,Z)$ und ein c > 0 mit

$$||x||_X \le c(||Ax||_Y + ||Kx||_Z) \tag{3.1}$$

gibt.

Beweis. Sei A semi-Fredholm. Da Z:=ker A endlichdimensional ist, ist er insbesondere abgeschlossen. Damit gibt es einen abgeschlossenen linearen Unterraum $U \subset X$ mit $X = Z \oplus U$. Dieses Splitting definiert mit der Projektion auf den ersten Summanden einen stetigen Operator $K \colon X \to Z$. Da Z endlich dimensional ist, ist dieses K automatisch kompakt, vgl. Beispiel 3.4.2.ii. Wir betrachten die lineare Abbildung

$$B: X \mapsto Y \oplus Z, \ x \mapsto (Ax, Kx).$$

Diese ist beschränkt und injektiv, da $B((z,u) \in Z \oplus U) = (Au,z)$ ist und $A|_U$ injektiv ist. Da A semi-Fredholm ist, ist Bild A und damit Bild $B = \text{Bild } A \oplus Z \subset Y \oplus Z$ abgeschlossen. Mit Lemma 3.1.6.i und B injektiv gibt es also ein $\tilde{c} > 0$ mit

$$||Bx = (Ax, Kx)|| = ||Ax|| + ||Kx|| \ge \tilde{c}||x||$$

für alle $x \in X$.

Sei nun Z ein Banachraum, $K \in \mathcal{K}(X,Z)$ und c>0 mit $\|x\|_X \leqslant c(\|Ax\|_Y + \|Kx\|_Z)$. Um zu zeigen, dass ker A endlichdimensional ist, reicht es nach Lemma 2.5.2 zu zeigen, dass der abgeschlossene Einheitsball in ker A kompakt ist. Dazu sei x_i eine Folge in ker A mit $\|x_i\| \leqslant 1$. Nach Übergang zu einer Teilfolge können wir annehmen, dass Kx_i in Z konvergiert, da K kompakt ist. Damit folgt aus obiger Ungleichung

$$||x_i - x_i||_X \leqslant c||Kx_i - Kx_i||_Z,$$

dass x_i selbst eine Cauchyfolge in X ist und damit konvergiert.

Es bleibt noch zu zeigen, dass das Bild von A abgeschlossen ist: Es ist Bild $A = \text{Bild } A|_U$ mit U analog wie oben gewählt (also insbesondere wieder abgeschlossen). Es reicht also zu zeigen, dass $B := A|_U : U \to Y$ abgeschlossenes Bild hat. Sei nun x_i eine Folge in U mit $Ax_i \to y \in Y$.

Wir überlegen uns erst einmal per Widerspruchsbeweis, dass x_i beschränkt ist: Wäre $||x_i||_X \to \infty$. Dann wäre $z_i := \frac{x_i}{||x_i||_X}$ eine beschränkte Folge mit $Az_i \to 0$. Da K kompakt ist, muss Kz_{ij} für eine Teilfolge z_{ij} von z_i konvergieren. Dann folgt aus Anwenden von

 $||x||_X \leq c(||Ax||_Y + ||Kx||_Z)$ auf $x = z_{i_j} - z_{i_k}$, dass $z_{i_j} - z_{i_k}$ eine Cauchyfolge in X und damit konvergent, Grenzwert sei z, sein muss. Doch dann ist $Az = \lim_{j \to \infty} Az_{i_j} = 0$ und damit $z \in \ker A$. Wegen ||z|| = 1 und der Wahl von U gibt dies den Widerspruch.

Also ist x_i beschränkt und damit besitzt Kx_i eine konvergente Teilfolge. Einsetzen von $x_i - x_j$ in (3.1) zeigt nun, dass x_i selbst eine Cauchyfolge ist und damit gegen ein $x \in X$ konvergiert. Wegen Stetigkeit ist dann Ax = y und Bild A abgeschlossen.

Der Index eines Fredholmoperators ist konstant unter kompakten Perturbationen, d.h.:

Satz 3.5.8. Sei $A \in \text{Fred}(X,Y)$ und $K \in \mathcal{K}(X,Y)$. Dann ist A + K Fredholm mit ind A = ind(A + K).

Beweis. Wir zeigen zunächst: Ist A semi-Fredholm, dann auch A+K für K kompakt: Da A semi-Fredholm ist, gibt es nach letztem Lemma ein c>0, einen Banachraum Z und einen kompakten Operator $\tilde{K} \in \mathcal{K}(X,Z)$ mit $\|x\|_X \leqslant c(\|Ax\|_Y + \|\tilde{K}x\|_Z)$. Damit folgt nach Dreiecksungleichung

$$||x||_X \leqslant c(||(A+K)x||_Y + ||Kx||_Y + ||\tilde{K}x||_Z) = c(||(A+K)x||_Y + ||(Kx, \tilde{K}x)||_{Y \oplus Z}).$$

Da $x \mapsto (Kx, Kx) \in Y \oplus Z$ als direkte Summe zweier kompakter Operatoren wieder kompakt ist, folgt aus letztem Lemma, dass A + K semi-Fredholm ist.

Da A Fredholm ist, ist nach Lemma 3.5.6 auch A' Fredholm. Nach Lemma 3.4.7 ist K' auch kompakt. Nach letztem Abschnitt sind dann sowohl A+K als auch A'+K'=(A+K)' semi-Fredholm und somit A+K nach Lemma 3.5.6 Fredholm.

Ist K kompakt, dann auch tK für alle $t \in \mathbb{R}$. Dann ist A + tK eine stetige Einparameterfamilie von Fredholmoperatoren und hat damit nach Satz 3.5.3 konstanten Index.

Satz 3.5.9 (Fredholm Alternative). Sei $A: X \to X$ ein kompakter Operator. Sei $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Dann tritt genau einer der beiden folgenden Fälle ein

(i) Die Gleichung $Ax = \lambda x$ hat nur die triviale Lösung x = 0.

In diesem Fall hat $(A - \lambda Id)x = y$ für jedes $y \in X$ genau eine Lösung.

(ii) Die Gleichung $Ax = \lambda x$ hat $n := \dim \ker (A - \lambda \operatorname{Id}) \in (0, \infty)$ linear unabhängige Lösungen.

In diesem Fall hat auch die adjungierte Gleichung $A'x' = \lambda x'$ genau n linear unabhängige Lösungen und die inhomogene Gleichung $(A - \lambda \operatorname{Id})x = y$ ist genau dann lösbar, wenn $y \in (\ker (A' - \lambda \operatorname{Id}))_{\perp}$ ist.

Beweis. Da Id ein Fredholmoperator mit Index 0 ist und A kompakt ist, ist $A - \lambda \text{Id}$ Fredholm mit Index 0, s. Satz 3.5.8, und hat damit insbesondere endlichdimensionalen Kern und Kokern. (i) entspricht dem Fall, wenn beide Dimensionen gleich Null ist. Falls nicht, ist $n \in (0, \infty)$ und wir sind im zweiten Fall.

Es bleibt für (ii) die Aussagen zur adjungierten Gleichung zu zeigen: Wegen Lemma 3.3.5 ist Bild $(A - \lambda) = (\ker(A' - \lambda \operatorname{Id}))_{\perp}$. Aus Lemma 3.5.6 und ind $(\lambda - A) = 0$ folgt dim $\ker(\lambda - A) = \dim\ker(\lambda - A')$ und somit die Behauptung.

Beispiel 3.5.10. Die ganze Theorie, die zur Fredholmalternative führt, kommt aus dem Studium von Integralgleichungen, vor allem zum Studium von klassischen Randwertproblemen, wie z.B.:

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ offen, beschränkt mit $\partial\Omega$ eine glatte Untermannigfaltigkeit. Wir wollen sehen, dass

$$\Delta u := \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^{2} u}{\partial x_{i}^{2}} = 0 \quad \text{auf } \Omega$$

$$u|_{\partial\Omega} = f \in C^{0}(\partial\Omega) \quad \text{auf } \partial\Omega$$

immer eine Lösung besitzt (Skizze).

Dazu sei n_y der äußere Einheitsnormalenvektor zu $\partial\Omega$ in $y\in\partial\Omega$. Wir setzen

$$k(x,y) = \frac{\langle x - y, n_y \rangle}{2\pi |x - y|^3}$$

Das ist für alle $x \neq y$, $x, y \in \mathbb{R}^3$, definiert. Man kann nachrechnen $\Delta_x k(x, y) = 0$ für alle $x \neq y$ – hierbei bedeutet der Index x an Δ , dass wir k(x, y) als Funktion in x (und y als Parameter) betrachten und Δ einer Funktion in x berechnen.

Wir machen den Ansatz

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} k(x,y)\varphi(y) d\text{vol}_{\partial\Omega}$$

für ein stetiges $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$. Für $x \notin \partial\Omega$ ist das Integral wohldefiniert und es ist $\Delta u(x) = 0$ (nach Differentiation von Parameterintegralen, [4, Satz 1.6.3]).

Sei nun $x \in \partial \Omega$. Dann kann man zeigen, dass $\int_{\partial \Omega} k(x,y) \varphi(y) d\text{vol}_{\partial \Omega}$ auch existiert und stetig in x ist (beruht darauf, dass φ stetig, $\partial \Omega$ glatt ist, k(x,y) sich für $x \to y$, wie $c\frac{1}{|x-y|}$ verhält und $\int_{B_1(0)\subset \mathbb{R}^2} \frac{1}{r} d\text{vol}_{\mathbb{R}^2}$ konvergiert.)

Weiterhin kann man für eine Folge $(x_k)_k$ in Ω mit $x_k \to x$ zeigen, dass

$$u(x_k) \to -\varphi(x) + \int_{\partial\Omega} k(x,y)\varphi(y) d\text{vol}_{\partial\Omega}.$$

(Hat man eine Folge $x_k \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}$ die gegen $x \in \partial \Omega$ konvergiert, gilt

$$u(x_k) \to \varphi(x) + \int_{\partial\Omega} k(x, y) \varphi(y) d\text{vol}_{\partial\Omega}.$$

Wollen wir also den Dirichlet-Randwert $u|_{\partial\Omega}=f$ realisieren, suchen wir ein φ mit

$$f(x) = -\varphi(x) + \int_{\partial\Omega} k(x, y)\varphi(y) d\text{vol}_{\partial\Omega}.$$

Wir definieren $A: C^0(\partial\Omega) \to C^0(\partial\Omega)$ durch

$$(A\varphi)(x) = \int_{\partial\Omega} k(x,y)\varphi(y) d\text{vol}_{\partial\Omega}.$$

Dann ist A ein kompakter Operator, vgl. ÜA.

Damit gibt es nach der Fredholm-Alternative entweder eine nichtverschwindende Lösung von $A\varphi = \varphi$ oder $(A - \operatorname{Id})\varphi = f$ hat eine eindeutige Lösung für jedes $f \in C^0(\partial\Omega)$.

Es bleibt zu zeigen, dass der erste Fall nicht eintreten kann: Angenommen es gibt eine Lösung φ von $A\varphi = \varphi$. Dann löst das zugehörige u das Dirichletproblem für f=0. Nach dem Maximumsprinzip* folgt dann aber u=0 auf Ω . Mittels partieller Integration kann man sehen, dass auch u=0 auf $\mathbb{R}^3\backslash\bar{\Omega}$ gilt. Mit obigem Grenzwert zu Punkten $x\in\partial\Omega$ sowohl von außen als auch innen folgt somit $-\varphi(x)=\varphi(x)$, also $\varphi=0$.

Satz 3.5.11 (Fredholm \sim 'fast invertierbar'). Sei $A \in \mathcal{L}(X,Y)$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (i) A ist Fredholm
- (ii) Es existiert ein $B \in \mathcal{L}(Y, X)$ und Operatoren endlichen Ranges $S_1 \in \mathcal{L}(X, X)$ und $S_2 \in \mathcal{L}(Y, Y)$ mit $BA = \mathrm{Id}_X + S_1$ und $AB = \mathrm{Id}_Y + S_2$.
- (iii) Es existiert ein $B \in \mathcal{L}(Y, X)$ und kompakte Operatoren $S_1 \in \mathcal{L}(X, X)$ und $S_2 \in \mathcal{L}(Y, Y)$ mit $BA = \operatorname{Id}_X + S_1$ und $AB = \operatorname{Id}_Y + S_2$.

Insbesondere ist B in (ii) und (iii) dann jeweils selbst Fredholm.

Beweis. ÜA
$$31$$

Satz 3.5.12. Seien $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ und $B \in \mathcal{L}(Y,Z)$ Fredholm. Dann ist auch BA Fredholm mit

$$\operatorname{ind} BA = \operatorname{ind} B + \operatorname{ind} A.$$

Beweis. Sei $A = \operatorname{diag}(A_0, 0) \colon U \oplus \ker A \to \operatorname{Bild} A \oplus C$ und $B = \operatorname{diag}(B_0, 0) \colon U' \oplus \ker B \to \operatorname{Bild} B \oplus C'$ die Zerlegung wie auf Seite 42, also A_0 und B_0 sind bijektiv.

Es ist

$$\ker BA = A_0^{-1}(\ker B \cap \operatorname{Bild} A) \oplus \ker A$$

und

$$\operatorname{Bild} BA = \operatorname{Bild} B|_{\operatorname{Bild} A} = \operatorname{Bild} B_0|_{\operatorname{Bild} A \cap U'}.$$

^{* /} PDE-Vorlesung - https://en.wikipedia.org/wiki/Maximum_principle

Damit ist insbesondere

$$\dim \operatorname{coker} BA = \dim C' + \dim \operatorname{Bild} B_0|_{C \cap U'} = \dim C' + \dim(C \cap U').$$

Dann ist

$$\begin{split} \operatorname{ind} BA &= \dim \ker BA - \dim \operatorname{coker} BA \\ &= \dim \ker A + \dim (\ker B \cap \operatorname{Bild} A) - \dim \operatorname{coker} BA \\ &= \operatorname{ind} A + \dim C + \dim (\ker B \cap C) - \dim \operatorname{coker} BA \\ &= \operatorname{ind} A + \operatorname{ind} B + \dim C + \dim C' - \dim (\ker B \cap C) - \dim \operatorname{coker} BA \\ &= \operatorname{ind} A + \operatorname{ind} B + \dim C + \dim (U' \cap C) - \dim (\ker B \cap C) \\ &= \operatorname{ind} A + \operatorname{ind} B. \end{split}$$

Vorl. 14

4. Schwache Konvergenz

In einem Banachraum gibt es neben der Konvergenz bzgl der Norm noch andere Konvergenzbegriffe, die hilfreich sein werden. Dazu gehört insbesondere die schwache Konvergenz:

Definition 4.0.1. Eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in einem Banachraum X konvergiert schwach gegen ein $x\in X$ (Notation: $x_k\stackrel{w}{\to} x^*$ für $k\to\infty$), falls für alle $\ell\in X^*$

$$\ell(x_k) \to \ell(x)$$
 für $k \to \infty$.

In Abgrenzung nennt man die Konvergenz $x_k \to x$ bzgl. der Norm der X auch starke Konvergenz oder Konvergenz in Norm.

Im Falle von Hilberträumen entspricht $x_k \xrightarrow{w} x$ nach dem Satz 1.2.7 von Riesz der Forderung $\langle y, x_k \rangle \to \langle y, x \rangle$ für alle $y \in H$.

Lemma 4.0.2.

- (i) Der schwache Limes ist, wenn er existiert, eindeutig bestimmt.
- (ii) Falls $x_k \to x$ stark in X konvergiert, dann konvergiert x_k auch schwach in X gegen x.
- (iii) Falls $x_k \stackrel{w}{\to} x$ schwach in X konvergiert, dann gilt

$$||x|| \leqslant \liminf_{k \to \infty} ||x_k||.$$

Beweis. (i) Sei $x_k \stackrel{w}{\to} x$ und $x_k \stackrel{w}{\to} y$ mit $x \neq y$. Da X^* Punkte trennt, vgl. Folgerung 2.3.6, gibt es ein $\ell \in X^*$ mit $\ell(x) \neq \ell(y)$. Das ist ein Widerspruch dazu, dass nach Definition der schwachen Konvergenz $\ell(x_k)$ sowohl gegen $\ell(x)$ als auch $\ell(y)$ konvergieren muss.

(ii) Für alle $\ell \in X^*$ gilt

$$|\ell(x) - \ell(x_k)| = |\ell(x - x_k)| \le ||\ell|||x - x_k|| \to 0.$$

(iii) Sei $x_k \xrightarrow{w} x$. Dann gilt $|\ell(x_k)| \leq ||\ell|| |x_k|$ für alle $\ell \in X^*$. Damit haben wir

$$|\ell(x)| = \liminf_{k \to \infty} |\ell(x_k)| \leqslant \|\ell\| \liminf_{k \to \infty} \|x_k\|$$

und somit

$$||x|| \stackrel{\text{ÜA13.}i}{=} \sup_{\|\ell\|=1} |\ell(x)| \leqslant \liminf_{k \to \infty} ||x_k||.$$

^{*}w für weak convergence/schwache Konvergenz

Beispiel 4.0.3.

(i) Sei $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Orthonormalbasis eines separablen Hilbertraumes H. Dann ist $e_i \stackrel{w}{\to} 0$: Sei $y = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i e_i \in H$. Dann muss insbesondere α_i eine Nullfolge sein. Damit gilt $\langle e_i, y \rangle = \alpha_i \to 0$ für $i \to \infty$.

Diese Konvergenz ist nicht stark, da $\|e_i\|=1$ ist, aber der starke Limes auch 0 sein müsste.

(ii) $\sin(nx) \stackrel{w}{\to} 0$ für $n \to \infty$ in $L^p([0, 2\pi])$ für $p \in [1, \infty)$:

Es ist

$$\left| \int_0^{2\pi} |\sin(nx)|^p dx \right|^{\frac{1}{p}} \stackrel{|\sin| \leqslant 1}{\leqslant} (2\pi)^{\frac{1}{p}}$$

Wir identifizieren $(L^p)^*$ mit L^q für $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ (d.h. q=1 für $p=\infty$). Damit müssen wir zeigen: $\int_0^{2\pi}\sin(nx)f(x)dx\to 0$ für alle $f\in L^q([0,2\pi])$. Es reicht dies für $f\in C^\infty([0,2\pi])$ zu zeigen, da $C^\infty([0,2\pi])$ dicht in $L^q([0,2\pi])$ und damit für $f_k\in C^\infty([0,2\pi])\to f$ in L^q folgt $\left|\int_0^{2\pi}\sin(nx)(f(x)-f_k)dx\right|\leqslant \|\sin(nx)\|_p\|f-f_k\|_p\to 0$.

Sei also nun $f \in C_c^{\infty}([0,2\pi])$. Dann folgt mit partieller Integration

$$\left| \int_0^{2\pi} \sin(nx) f(x) dx \right| = \frac{1}{n^2} \left| \int_0^{2\pi} \sin(nx) f''(x) dx \right| \le \frac{1}{n^2} \|f\|_q \|\sin(nx)\|_p \to 0.$$

Also konvergiert $\sin(nx)$ schwach gegen Null.

Ähnlich kann man nachrechnen, dass $\sin^2(nx) \xrightarrow{w} \frac{1}{2}$ für $n \to \infty$ in $L^p([0, 2\pi])$, $p \in [1, \infty)$, gilt.

Am letzten Beispiel sieht man schon, dass das Produkt (in Banachräumen, in den man Produkt bilden kann, z.B. L^2) zweier schwach konvergenter Folgen nicht schwach gegen das Produkt der Grenzwerte konvergieren muss (im Gegensatz zu stark konvergenten Folgen). Aber es gilt eine abgeschwächte Form, siehe Lemma 4.0.8.

Satz 4.0.4. Sei X reflexiv. Dann besitzt jede beschränkte Folge eine schwach konvergente Teilfolge.

Beweis. Sei $(x_k)_k$ eine beschränkte Folge in X. Sei $Y := \overline{\operatorname{span}\{x_1, x_2, \ldots\}}$ zusammen mit der Norm von X. Dann ist Y ein separabler Banachraum und nach Beispiel 2.4.3.iv selbst wieder reflexiv. Damit folgt mit Lemma 2.4.2, dass auch Y^* separabel ist. Sei $Y^* = \overline{\operatorname{span}\{y_1', y_2', \ldots\}}$. Mit einem Diagonalfolgenargument wie im Beweis von Arzela-Ascoli Satz 2.5.5 erhalten wir eine Teilfolge y_i von x_i , so dass $y_i'(y_k)$ für $k \to \infty$ für alle i konvergiert. Da y_i' dicht in Y^* liegt, konvergiert damit $y'(y_k)$ für $k \to \infty$ für alle $y \in Y^*$.

Um daraus zu folgern, dass y_k in Y schwach konvergiert, muss der Grenzwert gefunden werden: Dazu sei $\ell: y' \in Y^* \mapsto \lim_{k \to \infty} y'(y_k)$. Es ist $\ell \in Y^{**}$. Da Y reflexiv ist, gibt es ein $y \in Y$ mit $\ell(y') = y'(y)$ für alle $y' \in Y^*$. Also ist $y'(y) = \lim_{k \to \infty} y'(y_k)$ und somit konvergiert y_k schwach in Y^* nach y'.

Es bleibt zu zeigen, dass diese Konvergenz auch schwach in X^* ist: Sei $x' \in X^*$. Dann ist $x'|_Y \in Y^*$ und es gilt $x'(y_k) = x'|_Y(y_k) \to x'_Y(y) = x'(y)$.

Wir werden noch sehen, dass jede schwach konvergente Folge beschränkt sein muss. Dazu brauchen wir noch:

Satz 4.0.5 (Prinzip der gleichmäßigen Beschränkheit/Satz von Banach-Steinhaus). Sei X ein Banachraum, Y ein normierter Raum, I eine Indexmenge und $A_i \in \mathcal{L}(X,Y)$ für alle $i \in I$. Sei $\sup_{i \in I} ||A_i x|| < \infty$ für alle $x \in X$. Dann ist schon $\sup_{i \in I} ||A_i x|| < \infty$.

Beweis. Zum Beweis werden wir den Satz 2.5.3 von Baire verwenden: Sei $E_n := \{x \in X \mid \sup_{i \in I} \|A_i x\| \leq n\}$. Dann ist nach Voraussetzung $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$. Da die A_i beschränkt und damit stetig sind, ist

$$E_n = \bigcap_{i \in I} ||T_i(.)||^{-1} ([0, n]) = X \setminus \bigcup_{i \in I} ||T_i(.)||^{-1} (\mathbb{R} \setminus [0, n])$$

abgeschlossen. Nach dem Satz von Baire muss min ein E_n einen inneren Punkt besitzen. Sagen wir x ist ein innerer Punkt von E_m für ein $m \in \mathbb{N}$. Es gibt also ein $\epsilon > 0$ mit $B_{\epsilon}(x) \subset E_m$.

Wir haben $E_n = -E_n$ und E_n ist konvex, dank Dreiecksungleichung. Damit ist $B_{\epsilon}(-x) \subset E_m$ und somit $B_{\epsilon}(0) \subset E_m$. Ist also $||x|| < \epsilon$, dann ist $||A_ix|| \leq m$ und somit $\sup_{i \in I} ||A_i|| \leq \frac{m}{\epsilon} < \infty$.

Folgerung 4.0.6. Sei X ein normierter Raum und $M \subset X$. Dann ist M genau dann beschränkt, wenn x'(M) für alle $x' \in X^*$ beschränkt ist.

Beweis. Ist M beschränkt, dann folgt die Beschränktheit von x'(M), da alle $x' \in X^*$ beschränkt sind. Sei nun x'(M) für alle $x' \in X^*$ beschränkt, also $\sup_{x \in M} |x'(x)| < \infty$. Es ist $x'(x) = J_x(x)(x')$, s. Abschnitt 2.4.1. Wenden wir letzten Satz nun auf I = M, $A_x = J_X(x) \in X^{**} = \mathcal{L}(X^*, \mathbb{C})$ an, erhalten wir

$$\sup_{x \in M} \|x\| \overset{J_X \text{ isometr.}}{=} \sup_{x \in M} \|J_X(x)\| < \infty.$$

(Dabei haben wir verwendet, dass $X^* = \mathcal{L}(X,\mathbb{C})$ ein Banachraum ist, vgl. Beispiel 2.1.1.v.).

Folgerung 4.0.7. Jede schwach konvergente Folge ist beschränkt.

Beweis. Konvergiert x_k schwach zu x. Dann ist für jedes $x' \in X^*$ die Folge $x'(x_k)$ konvergent und damit insbesondere beschränkt. Die Beschränkheit von $(x_k)_k$ folgt dann mit der letzten Folgerung.

Lemma 4.0.8. Sei X ein Banachraum, in dem man eine Algebrastruktur hat $(z.B. L^2)$. Sei $x_n \to x$ und $y_n \stackrel{w}{\to} y$ in X. Dann gilt $x_n y_n \stackrel{w}{\to} xy$.

Beweis. Sei $\ell \in X^*$. Dann definiert $\ell_x(z) := \ell(xz)$ auch ein Element $\ell_x \in X^*$. Nach letzter Folgerung ist y_n beschränkt. Damit haben wir

$$|\ell(x_n y_n - xy)| \le |\ell(x(y_n - y))| + |\ell((x_n - x)y_n)|$$

$$\le |\ell_x(y_n - y)| + ||\ell|||y_n|||x_n - x|| \to 0.$$

Schauen wir uns noch eine weitere Folgerung von Banach-Steinhaus an:

Folgerung 4.0.9. Sei X ein Banachraum und sei Y ein normierter Raum. Sei $(A_k)_k$ eine Folge in $\mathcal{L}(X,Y)$. Für alle $x \in X$ existierte der Grenzwert $Ax := \lim_{k \to \infty} A_k x$. Dann ist $A \in \mathcal{L}(X,Y)$.

Wenn man an allgemeine Funktionenfolgen denkt, ist die letzte Folgerung vielleicht etwas verwundernd, da dort aus punktweiser Konvergenz i.A. nicht die gleichmäßige Konvergenz folgt.

Beweis. Linearität folgt aus den Rechenregeln für konvergente Folgen.

Für die Beschränkheit: Nach Voraussetzung ist $\sup_k \|A_k x\| < \infty$ für alle $x \in X$. Nach dem Satz von Banach-Steinhaus folgt $C := \sup_k \|A_k\| < \infty$. Damit ist

$$||Ax|| = \lim_{k \to \infty} ||A_k x|| \leqslant C||x||.$$

Mit schwacher Konvergenz erhalten wir noch eine andere Charakterisierung kompakter Operatoren auf einem reflexiven Hilbertraum:

Lemma 4.0.10. Sei X reflexiv. Dann ist $K \in \mathcal{L}(X,Y)$ genau dann kompakt, wenn für jede in X schwach konvergente Folge x_k die Bildfolge Kx_k stark in Y konvergiert.

Beweis. Sei nun X reflexiv und K kompakt. Sei $x_k \to x$ schwach konvergent in X. Dann ist diese Folge wegen Folgerung 4.0.7 beschränkt und damit besitzt Kx_k eine konvergente Teilfolge $Kx_{i_k} \to y$. Wir wollen nun zeigen, dass nicht nur eine Teilfolge sondern ganz Kx_k konvergiert. Angenommen, dies wäre falsch, dann gibt es für jedes $\epsilon > 0$ eine Teilfolge x_{j_ℓ} von x_k mit $\|Kx_{j_\ell} - y\| > \epsilon$. Anderseits ist K kompakt und damit muss es eine Teilfolge $x_{j_{\ell_r}}$ von x_{j_ℓ} geben, so dass $Kx_{j_{\ell_r}} \to z$. Es ist $\|y - z\| > \epsilon$. Damit gibt es nach Hahn-Banach ein $\ell \in Y^*$ mit $\ell(y) \neq \ell(z)$. Wir betrachten $\varphi = K'\ell \in X^*$. Dann gilt $\varphi(x_{i_k}) = \ell(Kx_{i_k}) \to \ell(y)$ und $\varphi(x_{j_{\ell_r}}) = \ell(Kx_{j_{\ell_r}}) \to \ell(z)$. Die ist ein Widerspruch zu schwachen Konvergenz und damit $\varphi(x_k) \to \varphi(x)$.

Die Bildfolge einer jeden schwach konvergenten Folge konvergierte nun stark. Wir wollen zeigen, dass K kompakt ist. Dazu sei x_i eine beschränkte Folge. Dann besitzt nach Satz 4.0.4 diese eine schwach konvergente Teilfolge und damit eine stark konvergente Bildteilfolge.

- (i) Starke Konvergenz: $\|\varphi_k \varphi\| \to 0$
- (ii) Schwache Konvergenz: Für alle $\psi \in X^{**}$ gilt $\psi(\varphi_k) \to \psi(\varphi)$.
- (iii) Schwach-*-Konvergenz = punktweise Konvergenz: Für alle $x \in X$ gilt $\varphi_k(x) \to \varphi(x)$.

Ist X reflexiv, gibt es für jedes $\psi \in X^{**}$ ein eindeutiges $x \in X$ mit $J_X(x) = \psi$. Dann ist schwache Konvergenz in X^* äquivalent zu: Für alle $x \in X$ gilt $\varphi_k(x) \to \varphi(x)$, also zu punktweiser, also schwach-*-, Konvergenz.

Schwache Ableitung: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Sei $f \in L^1_{loc}(U)^*$. Sei $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Existiert ein $g \in L^1_{loc}(U)$, sodass

$$\int_{U} f(D^{\alpha}\varphi) d\text{vol} = (-1)^{|\alpha|} \int_{U} g\varphi d\text{vol}$$

für alle $\varphi \in C_c^{\infty}(U)$ gilt, dann nennen wir g die α te schwache Ableitung von f.

Ist $f \in C^{|\alpha|}(U)$, dann liefert partielle Integration $g = D^{\alpha}f$. Auch sonst verwenden wir deshalb die Notation $g = D^{\alpha}f$. Wenn g existiert, ist es eindeutig, vgl. ÜA20.

Die schwache Ableitung ist wie auch die normale Ableitung lokal, d.h. $g|_V$ mit $V\subset U$ offen hängt nur von $f|_V$ ab.

Beispiel 4.0.11. Sei f(x) = |x|. Die schwache Ableitung ist[†]

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x \leqslant 0. \end{cases}$$

Wir rechnen f' nach: Sei $\varphi \in C_c^{\infty}(\mathbb{R})$. Dann ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| \varphi'(x) dx = -\int_{-\infty}^{0} x \varphi'(x) dx + \int_{0}^{\infty} x \varphi'(x) dx$$
$$= -x \varphi(x)|_{-\infty}^{0} + \int_{-\infty}^{0} \varphi(x) dx + x \varphi(x)|_{0}^{\infty} - \int_{0}^{\infty} \varphi(x) dx$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) \varphi(x) dx.$$

Was hat schwache Ableitung mit schwacher Konvergenz zu tun? Sei $f \in L^p(U)$ für $p \in (1, \infty)$. Dann gibt es eine Folge $f_k \in C_c^{\infty}(U)$ mit $f_k \to f$ in L^p . Es existiert $D^{\alpha} f_k$ für alle α und k.

Hat f eine α .te schwache Ableitung $D^{\alpha}f$, dann gilt $D^{\alpha}f_k \stackrel{w}{\to} D^{\alpha}f$:

 $^{^*}L^1_{\mathrm{loc}}(U)$ bedeutet lokal L^1 , d.h. für jedes $x \in U$ gibt es ein $\epsilon > 0$, so dass $f|_{B_{\epsilon}(x)} \in L^1(B_{\epsilon}(x))$ ist. † Strenggenommen ist dies eine Realisierung der schwachen Ableitung.

4. Schwache Konvergenz

Es ist zu zeigen $\ell(D^{\alpha}f_k) \to \ell(D^{\alpha}f)$ für alle $\ell \in (L^p)^*$. Identifizieren wir den Dualraum mit L^q für $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, dann ist zu zeigen:

$$\int_{U} (D^{\alpha} f_{k}) \varphi \operatorname{dvol} \to \int_{U} (D^{\alpha} f) \varphi \operatorname{dvol}$$

für alle $\varphi \in L^q(U)$. Wegen Dichtheit von $C_c^{\infty}(U)$ reicht dies für alle $\varphi \in C_c^{\infty}(U)$ zu zeigen. Dort ist es aber nach Definition der schwachen Ableitung äquivalent zu

$$\int_{U} (f_k - f) D^{\alpha} \varphi \operatorname{dvol} \to 0$$

Dies gilt wegen $|\int_U (f_k - f) D^{\alpha} \varphi dvol| \leq ||f_k - f||_{L^q} ||D^{\alpha} \varphi||_{L^p} \to 0.$

Die Konvergenz ist i.A. nicht stark $D^{\alpha}f_k \xrightarrow{w} D^{\alpha}f$. Dafür reicht es nicht, dass $f_k \to f$ in L^p geht.

Satz 4.0.12. Sei $p \in [1, \infty)$. Sei \mathbb{R}^n offen. Sei $W^{k,p}(\mathbb{R}^n) := \overline{C_c^{\infty}(\mathbb{R}^n)}^{\|.\|_{W^{k,p}}}$ mit

$$\|\varphi\|_{W^{k,p}} = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \le k} \|D^{\alpha}\varphi\|_{L^p}$$

für $\varphi \in C_c^{\infty}(\mathbb{R}^n)$. Dann ist $W^{k,p}$ ein Banachraum und als solcher isomorph zu

 $\{f \in L^p(\mathbb{R}^n) \mid \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq k : Es \ existieren \ die \ schwachen \ Ableitungen \ D^{\alpha}f \ und \ D^{\alpha}f \in L^p(\mathbb{R}^n)\}^*$

 $mit \ der \ W^{k,p}$ -Norm.

Analog ist $H^k(\mathbb{R}^n)$ als Hilbertraum isomorph zu

 $\{f \in L^2(\mathbb{R}^n) \mid \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq k : Es \ existieren \ die schwachen \ Ableitungen \ D^{\alpha}f$ und $D^{\alpha}f \in L^2(\mathbb{R}^n)\}$

 $mit\ der\ H^k$ -norm, s. $Beispiel\ 1.1.2.iii.$

Beweis. Eindimensionaler Fall, s. ÜA 20+32. Mehr Dimensionen gehen analog. \Box

Die H^k - und die $W^{k,2}$ -Norm sind äquivalent. Damit sind $H^k(\mathbb{R}^n)$ und $W^{k,2}(\mathbb{R}^n)$ als Banachräume isomorph.

Mehr zu Sobolevräumen später.

^{*}Man schreibt oft kurz $\{f \in L^p(\mathbb{R}^n) \mid \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq k : D^{\alpha}f \in L^p(\mathbb{R}^n)\}.$

5. Spektrum beschränkter Operatoren

Aus der linearen Algebra kennen wir für quadratische Matrizen den Begriff des Eigenwertes. Normale Matrizen A sind diagonalisierbar, d.h. es gibt eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren v_i (zu Eigenwerten $\lambda_i \in \mathbb{C}$) und wir haben die Spektralzerlegung: $Ax = \sum_i \lambda_i \langle v_i, x \rangle v_i$. Die Menge aller Eigenwerte bilden hier das Spektrum von A.

Wir wollen nun ähnliche Resultate für geeignete Operatoren in $\mathcal{L}(X) := \mathcal{L}(X, X)$ erhalten. Dazu werden den Begriff des Spektrums weiter fassen müssen als nur Eigenwerte.

5.1. Definition und Eigenschaften

Definition 5.1.1. Sei $A \in \mathcal{L}(X)$. Die Resolventenmenge $\rho(A)$ ist die Menge aller $\lambda \in \mathbb{C}$, so dass $A - \lambda \mathrm{Id}$ bijektiv ist. Dann nennen wir $R_{\lambda}(A) := (A - \lambda \mathrm{Id})^{-1}$ die Resolvente von A in λ . Die Menge $\sigma(A) := \mathbb{C} \setminus \rho(A)$ heißt Spektrum von A.

Nach dem Satz 3.2.1 vom beschränkten Inversen folgt aus der Bijektivität von $A-\lambda \mathrm{Id}$, dass $R_\lambda(A)$ beschränkt ist. (Für unbeschränkte Operatoren wird die Definition ganz analog sein, nur werden wir in der Definition der Resolventenmenge zusätzlich fordern, dass $A-\lambda \mathrm{Id}$ beschränktes Inverses hat, da es dort kein Automatismus ist.)

Aus welchen Gründen kann $\lambda \in \sigma(A)$ sein?

- $A \lambda \text{Id}$ ist nicht einmal injektiv: Dann gibt es ein $v \in X \setminus \{0\}$ mit $Av = \lambda v$. Solch ein v nennen wir Eigenvektor zum Eigenwert λ . Wir sagen auch λ liegt im Punktspektrum von A.
- $A \lambda \mathrm{Id}$ ist injektiv aber Bild $(A \lambda \mathrm{Id})$ ist nicht dicht. Dann sagt man λ ist im Residuenspektrum von A.
- $A \lambda \mathrm{Id}$ ist injektiv, nicht surjektiv, aber Bild $(A \lambda \mathrm{Id})$ ist dicht. Dann sagt man λ ist im stetigen Spektrum von A.

Als erste allgemeine Aussage zum Spektrum beschränkter Operatoren haben wir:

Satz 5.1.2. Sei $A \in \mathcal{L}(X) := \mathcal{L}(X,X)$. Dann ist das Spektrum von A eine kompakte nichtleere Teilmenge von \mathbb{C} mit $\sigma(A) \subset \overline{B_{\|A\|}(0)}$. Außerdem ist $\sigma(A') = \sigma(A)$ und $\sigma(A^*) = \overline{\sigma(A)}$.

Außerdem ist die Resolventenabbildung $\lambda \in \rho(A) \mapsto (A - \lambda \operatorname{Id})^{-1}$ analytisch, d.h. sie kann lokal als konvergente Potenzreihe mit Koeffizienten in $\mathcal{L}(X)$ geschrieben werden.

5. Spektrum beschränkter Operatoren

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass $\rho(A)$ offen ist: Dazu sei $\lambda_0 \in \rho(A)$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ derart, dass $|\lambda - \lambda_0| < \|(\lambda_0 - A)^{-1}\|^{-1}$. Dann ist

$$\lambda - A = (\lambda_0 - A) + (\lambda - \lambda_0) = (\lambda_0 - A)(\operatorname{Id} - (\lambda_0 - \lambda)(\lambda_0 - A)^{-1})$$

Da $|\lambda - \lambda_0| \|(\lambda_0 - A)^{-1}\| < 1$ ist, konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n (\lambda_0 - A)^{-n}$, und damit ist nach Satz 3.2.4 $\lambda - A$ invertierbar. Also ist $\rho(A)$ offen.

Aus obigem folgt insbesondere nach Satz 3.2.4

$$(\lambda - A)^{-1} = \left[\operatorname{Id} - (\lambda_0 - \lambda)(\lambda_0 - A)^{-1} \right]^{-1} (\lambda_0 - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \left((\lambda_0 - A)^{-1} \right)^{n+1} (\lambda_0 - \lambda)^n$$

und wir erhalten die gesuchte lokale Potenzreihenentwicklung mit den Koeffizienten $((\lambda_0 - A)^{-1})^{n+1} \in \mathcal{L}(X)$.

Da $\rho(A)$ offen ist, ist $\sigma(A)$ abgeschlossen. Für $|\lambda| > \|A\|$ ist

$$-R_{\lambda}(A) = (\lambda - A)^{-1} = \lambda^{-1} (\operatorname{Id} - \lambda^{-1} A)^{-1} = \lambda^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n} A^{n}$$
 (5.1)

absolut konvergent und damit $\lambda-A$ invertierbar. Somit ist $\sigma(A)\subset \overline{B_{\|A\|}(0)}$ beschränkt und damit kompakt.

Wir zeigen als nächstes, dass $\sigma(A)$ nichtleer ist: Annahme $\sigma(A) = \emptyset$. Dann ist die Resolventenabbildung auf ganz $\mathbb C$ definiert. Für $|\lambda| \to \infty$ (5.1) impliziert $||R_{\lambda}(A)|| \to 0$. Damit ist für jedes $x \in X$ und $f \in X^*$ dann $\lambda \in \mathbb C \mapsto f(R_{\lambda}(A)x) \in \mathbb C$ eine beschränkte komplexe Potenzreihe in λ . Nach dem Satz von Liouville* muss sie damit konstant sein – wegen $||R_{\lambda}(A)|| \to 0$ für $|\lambda| \to \infty$ sogar konstant Null. Nach Folgerung 2.3.4.ii ist damit $R_{\lambda}(A)x = 0$ für alle $x \in X$, also $R_{\lambda}(A) = 0$, was den Widerspruch gibt.

Es bleibt noch
$$\sigma(A') = \sigma(A)$$
 und $\sigma(A^*) = \overline{\sigma(A)}$: Wegen $(A - \lambda \operatorname{Id})' = A' - \lambda \operatorname{Id}$ und $(A - \lambda \operatorname{Id})^* = A^* - \overline{\lambda} \operatorname{Id}$ folgt dies mit Lemma 3.3.6.

Beweis. Sei $\gamma(t \in [0, 2\pi]) = re^{it}$ - also eine Kurve, die den Kreis von Radius r um die Null parametrisiert. Dann ist das Kurvenintegral, [3, Abschnitt 2.2.2],

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z^k} ds = \int_0^{2\pi} \frac{1}{r^k e^{\mathrm{i}kt}} r \mathrm{i} e^{\mathrm{i}t} dt = r^{1-k} \mathrm{i} \int_0^{2\pi} e^{\mathrm{i}(1-k)t} dt = 2\pi \mathrm{i} r^{1-k} \delta_{k1}.$$

Sei nun $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ die auf ganz $\mathbb C$ konvergente (und damit absolut konvergente Potenzreihe. Dann folgt

$$a_{\ell} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z^{\ell+1}} ds.$$

Andererseits ist

$$\left| \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z^{\ell+1}} ds \right| \le \|f\|_{\infty} r^{-\ell-1} 2\pi r$$

Lassen wir $r \to \infty$ gehen, folgt damit $a_{\ell} = 0$ für alle $\ell > 0$ und damit ist $f(z) = a_0$.

^{*}Satz von Liouville: Jede Potenzreihe, die auf ganz C konvergiert und als Funktion beschränkt ist,

Lemma 5.1.3. Sei $A \in \mathcal{L}(X)$.

- (i) Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von A. Dann ist λ entweder ein Eigenwert von A' oder im residuellen Spektrum von A'.
- (ii) Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ im residuellen Spektrum von A. Dann ist λ ein Eigenwert von A'.

Beweis. Zu (i): Sei $Ax_{\lambda} = \lambda x_{\lambda}$ für ein $x_{\lambda} \neq 0$. Angenommen λ ist kein Eigenwert von A'. Sei $x' \in X^*$. Dann ist $((A' - \lambda \operatorname{Id})x')(x_{\lambda}) = x'((A - \lambda \operatorname{Id})(x_{\lambda})) = 0$. Nach Hahn-Banach gibt es ein Element $y' \in X^*$ mit $y'(x_{\lambda}) = 1$. Also kann Bild $(A' - \lambda \operatorname{Id})$ nicht dicht in X^* sein und λ ist im residuellen Spektrum.

Zu (ii): Ist λ im residuellen Spektrum von A, dann gibt es ein $x_{\lambda} \in X \setminus \overline{\text{Bild}(A - \lambda \text{Id})}$. Nach Folgerung 2.3.6 existiert somit ein $x' \in X^* \setminus \{0\}$ mit $x'|_{\overline{\text{Bild}(A - \lambda \text{Id})}} = 0$. Dann gilt $((A' - \lambda \text{Id})x')(x) = x'((A - \lambda \text{Id})(x)) = 0$ für alle $x \in X$ und somit $(A' - \lambda \text{Id})x' = 0$. Also ist λ ein Eigenwert von A'.

Beispiel 5.1.4.

- (i) Sei $A: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ linear. Dann ist $A \lambda \mathrm{Id}$ genau dann invertierbar, wenn $\det(A \lambda \mathrm{Id}) \neq 0$ ist. Alle λ für die das nicht der Fall ist, sind Eigenwerte. Das Spektrum besteht hier also nur aus Punktspektrum n Eigenwerten (gezählt mit Vielfachheiten).
- (ii) Sei $L_p : (x_1, x_2, ...) \in \ell_p \to (x_2, x_3, ...) \in \ell_p$ der Linkshift $R_p : (x_1, x_2, ...) \in \ell_p \to (0, x_1, x_2, x_3, ...) \in \ell_p$ der Rechtshift für $1 . Es ist <math>||L_p|| = ||R_p|| = 1$ und $(L_p)' = R_q, (R_p)' = L_q$ für $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
 - (a) Eigenwerte für L_p : Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ und $(x_i)_i \in \ell_p$ mit $(L \lambda \operatorname{Id})(x_i) = 0$. Dann ist $x_{i+1} \lambda x_i = 0$ für alle $i \geq 1$ und damit $x_i = \lambda^{i-1} x_1$. Dann ist $\|(x_i)_i\|_{\ell_p}^p = |x_1|^p \sum_i |\lambda|^{p(i-1)}$. Dann muss, falls $x_1 \neq 0$ ist, $|\lambda| < 1$ sein, damit $(x_i)_i$ wirklich in ℓ_p ist. Damit sind alle λ mit $|\lambda| < 1$ Eigenwerte mit eindimensionalem Eigenraum aufgespannt durch $(1, \lambda, \lambda^2, \ldots)$.
 - (b) Eigenwerte für R_p : Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ und $(x_i)_i \in \ell_p$ mit $(R \lambda \operatorname{Id})(x_i) = 0$. Dann ist $x_i \lambda x_{i+1} = 0$ für alle $i \ge 1$ und $\lambda x_1 = 0$. Hier ist $x_i = 0$ für alle i die einzige Lösung. R_p besitzt also keine Eigenwerte.
 - (c) Aus (b) und letztem Lemma folgt, dass L_p keine residuelles Spektrum besitzen kann
 - (d) Ist $|\lambda| > 1 = ||L_p||$, dann ist $\lambda \in \rho(L_p)$ nach Satz 5.1.2. Analog für R_p .
 - (e) Für L_p bleibt $|\lambda|=1$ zu untersuchen: Da das Spektrum nach letztem Satz abgeschlossen ist und alle $\lambda \in B_1(0)$ Eigenwerte sind, müssen auch alle $\lambda \in S_1(0)$ im Spektrum liegen (aber sind keine Eigenwerte). Nach obigen Überlegungen kann $S_1(0)$ auch kein residuelles Spektrum sein, es muss also nur aus stetigem Spektrum bestehen.
 - (f) Für R_p und $|\lambda| = 1$ folgt aus letztem Lemma, dass alle $\lambda \in S_1(0)$ im stetigen Spektrum sind.

Vorl. 16

- 5. Spektrum beschränkter Operatoren
 - (g) Für R_p und $|\lambda| < 1$ folgt aus letztem Lemma und da R_p keine Eigenwerte hat, dass $B_1(0)$ reines residuelles Spektrum ist.
- (iii) Sei $X=C^0([0,1])$ und $A\colon \varphi\in X\mapsto (x\mapsto \int_0^x\varphi(s)ds)$. Dann besitzt A keine Eigenwerte: $A\varphi=\lambda\varphi$ impliziert $\int_0^x\varphi(s)ds=\lambda\varphi(x)$ für alle $x\in[0,1]$. Damit muss φ differenzierbar sein. Dann muss $\varphi=\lambda\varphi'$ und $\varphi(0)=0$ sein. Also $\varphi=0$.

Für $\lambda = 0$ ist $A - \lambda \mathrm{Id} = A$ also injektiv. Da für alle $\varphi \in X$ aber $A\varphi(0) = 0$ ist, kann das Bild nicht dicht sein. Es ist also 0 im residuellen Spektrum von A.

Sei nun $\lambda \neq 0$. Wie oben gezeigt ist $A - \lambda \mathrm{Id}$ injektiv. Wir zeigen nun, dass A surjektiv ist: Sei $\psi \in X$. Es ist A ein kompakter Operator, ÜA29. Nach der Fredholmalternative Satz 3.5.9 muss somit entweder $A\varphi = \lambda \varphi$ eine nichttriviale Lösung haben oder $(A - \lambda \mathrm{Id})\varphi = \psi$ genau eine Lösung. Der erste Fall kann nicht eintreten, da A keine Eigenwerte besitzt und ψ ist somit im Bild von A. Also ist $\lambda \in \rho(A)$.

Insgesamt ist also $\sigma(A) = \{0\}$ und 0 ist im residuellen Spektrum.

In Anwendungen kommen vor allem selbstadjungierte Operatoren auf Hilberträumen vor. Dort spielt das residuelle Spektrum keine Rolle:

Lemma 5.1.5. Sei H ein Hilbertraum und sei $A \in \mathcal{L}(H)$ selbstadjungiert. Dann ist $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$ und A hat kein residuelles Spektrum.

Beweis. Sei $\lambda = a + ib$ für $a, b \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$\|(A - \lambda \operatorname{Id})x\|^2 = \langle (A - \bar{\lambda}\operatorname{Id})(A - \lambda \operatorname{Id})x, x \rangle = \langle (A^* - a)(A - a)x, x \rangle + \langle b^2x, x \rangle$$
$$= \|(A - a)x\|^2 + |b|^2 \|x\|^2 \ge |b|^2 \|x\|^2.$$

Sei nun $b \neq 0$. Nach Lemma 3.2.2 ist damit Bild $(A - \lambda \operatorname{Id})$ abgeschlossen und $A - \lambda \operatorname{Id}: H \to \operatorname{Bild}(A - \lambda \operatorname{Id})$ invertierbar. Analog folgt $A - \lambda \operatorname{Id}: H \to \operatorname{Bild}(A - \lambda \operatorname{Id})$ invertierbar. Angenommen Bild $(A - \lambda \operatorname{Id}) \neq H$. Dann ist λ im residuellen Spektrum und somit nach Lemma 5.1.3 $\bar{\lambda}$ ein Eigenwert von $A^* - \bar{\lambda} \operatorname{Id} = A - \bar{\lambda} \operatorname{Id}$, was ein Widerspruch zu $A - \bar{\lambda} \operatorname{Id}: H \to \operatorname{Bild}(A - \bar{\lambda} \operatorname{Id})$ invertierbar wäre. Also muss $\operatorname{Bild}(A - \lambda \operatorname{Id}) = H$ und damit $\lambda \in \rho(A)$ sein. Also ist $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$.

Sei nun $\lambda \in \mathbb{R}$. Wäre λ im residuellen Spektrum von A, dann wäre wegen $A^* = A$ und Lemma 5.1.3 λ schon ein Eigenwert von A, was den Widerspruch gibt.

Die Abschätzung in $\sigma(A) \subset \overline{B_{\|A\|}(0)}$ ist im Allgemeinen nicht scharf. Um das etwas besser zu untersuchen, führen wir den Spektralradius ein:

Definition 5.1.6. Für $A \in \mathcal{L}(X)$ wird

$$r(A) := \sup\{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma(A)\}$$

Spektralradius von A genannt.

Nach Satz 5.1.2 gilt $r(A) \leq ||A||$.

Lemma 5.1.7. Es gilt $r(A) = \lim_{n \to \infty} ||A^n||^{\frac{1}{n}}$.

Beweis. Zuerst halten wir fest, dass nach Lemma 3.1.4 $\|A^{n+m}\| \leq \|A^n\| \|A^m\|$ gilt. Setzen wir $a_n = \ln \|A^n\|$, dann impliziert dies für n = pm + q mit $0 \leq q < m, p, g, n \in \mathbb{N}$, dass

$$a_n = pa_m + a_q$$
.

Für festes m folgt somit $\limsup_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}\leqslant \frac{a_m}{m}$. Lassen wir nun auch m gegen unendlich gehen, haben wir $\limsup_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}\leqslant \liminf_{m\to\infty}\frac{a_m}{m}$. Damit existiert $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}$ und somit auch $\lim_{n\to\infty}\|A^n\|^{\frac{1}{n}}$.

Sei $\mu \in \mathbb{C}$ mit $|\mu| > \lim_{n \to \infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}}$. Dann konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} \mu^{-n} A^n$ und ist nach Satz 3.2.4 gleich $(\mu^{-1}A - \operatorname{Id})^{-1}$. Somit ist $\mu \in \rho(A)$. Also ist $r(A) \leq \lim_{n \to \infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}}$.

Sei nun $|\mu| > r(A)$. Wir wollen nun zeigen, dass $|\mu| \geqslant \lim_{n \to \infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$ gilt. Da das Spektrum abgeschlossen ist, folgt damit direkt $r(A) \geqslant \lim_{n \to \infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$.

Für alle $\ell \in \mathcal{L}(X)^*$ definieren wir $f_{\ell}(\mu) := \ell((A - \mu \operatorname{Id})^{-1}$. Nach Satz 5.1.2 ist f_{ℓ} analytisch auf $\{\mu \mid |\mu| > r(A)\}$. Andererseits folgt aus obigen Überlegungen, dass $\lim_{n \to \infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}} \ge r(A)$ und $f_{\ell}(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \ell(A^n) \lambda^{-n-1}$ für alle $|\lambda| > \lim_{n \to \infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}}$. Sei $\nu = \lambda^{-1}$. Dann ist $p(\nu) := f_{\ell}(\nu^{-1})$ für alle $|\nu| \in (0, (\lim_{n \to \infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}})^{-1})$ die konvergente $\sum_{k=0}^{\infty} \ell(A^n) \nu^n$ Potenzreihe, welche damit auch in $\nu = 0$ konvergiert. D.h. $p(\nu)$ ist für alle $|\nu| < r(A)^{-1}$ lokal analytisch und für $|\nu| < (\lim_{n \to \infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}})^{-1}$ durch die obige Potenzreihe konkret gegeben. Damit ist konvergiert diese Potenzreihe aber schon auf ganz $|\nu| \in [0, r(A)^{-1})^*$ und damit auch $f_{\ell}(\mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \ell(A^n) \mu^{-n-1}$. Diese Konvergenz impliziert aber $\ell(A^n\mu^{-n-1}) = \ell(A^n)\mu^{-n-1} \to 0$ für $n \to \infty$. Also konvergiert $A^n\mu^{-n-1}$ schwach in $\mathcal{L}(X)$ gegen Null und ist damit nach Folgerung 4.0.7 beschränkt. Es gibt also ein C > 0 mit $\|A^n\mu^{-n-1}\| \le C$ und damit

$$||A^n||^{\frac{1}{n}} \leqslant C^{\frac{1}{n}} |\mu|^{\frac{n+1}{n}} \to |\mu|$$

für $n \to \infty$. Also ist $|\mu| \geqslant \lim_{n \to \infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}}$.

Lemma 5.1.8. Sei H ein Hilbertraum und sei $A \in \mathcal{L}(H)$ normal. Dann ist $||A^2|| = ||A||^2$ und damit ||A|| = r(A).

Beweis. Ist A normal, so auch A^2 und AA^* . Mit Lemma 3.3.8.iii folgt

$$||A^2||^2 = ||A^2(A^2)^*|| = ||(AA^*)^2|| = ||AA^*||^2 = ||A||^4$$

und damit $||A^2|| = ||A||^2$. Daraus folgt insbesondere

$$r(A) = \lim_{n \to \infty} ||A^{2n}||^{\frac{1}{2n}} = ||A||.$$

Vorl. 17

^{*/} Funktionentheorie, z.B. [5, Cor. 5.11].

5.2. Spektralsatz für kompakte normale Operatoren

Das Hauptresultat dieses Abschnittes wird ein Analogon des Spektralsatzes für normale Matrizen aus der linearen Algebra sein:

Satz 5.2.1 (Spektralsatz für kompakte normale Operatoren). Sei $A: H \to H$ ein kompakter normaler Operator auf einem Hilbertraum H. Dann gibt es ein (ggf. endliches) Orthonormalsystem v_1, v_2, \ldots von H sowie eine Nullfolge/endliche Folge μ_1, μ_2, \ldots in $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ mit $Ax = \sum_i \mu_i \langle v_i, x \rangle v_i$ und es gilt $\|A\| = \sup_i |\mu_i|$.

Bevor wir zu dem Beweis dieses Resultat kommen können, brauchen wir noch einige Vorbereitungen. Wir beginnen mit Allgemeinem zum Spektrum von kompakten Operatoren:

Lemma 5.2.2. Sei $A: X \to X$ ein kompakter Operator auf einem Banachraum X. Dann gilt

- (i) Ist dim $X = \infty$, dann ist $0 \in \sigma(A)$.
- (ii) Jedes Element in $\sigma(A)\setminus\{0\}$ ist ein Eigenwert mit endlichdimensionalem Eigenmum.
- (iii) Die Menge $\sigma(A)\setminus\{0\}$ ist abzählbar.
- (iv) $\sigma(A)$ hat höchstens einen Häufungspunkt die Null.

Beweis. (i) Angenommen $0 \notin \sigma(A)$. Dann ist A nach Definition des Spektrums bijektiv und damit ist nach dem Satz 3.2.1 vom beschränkten Inversen A^{-1} beschränkt. Nach Lemma 3.4.4 ist somit $\mathrm{Id} = AA^{-1}$ kompakt. Aus Beispiel 3.4.2.iii folgt somit, dass H endlich dimensional sein muss.

(ii) Sei $\lambda \in \sigma(A) \setminus \{0\}$ aber kein Eigenwert. Dann ist $C := A - \lambda \operatorname{Id} = -\lambda (\operatorname{Id} - \lambda^{-1} A)$ injektiv. Demnach ist nach der Fredholmalternative, Satz 3.5.9, $A - \lambda \operatorname{Id}$ bijektiv. Dann ist aber $\lambda \in \rho(A)$, was den Widerspruch gibt.

Aus $\lambda \in \sigma(A) \setminus \{0\}$ folgt, da $\lambda \operatorname{Id} - A$ dann Fredholm ist, dass $\ker(\lambda \operatorname{Id} - A)$ endlichdimensional ist.

(iii)+(iv) Sei $\epsilon > 0$. Dank (ii) reicht es sowohl für (iii) als auch für (iv) zu zeigen, dass $\{\lambda \in \sigma(A) \mid |\lambda| \ge \epsilon\}$ endlich ist: Nehmen wir an, dass dies nicht stimmt. Dann gibt es ein Folge λ_i und eine Folge $x_i \in X \setminus \{0\}$ mit $|\lambda_i| \ge \epsilon$, $Ax_i = \lambda_i x_i$ und $\lambda_n \ne \lambda_m$ für alle $n \ne m$.

Die Menge $\{x_i\}$ ist linear unabhängig: Denn wäre $x_{n+1} = \sum_{j=0}^n \alpha_j x_j$ und x_0, \dots, x_n linear unabhängig, dann wäre nach Anwendung von A

$$\lambda_{n+1} \sum_{j=0}^{n} \alpha_j x_j = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j \alpha_j x_j$$

und somit $\alpha_j = 0$ für alle j.

Wir setzen nun E_n :=span $\{x_1, \ldots, x_n\}$. Dann ist $E_i \subsetneq E_{i+1}$ und $A(E_i) \subset E_i$ und $(A - \lambda_i)E_i \subset E_{i-1}$. Dann gibt es nach Lemma 2.5.1 ein $y_n \in E_n$ mit $||y_n|| = 1$ und $\mathrm{dist}(y_n, E_{n-1}) > \frac{1}{2}$. Wir wollen nun zeigen, dass die beschränkte Folge Ay_i keine konvergente Teilfolge besitzen kann, was der Kompaktheit von A widerspricht:

Somit gilt für n > m

$$||A(y_n - y_m)|| = |\lambda_n| ||y_n - \underbrace{\lambda_n^{-1}(Ay_m + \lambda_n y_n - Ay_n)}_{\in E_{n-1}}|| \ge \epsilon \frac{1}{2}.$$

Also kann Ay_i keine konvergente Teilfolge besitzen.

In Beispiel 5.1.4.iii haben wir ein Beispiel eines kompakten Operators gesehen, der nur die Null im Spektrum hatte.

Allgemeines zu Spektren normaler Operatoren:

Lemma 5.2.3. Sei $A \in \mathcal{L}(H)$ normal. Dann gilt

- (i) Ist $Ax = \lambda x$, dann $A^*x = \overline{\lambda}x$.
- (ii) Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerte zu A sind orthogonal.
- (iii) Es gibt ein $\lambda \in \sigma(A)$ mit $|\lambda| = ||A||$.

Beweis. (i) Es ist auch $A - \lambda$ normal und $(A - \lambda)^* = A^* - \overline{\lambda}$. Damit folgt

$$\|(A^* - \overline{\lambda})x\|^2 = \langle (A - \lambda)(A^* - \overline{\lambda})x, x \rangle = \langle (A^* - \overline{\lambda})(A - \lambda)x \rangle = (\|A - \lambda)x\|^2.$$

(ii) Sei $Ax = \lambda x$, $Ay = \mu y$ für $x, y \in H \setminus \{0\}$ und $\lambda \neq \mu$. Dann folgt aus

$$\lambda \langle x, y \rangle = \langle Ax, y \rangle = \langle x, A^*y \rangle \stackrel{(i)}{=} \langle x, \overline{u}y \rangle = u \langle x, y \rangle,$$

dass $\langle x, y \rangle = 0$ ist.

(iii) Folgt direkt aus Lemma 5.1.8.

Wir kommen nun zum Beweis des Spektralsatzes für kompakte normale Operatoren:

Beweis von Satz 5.2.1. Sei μ_i die Folge der paarweisen verschiedenen Eigenwerte von A, die ungleich Null sind. Das dies höchstens abzählbar viele sind und diese endliche Multiplizität haben, folgt aus Lemma 5.2.2. Sei $\{e_{i1},\ldots,e_{id_i}\}$ eine Orthonormalbasis von $\ker{(A-\mu_i)}$. Dann ist nach Lemma 5.2.3.ii $\{e_{11},\ldots,e_{1d_1},e_{21},\ldots,e_{2d_2},\ldots,e_{jd_j},\ldots\}$ ist eine Orthonormalbasis von $\bigoplus_i \ker{(A-\mu_i)}$ und $\ker{A} \perp e_{ij}$ für alle e_{ij} . Somit ist $H_1:=\ker{A} \oplus \overline{\operatorname{span}\{e_{ij} \mid i \in \mathbb{N}, 1 \leqslant j \leqslant d_i\}}$ ist ein abgeschlossener Unterraum von H.

Wir wollen $H = H_1$ zeigen: Sei nun $H_2 := H_1^{\perp}$. Dann ist für alle $h \in H_2$

$$\langle Ah, e_{ij} \rangle = \langle h, A^*e_{ij} \rangle \stackrel{Lem}{=} \stackrel{5.2.3.i}{=} \langle h, \overline{\lambda_i}e_{ij} \rangle = 0.$$

Analog erhalten $Ah \perp \ker A$. Damit gilt $AH_2 \subset H_2$. Somit erhalten wir mit $A|_{H_2} \colon H_2 \to H_2$ einen Operator auf H_2 , welcher nach Konstruktion noch immer kompakt und normal ist. Nach Lemma 5.2.2 folgt das jedes Element in $\sigma(A|_{H_2})\setminus\{0\}$ schon ein Eigenwert wäre und damit auch ein Eigenwert von A wäre und der zugehörige Eigenvektor wäre schon in H_1 . Nach Lemma 5.2.3.iii gibt es aber ein $\lambda \in \sigma(A|_{H_2})$ mit $|\lambda| = ||A|_{H_2}||$. Also muss $A|_{H_2} = 0$ sein und somit $H_2 \subset \ker A$ sein. Also ist $H_2 = \{0\}$ und damit $H_2 \subset \ker A$ sein.

Damit kann jedes $x \in H$ als $x = y + \sum_{k} \langle x, e_k \rangle e_k$ mit $y \in \ker A$ dargestellt werden und damit ist $Ax = \sum_{k} \langle x, e_k \rangle \mu_k e_k$.

Bemerkung 5.2.4. Sei andererseits $Ax = \sum_i \mu_i \langle x, v_i \rangle v_i$ für ein Orthonormalsystem v_1, \ldots von H (nicht unbedingt eine Basis) und eine Nullfolge/endl. Folge $\mu_i \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Dann ist $A \colon H \to H$ normal:

Es ist $A^*x = \sum_i \overline{\mu_i} \langle x, v_i \rangle v_i$ und damit $AA^*x = A^*Ax = \sum_i |\mu_i|^2 \langle x, v_i \rangle v_i$. Außerdem ist A kompakt: Ist die Summe endlich, dann ist A sogar ein Operator endlichen Rangs und damit kompakt. Sei nun die Summe nicht endlich und $A_k = \sum_{i=1}^k \mu_i \langle x, v_i \rangle v_i$. Dann ist

$$||Ax - A_k x||^2 \le \sum_{i>k} |\mu_i|^2 \langle x, v_i \rangle^2 \le |\mu_k|^2 ||x||^2.$$

Da die μ_k eine Nullfolge sind, folgt $||A - A_k|| \to 0$ für $k \to \infty$. Somit muss nach Folgerung 3.4.5 auch A kompakt sein.

5.3. Spektrum beschränkter selbstadjungierter Operatoren

Wir wollen nun allgemeiner einen Spektralsatz für beschränkte selbstadjungierte Operatoren erhalten. Hier muss es nun keine Eigenwerte mehr geben: Z.B. ist der Multiplikationsoperator $M_f \colon L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ für f stetig, beschränkt und streng monoton steigend, beschränkt, selbstadjungiert und das Spektrum $\sigma(M_f) = \overline{\text{Bild } f}$ ist ein rein stetiges Spektrum, ÜA 35.

Aus Lemma 5.1.5 wissen wir schon, dass für A beschränkt und selbstadjungiert $\sigma(A) \subset [0, \infty)$ ist und kein residuelles Spektrum enthält. I.A. kann es aber sowohl Eigenwerte als auch stetiges Spektrum geben.

Trotzdem werden wir eine Art Verallgemeinerung des Spektralsatzes für kompakte normale Operatoren erhalten, am Ende wird die Summe i.A. ein operatorwertiges Integral sein.

Den Spektralsatz im letzten Abschnitt war für kompakte normale Operatoren. Neben selbstadjungierten Operatoren gibt es als wichtige normale Operatoren noch die unitären Operatoren. Für diese kann man (recht analog) auch einen Spektralsatz finden.

5.3.1. Stetiges Funktionalkalkül

Satz 5.3.1. Sei A ein beschränkter selbstadjungierter Operator auf einem Hilbertraum H. Dann gibt es genau einen beschränkten Operator $\varphi \colon C^0(\sigma(A)) \to \mathcal{L}(H)$, so dass gilt:

- (i) φ ist ein *-Algebrenhomomorphismus, d.h. $\varphi(fg) = \varphi(f)\varphi(g)$, $\varphi(\lambda f) = \lambda \varphi(f)$, $\varphi(1) = \operatorname{Id}$, $\varphi(f) = \varphi(f)^*$ für alle $f, g \in C^0(\sigma(A))$ und $\lambda \in \mathbb{C}$.
- (ii) $\varphi(id) = A$.

Außerdem gilt es dann insbesondere für $f \in C^0(\sigma(A))$:

- (a) Aus $Ax = \lambda x$ folgt $\varphi(f)x = f(\lambda)x$.
- $(b) \ \sigma(\varphi(f)) = \{f(\lambda) | \lambda \in \sigma(A)\}$
- (c) Aus f reell und $f \ge 0$ folgt $\varphi(f) \ge 0$, d.h. $\langle \varphi(f)x, x \rangle \ge 0$ für alle $x \in H$.
- (d) $\|\varphi(f)\| = \|f\|_{C^0}$ (φ ist also isometrisch).

Beweis. (i) und (ii) bestimmen das φ auf komplexen Polynomen (eingeschränkt auf $C^0(\sigma(A))$): Ist $p(x) = \sum_{k=0}^n a_n x^n$ ein solches Polynom, sei $\varphi(p) := p(A) := \sum_{k=0}^n a_n A^n$. Dann ist $p(A)^* = \overline{p}(A)$.

Sei $\lambda \in \sigma(A)$. Dann ist $p(x) - p(\lambda) = (x - \lambda)q(x)$ für ein Polynom q. Damit folgt $p(A) - p(\lambda) \operatorname{Id} = (A - \lambda)q(A)$. Angenommen $p(A) - p(\lambda) \operatorname{Id} = (A - \lambda)$ wäre invertierbar, dann wäre $\operatorname{Id} = (A - \lambda)q(A)(p(A) - p(\lambda)\operatorname{Id})^{-1} = q(A)(p(A) - p(\lambda)\operatorname{Id})^{-1}(A - \lambda)$ und somit wäre auch $(A - \lambda)$ invertierbar, was $\lambda \in \sigma(A)$ widerspricht. Also ist $p(\lambda) \in \sigma(p(A))$.

Sei anderereseits $\lambda \in \sigma(p(A))$ und $p(x) - \lambda = a(x - \lambda_1) \cdot \dots \cdot (x - \lambda_n)$. Dann ist $p(A) - \lambda \operatorname{Id} = a(A - \lambda_1 \operatorname{Id}) \cdot \dots \cdot (A - \lambda_n \operatorname{Id})$. Falls $\lambda_i \notin \sigma(A)$ für $i = 1, \dots, n$ wäre, wären alle Faktoren $(A - \lambda_i \operatorname{Id})$ invertierbar und somit auch $p(A) - \lambda \operatorname{Id}$, was ein Widerspruch zu $\lambda \in \sigma(p(A))$ wäre. Also ist für mindestens ein $i \lambda_i \in \sigma(A)$ und damit $\lambda = p(\lambda_i)$.

Als nächstes zeigen wir $||p(A)|| = \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |p(\lambda)|$, was $||\varphi(p)||_{\mathcal{L}(H)} = ||p||_{C^0(\sigma(A))}$ entspricht.

Es ist

$$||p(A)||^2 = ||p(A)^*p(A)|| = ||(\bar{p} \cdot p)(A)|| = \sup_{\lambda \in \sigma((\bar{p} \cdot p)(A))} |\lambda|$$

$$\stackrel{(b)}{=} \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |(\bar{p} \cdot p)(\lambda)| = \left(\sup_{\lambda \in \sigma(A)} |p(\lambda)|\right)^2,$$

wobei die dritte Gleichheit aus Lemma 5.1.8 und $(\bar{p} \cdot p)(A)$ selbstadjungiert.

Nach dem Satz von Weierstrass* sind die komplexen Polynome dicht in $C^0(\sigma(A))$. Damit hat φ zunächst definiert auf den komplexen Polynomen eine eindeutige lineare stetige

Vorl. 18

Fortsetzung zu $\varphi \colon C^0(\sigma(A)) \to \mathcal{L}(H)$. Eigenschaft (i) für f, g komplexe Polynome per Konstruktion und auf ganz $C^0(\sigma(A))$ aufgrund der Rechenregeln für Grenzwerte.

Damit ist die Existenz und Eindeutigkeit von φ mit Eigenschaften (i) und (ii) gezeigt. (a), (c) und (d) stimmt auf komplexen Polynomen per Konstruktion und damit nach Grenzwertbildung auch auf $f \in C^0(\sigma(A))$.

Es bleibt (b) für allgemeines $f \in C^0(\sigma(A))$: ÜA.

Lemma 5.3.2. Sei A ein beschränkter selbstadjungierter Operator auf einem Hilbertraum H. Kommutiert $B \in \mathcal{L}(H)$ mit A, dann kommutiert f(A) mit B für alle $f \in C^0(\sigma(A))$.

Beweis. Für f ein komplexes Polynom folgt es durch direktes Nachrechnen. Für allgemeines f erhält man dann wieder durch Approximation durch Polynome.

Beispiel 5.3.3. Sei $A \in \mathcal{L}(H)$ kompakt und selbstadjungiert. Dann ist nach letztem Spektralsatz $A = \sum_i \mu_i \langle ., v_i \rangle v_i$ für ein Orthonormalsystem v_i von H und eine endliche oder Nullfolge μ_i . Sei $f \in C^0(\sigma(A))$. Dann ist

$$f(A) = \sum_{i} f(\mu_i) \langle ., v_i \rangle v_i + f(0) P_{\ker A},$$

wobei $P_{\ker A}$ die Orthogonalprojektion auf ker A ist.

Das sieht man direkt für Polynome und der Rest folgt mit Konvergenz.

Bemerkung 5.3.4. Die Menge $\{\varphi(f)\mid f\in C^0(\sigma(A))\}\subset \mathcal{L}(H)$ ist eine abelsche Algebra, die unter Bildung der Adjungierten abgeschlossen ist. Da $C^0(\sigma(A))$ vollständig ist und φ isometrisch ist, ist $\{f(A)\mid f\in C^0(\sigma(A))\}\subset \mathcal{L}(H)$ abgeschlossen. Damit ist $\{f(A)\mid f\in C^0(\sigma(A))\}$ eine abelsche C^* -Algebra*. Das $\{f(A)\mid f\in C^0(\sigma(A))\}$ und $C^0(\sigma(A))$ isometrisch isomorph sind, ist ein Spezialfall des Gelfand-Naimark-Theorems † .

Wir wollen das Funktionalkalkül als nächstes für die Definition einer Wurzel von nichtnegativen selbstadjungierten beschränkten Operatoren anwenden. Dazu zunächst:

Definition 5.3.5. Ein Operator $A \in \mathcal{L}(H)$ heißt *nichtnegativ*, wenn $\langle Au, u \rangle$ reell und nichtnegativ für alle $u \in H$ ist. Wir schreiben dann $A \geqslant 0$. Für $A, B \in \mathcal{L}(H)$ schreiben wir $A \geqslant B$, wenn $A - B \geqslant 0$ ist.[‡]

Beispiel 5.3.6. Sei $H = H_1 \oplus H_2$ als direkte Summe von Hilberträumen und $P: H_1 \oplus H_2 \to H_1 \oplus H_2$, $(u, v) \mapsto (u, 0)$, die Orthogonalprojektion auf H_1 . Dann ist P positiv:

$$\langle P(u,v),(u,v)\rangle = \langle (u,0),(u,v)\rangle = ||u||_{H_1}^2 \geqslant 0.$$

Lemma 5.3.7. Sei $A \in \mathcal{L}(H)$ selbstadjungiert und nichtnegativ. Dann gilt

^{*}https://en.wikipedia.org/wiki/C*-algebra – $\{f(A) \mid f \in C^0(\sigma(A))\} \subset \mathcal{L}(H)$ ist sogar die kleinste C^* -Algebra in $\mathcal{L}(H)$, die A enthält (die von A erzeugte C^* -Algebra).

[†]https://de.wikipedia.org/wiki/Satz_von_Gelfand-Neumark

 $^{^{\}ddagger}$ ' \geqslant ' definiert eine partielle Ordnung auf $\mathcal{L}(H)$.

- (i) $\sigma(A) \subset [0, \infty)$
- (ii) (Existenz und Eindeutigkeit einer Wurzel) Es gibt genau einen selbstadjungierten nichtnegativen Operator B mit $B^2 = A$.
- (iii) Sei auch $B \in \mathcal{L}(H)$ selbstadjungiert und nichtnegativ. Dann ist AB genau dann ein selbstadjungierter nichtnegativer Operator, wenn A mit B kommutiert.

Beweis. ÜA40 bis auf die Eindeutigkeit der Wurzel:

Seien B,C selbstadjungierte nichtnegative Operatoren mit $A=B^2=C^2$ und $u\in H$. Wir setzen v=(B-C)u. Da B und C beide nichtnegativ sind, ist $\langle Bv,v\rangle\geqslant 0$ und $\langle Cv,v\rangle\geqslant 0$. Andererseits ist $\langle (B+C)v,v\rangle=\langle (B+C)(B-C)v,v\rangle=0$. Also ist $\langle Cv,v\rangle=\langle Bv,v\rangle=0$.

Da B selbstadjungiert und nichtnegativ ist, gibt es einen selbstadjungierten nichtnegativen Operator T mit $B=T^2$. Für diesen gilt dann $\|Tv\|^2=\langle T^2v,v\rangle=\langle Bv,v\rangle=0$ und damit Bv=T(Tv)=0. Analog folgt Cv=0. Insgesamt ist somit $\|(B-C)u\|^2=\langle (B-C)(B-C)u,u\rangle=\langle Bv-Cv,u\rangle=0$, also B=C.

Lemma 5.3.8. Sei $H = H_1 \oplus H_2$ als direkte Summe von Hilberträumen.

- (i) Die Orthogonalprojektion $P: H_1 \oplus H_2 \to H_1 \oplus H_2$, $(v, w) \mapsto (v, 0)$, ist selbstadjungiert.
- (ii) $Sei B \in \mathcal{L}(H)$ selbstadjungiert und sei P die Orthogonalprojektion auf ker B.* Dann kommutiert jeder beschränkte Operator, der mit B kommutiert auch mit P.

Beweis. (i) ÜA

(ii) Sei $C \in \mathcal{L}(H)$ mit BC = CB. Sei $v \in \ker B$. Dann ist BCv = CBv = 0, also $Cv \in \ker B$. Damit folgt PCPu = CPu für alle $u \in H$.

Da B selbstadjungiert ist, ist $C^*B = (BC)^* = (CB)^* = BC^*$ und damit analog zu oben $PC^*Pu = C^*Pu$ für alle $u \in H$.

Zusammen mit (i) erhalten wir

$$PC = (C^*P)^* = (PC^*P)^* = PCP = CP.$$

5.3.2. Spektralfamilie

Definition 5.3.9. Eine beschränkte Spektralfamilie auf einem Hilbertraum H ist eine Abbildung $E: \mathbb{R} \to \mathcal{L}(H)$ mit folgenden Eigenschaften:

- (i) $E_{\lambda} := E(\lambda)$ ist für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Projektionsoperator, d.h. $E_{\lambda}^2 = E_{\lambda}$.
- (ii) Aus $\lambda > \mu$, folgt $E_{\lambda} \geqslant E_{\mu}$.

^{*}Also $P: \ker B \oplus (\ker B)^{\perp} \to \ker B \oplus (\ker B)^{\perp}, (u, v) \mapsto (u, 0).$

- 5. Spektrum beschränkter Operatoren
- (iii) Die Familie $(E_{\lambda})_{{\lambda} \in \mathbb{R}}$ ist stark linksstetig, d.h. für alle ${\mu} \in \mathbb{R}$ und ${u} \in H$ gilt

$$\lim_{\lambda \nearrow u} E_{\lambda} u = E_{\mu} u.$$

(iv) Es gibt $m, M \in \mathbb{R}$ mit $E_{\lambda} = 0$ für alle $\lambda \leq m$ und $E_{\lambda} = \text{Id}$ für alle $\lambda > M$.

Wir nennen das größte solche m bzw. das kleinste solche M das Infimum bzw. Supremum der Spektralfamilie.

Sei nun E_{λ} wie in letzter Definition. Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stetig. Sei $\epsilon > 0$. Sei Π eine Zerlegung von $[m, M + \epsilon]$ der Länge n + 1, d.h. es ist eine endliche Folge von reellen Zahlen $(\lambda_k)_{k=0}^n$ mit $m = \lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_{n-1} < \lambda_n = M + \epsilon$. Sei $|\Pi| = \max_{1 \le k \le n} (\lambda_k - \lambda_{k-1})$. Sei \mathbb{Z} eine Zwischenzerlegung von Π , d.h. es ist eine endliche Folge von reellen Zahlen $(\mu_k)_{k=1}^n$ mit $\mu_i \in [\lambda_{i-1}, \lambda_i]$. Wir setzen

$$A_{f,\Pi,\mathcal{Z}} := \sum_{i=1}^{n} f(\mu_i) (E_{\lambda_i} - E_{\lambda_{i-1}}).$$

Dann ist $A_{f,\Pi,\mathcal{Z}} \in \mathcal{L}(H)$ und nach letztem Lemma für reelle f auch selbstadjungiert.

Lemma 5.3.10. Sei $(E_{\lambda})_{{\lambda} \in \mathbb{R}}$ eine beschränkte Spektralfamilie mit Infimum m und Supremum M und sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stetig. Dann gibt es genau ein $A \in \mathcal{L}(H)$, so dass es für alle $\gamma, \epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt mit $||A_{f,\Pi,\mathcal{Z}} - A|| < \gamma$ für jede Zerlegung Π von $[m, M + \epsilon]$ mit $|\Pi| < \delta$ und Zwischenzerlegung \mathcal{Z} von Π .

Der Operator A hängt nur von der Spektralfamilie und $f|_{[m,M]}$ ab.

Beweis. Sei $\gamma, \epsilon > 0$. Dann ist f auf dem kompakten Intervall $[m, M + \epsilon]$ gleichmäßig stetig. Damit gibt es ein $\delta > 0$, so dass $|f(\lambda) - f(\lambda')| < \frac{\gamma}{2}$ für alle $\lambda, \lambda' \in [m, M + \epsilon]$ mit $|\lambda' - \lambda| < \delta$.

Wir zeigen zunächst, dass für zwei Zerlegungen Π und Π' von $[m, M + \epsilon]$ mit $|\Pi| \leq \delta$, $|\Pi'| \leq \delta$ und Zwischenzerlegungen \mathcal{Z} von Π bzw. \mathcal{Z}' von Π'

$$||A_{f,\Pi,\mathcal{Z}} - A_{f,\Pi',\mathcal{Z}'}|| < \gamma$$

gilt:

Dazu sei $\Pi=(\lambda_k)_{k=0}^n$ und $\mathcal{Z}=(\mu_k)_{k=1}^n$. Sei $\tilde{\Pi}=(\tilde{\lambda}_k)_{k=0}^{\tilde{n}}$ die Zerlegung von $[m,M+\epsilon]$, die aus allen Folgengliedern von Π und Π' besteht. Sei $\tilde{\mathcal{Z}}=(\tilde{\mu}_k)_{k=1}^{\tilde{n}}$ eine Zwischenzerlegung von $\tilde{\Pi}$ und $j\in\{0,\ldots,\tilde{n}\}\mapsto k_j\in\{0,\ldots,n\}$ die Abbildung definiert durch $\tilde{\lambda}_{k_j}=\lambda_j$. Damit ist

$$A_{f,\tilde{\Pi},\tilde{Z}} := \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=k_{i-1}+1}^{k_i} f(\tilde{\mu}_j) (E_{\tilde{\lambda}_j} - E_{\tilde{\lambda}_{j-1}})$$

und somit

$$\begin{split} |\langle (A_{f,\Pi,\mathcal{Z}} - A_{f,\tilde{\Pi},\tilde{\mathcal{Z}}})u,u \rangle| &= \left| \sum_{i=1}^n \sum_{j=k_{i-1}+1}^{k_i} (f(\mu_j) - f(\tilde{\mu}_j)) \langle (E_{\tilde{\lambda}_j} - E_{\tilde{\lambda}_{j-1}})u,u \rangle \right| \\ &\leqslant \sum_{i=1}^n \sum_{j=k_{i-1}+1}^{k_i} |f(\mu_j) - f(\tilde{\mu}_j)| \langle (E_{\tilde{\lambda}_j} - E_{\tilde{\lambda}_{j-1}})u,u \rangle \\ &\leqslant \sum_{i=1}^f \sum_{j=k_{i-1}+1}^{k_i} |f(\mu_j) - f(\tilde{\mu}_j)| \langle (E_{\tilde{\lambda}_j} - E_{\tilde{\lambda}_{j-1}})u,u \rangle \\ &\leqslant \sum_{i=1}^f \sum_{j=k_{i-1}+1}^{k_i} |f(\mu_j) - f(\tilde{\mu}_j)| \langle (E_{\tilde{\lambda}_j} - E_{\tilde{\lambda}_{j-1}})u,u \rangle \\ &\leqslant \sum_{i=1}^f \sum_{j=k_{i-1}+1}^{k_i} |f(\mu_j) - f(\tilde{\mu}_j)| \langle (E_{\tilde{\lambda}_j} - E_{\tilde{\lambda}_{j-1}})u,u \rangle \\ &\leqslant \sum_{i=1}^f \sum_{j=k_{i-1}+1}^{k_i} |f(\mu_j) - f(\tilde{\mu}_j)| \langle (E_{\tilde{\lambda}_j} - E_{\tilde{\lambda}_{j-1}})u,u \rangle \\ &\leqslant \sum_{i=1}^f \sum_{j=k_{i-1}+1}^{k_i} |f(\mu_j) - f(\tilde{\mu}_j)| \langle (E_{\tilde{\lambda}_j} - E_{\tilde{\lambda}_{j-1}})u,u \rangle \\ &\leqslant \sum_{i=1}^f \sum_{j=k_{i-1}+1}^{k_i} |f(\mu_j) - f(\tilde{\mu}_j)| \langle (E_{\tilde{\lambda}_j} - E_{\tilde{\lambda}_{j-1}})u,u \rangle \\ &\leqslant \sum_{i=1}^f \sum_{j=k_{i-1}+1}^{k_i} |f(\mu_j) - f(\tilde{\mu}_j)| \langle (E_{\tilde{\lambda}_j} - E_{\tilde{\lambda}_{j-1}})u,u \rangle \\ &\leqslant \sum_{i=1}^f \sum_{j=k_{i-1}+1}^{k_i} |f(\mu_j) - f(\tilde{\mu}_j)| \langle (E_{\tilde{\lambda}_j} - E_{\tilde{\lambda}_{j-1}})u,u \rangle \\ &\leqslant \sum_{i=1}^f \sum_{j=k_{i-1}+1}^{k_i} |f(\mu_j) - f(\tilde{\mu}_j)| \langle (E_{\tilde{\lambda}_j} - E_{\tilde{\lambda}_{j-1}})u,u \rangle \\ &\leqslant \sum_{i=1}^f \sum_{j=k_{i-1}+1}^{k_i} |f(\mu_j) - f(\tilde{\mu}_j)| \langle (E_{\tilde{\lambda}_j} - E_{\tilde{\lambda}_{j-1}})u,u \rangle \\ &\leqslant \sum_{i=1}^f \sum_{j=k_{i-1}+1}^{k_i} |f(\mu_j) - f(\tilde{\mu}_j)| \langle (E_{\tilde{\lambda}_j} - E_{\tilde{\lambda}_{j-1}})u,u \rangle \\ &\leqslant \sum_{i=1}^f \sum_{j=k_{i-1}+1}^{k_i} |f(\mu_j) - f(\tilde{\mu}_j)| \langle (E_{\tilde{\lambda}_j} - E_{\tilde{\lambda}_{j-1}})u,u \rangle \\ &\leqslant \sum_{i=1}^f \sum_{j=k_{i-1}+1}^{k_i} |f(\mu_j) - f(\tilde{\mu}_j)| \langle (E_{\tilde{\lambda}_j} - E_{\tilde{\lambda}_{j-1}})u,u \rangle \\ &\leqslant \sum_{i=1}^f \sum_{j=k_{i-1}+1}^{k_i} |f(\mu_j) - f(\tilde{\mu}_j)| \langle (E_{\tilde{\lambda}_j} - E_{\tilde{\lambda}_j})u,u \rangle \\ &\leqslant \sum_{i=1}^f \sum_{j=k_{i-1}+1}^{k_i} |f(\mu_j) - f(\tilde{\mu}_j)| \langle (E_{\tilde{\lambda}_j} - E_{\tilde{\lambda}_j})u,u \rangle \\ &\leqslant \sum_{i=1}^f \sum_{j=k_{i-1}+1}^{k_i} |f(\mu_j) - f(\tilde{\mu}_j)| \langle (E_{\tilde{\lambda}_j} - E_{\tilde{\lambda}_j})u,u \rangle \\ &\leqslant \sum_{i=1}^f \sum_{j=k_{i-1}+1}^{k_i} |f(\mu_j) - f(\tilde{\mu}_j)| \langle (E_{\tilde{\lambda}_j} - E_{\tilde{\lambda}_j})u,u \rangle \\ &\leqslant \sum_{i=1}^f \sum_{j=k_{i-1}+1}^{k_i} |f(\mu_j) - f(\tilde{\mu}_j)| \langle (E_{\tilde{\lambda}_j} - E_{\tilde{\lambda}_j})u,u \rangle \\ &\leqslant \sum_{i=1}^f \sum_{j=k_{i-1}+1}^{k_i} |f(\mu_j) - f(\tilde{\mu}_j)| \langle (E_{\tilde{\lambda}_j} - E_{\tilde{\lambda}_j})u,u \rangle$$

Mit ÜA 23 folgt damit $||A_{f,\Pi,\mathcal{Z}} - A_{f,\tilde{\Pi},\tilde{\mathcal{Z}}}|| < \frac{\gamma}{2}$ und somit

$$||A_{f,\Pi,\mathcal{Z}} - A_{f,\Pi',\mathcal{Z}'}|| \leq ||A_{f,\Pi,\mathcal{Z}} - A_{f,\tilde{\Pi},\tilde{\mathcal{Z}}}|| + ||A_{f,\Pi',\mathcal{Z}'} - A_{f,\tilde{\Pi},\tilde{\mathcal{Z}}}|| < \gamma.$$

Wir wählen als nächstes eine Folge von Zerlegungen $(\Pi_n)_{n=1}^{\infty}$ von $[m, M + \epsilon]$ mit $|\Pi_n| \to 0$ für $n \to \infty$ mit zugehörigen Zwischenzerlegungen \mathcal{Z}_n und zeigen, dass $A_{f,\Pi_n,\mathcal{Z}_n}$ in $\mathcal{L}(H)$ eine Cauchyfolge ist:

Es gibt ein $N \in \mathbb{N}_{>0}$ mit $|\Pi_n| < \delta$ für alle $n \ge N$. Aus obigen Überlegungen folgt dann $\|A_{f,\Pi_k,\mathcal{Z}_k} - A_{f,\Pi_\ell,\mathcal{Z}_\ell}\| < \gamma$ für alle $k,\ell \ge N$. Damit ist $A_{f,\Pi_n,\mathcal{Z}_n}$ eine Cauchyfolge und wegen Vollständigkeit von $\mathcal{L}(H)$ konvergiert diese zu einem $A \in \mathcal{L}(H)$. Die obige Betrachtung der gemeinsamen Verfeinerung zweier Zerlegungen zeigt, dass A nicht von der Wahl der Folge der Zerlegungen abhängt, so lange $|\Pi_n| \to 0$ gilt.

Definition 5.3.11. Sei $(E_{\lambda})_{{\lambda} \in \mathbb{R}}$ eine beschränkte Spektralfamilie und sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stetig. Für den dazu gehörigen Operator A aus letztem Lemma schreiben wir symbolisch

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) dE_{\lambda}.$$

Die Funktion $\lambda \in \mathbb{R} \mapsto \langle E_{\lambda} u, u \rangle$ für jedes $u \in H$ wegen (ii) aus Definition 5.3.9 eine monoton steigende Funktion.

Folgerung 5.3.12. Sei $(E_{\lambda})_{{\lambda} \in \mathbb{R}}$ eine beschränkte Spektralfamilie und sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stetig. Für den dazu gehörigen Operator A aus letztem Lemma und $u, v \in H$ gilt dann

$$\langle Au, u \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) d\langle E_{\lambda}u, u \rangle$$

als Riemann-Stieltjes-Integral.*

^{*}Sei $f \colon [a,b] \to \mathbb{C}$ und $\mathcal{Z}_n = (x_i)_{i=0}^n$ Zerlegungen von [a,b], also $a=x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$, mit $|\mathcal{Z}_n| \to 0$ für $n \to \infty$.

5. Spektrum beschränkter Operatoren

Das Integral in der Folgerung geht zwar über \mathbb{R} , aber da E_{λ} für $\lambda \leq m$ gleich Null und für $\lambda \geq M + \epsilon$ gleich Id ist, ist es in Wirklichkeit ein Integral $\int_{m}^{M+\epsilon}$. (Das $+\epsilon$ ist aber wichtig, weil man sonst den Anteil am Spektrum der von $E_{M+\epsilon} - E_{M} = \operatorname{Id} - E_{M}$ kommt, nicht sehen würde.)

Beweis. Aus dem Beweis des letzten Satzes haben wir $||A_{f,\Pi_n,\mathcal{Z}_n}-A|| \to 0$ für $n \to \infty$ und $A_{f,\Pi_n=(\lambda_{n,j})_{j=0}^n,\mathcal{Z}_n=(\mu_{n,j})_{j=1}^n} = \sum_{j=1}^n f(\mu_{n,j})(E_{\lambda_{n,j}}-E_{\lambda_{n,j-1}})$. Dann ist

$$\langle u, A_{f,\Pi_n, \mathcal{Z}_n} v \rangle = \sum_{j=1}^n f(\mu_{n,j}) (\langle u, E_{\lambda_{n,j}}, v \rangle - \langle u, E_{\lambda_{n,j-1}} v \rangle)$$

und

$$|\langle u, A_{f,\Pi_n,\mathcal{Z}_n} v \rangle - \langle u, A, v \rangle| \leq ||u|| ||A_{f,\Pi_n,\mathcal{Z}_n} - A|||v||.$$

Die Funktion $g: \lambda \in \mathbb{R} \mapsto \langle u, E_{\lambda}u \rangle$ für jedes $u \in H$ wegen (ii) aus Definition 5.3.9 eine monoton steigende Funktion. Damit haben wir

$$\langle u, Au \rangle = \lim_{n \to \infty} \langle u, A_{f, \Pi_n, \mathcal{Z}_n} u \rangle = \lim_{n \to \infty} \sum_{j=1}^n f(\mu_{n,j}) (\langle u, E_{\lambda_{n,j}}, u \rangle - \langle u, E_{\lambda_{n,j-1}} u \rangle)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) d\langle u, E_{\lambda} u \rangle.$$

Folgerung 5.3.13. Sei $(E_{\lambda})_{{\lambda} \in \mathbb{R}}$ eine beschränkte Spektralfamilie auf einem Hilbertraum $H, f \in \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stetig, mit zugehörigem Operator A. Sei $U: H \to \hat{H}$ ein unitärer

Ist f Riemann-integrierbar, dann ist das Riemann-Integral

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=0}^{n} f(x_{i})(x_{i+1} - x_{i})$$

Sei $g \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ monoton wachsend. Dann ist das Riemann-Stieltjes-Integral von f

$$\int_{a}^{b} f dg := \lim_{n \to \infty} \sum_{i=0}^{n} f(x_i) (g(x_{i+1}) - g(x_i))$$

sofern dieser Grenzwert rechts existiert und unabhängig der Folge $(\mathcal{Z}_n)_n$ ist. Es ist also wie das Riemann-Integral nur das dem Intervall $[x_i, x_{i+1}]$ eine neue Länge zugeordnet wird, nämlich $g(x_{i+1}) - g(x_i)$.

Man kann direkt nachrechnen:

- (i) Ist g differenzierbar, dann ist $\int_a^b f dg = \int_a^b f(x)g'(x)dx$.
- (ii) Ist g stetig und stückweise differenzierbar, dann ist $\int_a^b f dg = \sum_{j=1}^n \int_{I_j} f(x)g'(x)dx$, wobei $[a,b] = I_1 \sqcup \ldots \sqcup I_n$ mit $g|_{I_j}$ diffenzierbar ist. (Damit ist $\int_a^b f dg = \int_a^b f(x)g'(x)dx$, wenn man g' als schwache Ableitung versteht.)
- (iii) Ist g ein Heaviside-Funktion (also g=0 für $x \le c$ und g=1 für x > c) und $c \in (a,b)$, dann ist $\int_a^b f dg = f(c)$.
- (iv) Sei $\mu \ge 0$, $g_i : [a, b] \to \mathbb{R}$ monoton steigend. Dann ist $\int_a^b f d(\mu g_1 + g_2) = \mu \int_a^b f dg_1 + \int_a^b f dg_2$. Damit kann man im Großen und Ganzen die meisten relevanten Riemann-Stieltjes-Integrale direkt berechnen.

Operator. Dann gilt

$$UAU^{-1} = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)d(UE_{\lambda}U^{-1}).$$

Beweis. $UE_{\lambda}U^{-1}$ ist eine Projektion auf \hat{H} . Der Rest folgt direkt aus

$$UA_{f,\Pi,\mathcal{Z}}U^{-1} = \sum_{i=1}^{n} f(\mu_i)(UE_{\lambda_i}U^{-1} - UE_{\lambda_{i-1}}U^{-1}).$$

Folgerung 5.3.14. Sei $(E_{\lambda})_{{\lambda} \in \mathbb{R}}$ eine beschränkte Spektralfamilie auf einem Hilbertraum H mit zugehörigem Operator A (zu $f = \mathrm{id}$). Sei $g \in \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stetig. Dann ist

$$g(A) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda) dE_{\lambda}$$

Beweis. Sei $B = \sum_{i=1}^{n} \mu_i (E_{\lambda_i} - E_{\lambda_{i-1}})$ für eine Zerlegung λ_i mit Zwischenzerlegung μ_i .

Es ist für $i \leq j$: $E_{\lambda_i} E_{\lambda_i} = E_{\lambda_i} E_{\lambda_i} = E_{\lambda_i}$. Damit folgt

$$B^{2} = \sum_{i,j} \mu_{i} \mu_{j} (E_{\lambda_{i}} E_{\lambda_{j}} - E_{\lambda_{i-1}} E_{\lambda_{j}} - E_{\lambda_{i}} E_{\lambda_{j-1}} + E_{\lambda_{i-1}} E_{\lambda_{j-1}}) = \sum_{i=1}^{n} \mu_{i}^{2} (E_{\lambda_{i}} - E_{\lambda_{i-1}})$$

und somit der zugehörige Operator C zu E_{λ} und $g: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ Polynom (als f) erfüllt C = g(A) und damit $g(A) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda) dE_{\lambda}$. Wegen dem Satz vom Weierstrass folgt die Behauptung.

5.3.3. Spektralsatz für beschränkte selbstadjungierten Operatoren

Satz 5.3.15. Sei A ein beschränkter selbstadjungierter Operator. Dann gibt es genau eine beschränkte Spektralfamilie $(E_{\lambda})_{{\lambda} \in \mathbb{R}}$ mit folgenden Eigenschaften:

- (i) Das Infimum von $(E_{\lambda})_{{\lambda}\in\mathbb{R}}$ ist $\min \sigma(A)$ und das Supremum von $(E_{\lambda})_{{\lambda}\in\mathbb{R}}$ ist $\max \sigma(A)$.
- (ii) Jeder beschränkte Operator auf H, der mit A kommutiert, kommutiert mit E_{λ} für alle $\lambda \in \mathbb{R}$.
- (iii) Für alle $u \in H$ existiert der rechtsseitige Limes $\lim_{\lambda \searrow \mu} E_{\lambda} u$.
- (iv) $A = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dE_{\lambda}$.

Wir nennen $(E_{\lambda})_{\lambda \in \mathbb{R}}$ dann die Spektralfamilie von A.

Hier existiert $\min \sigma(A)$ (und analog fürs Maximum) immer, da $\sigma(A)$ abgeschlossene Teilmenge von \mathbb{R} ist, vgl. Satz 5.1.2.

5. Spektrum beschränkter Operatoren

Idee: Da der Spektralsatz eine Verallgemeinerung der Eigenraumzerlegung für hermitische Matrizen sein wird, erwarten wir, dass E_{λ} eine Projektion auf den Anteil des Vektorraumes sein wird, der für das Spektrum $<\lambda$ verantwortlich ist. Um diesen Anteil zu extrahieren werden wir $f(x) = (x - \lambda) - |x - \lambda|$ betrachten (was Null für alle $x \ge \lambda$ ist). Mit dem stetigen Funktionalanalysis ist $A - \lambda \operatorname{Id} - |A - \lambda \operatorname{Id}| := f(A) \in \mathcal{L}(H)$ für wohldefiniert und selbstadjungiert (wegen f reell und $f(A)^* = \overline{f}(A)$).

Beweis von Satz 5.3.15. Sei $E_+(\lambda)$ die Orthogonalprojektion auf ker $(A - \lambda \operatorname{Id} - |A - \lambda \operatorname{Id}|)$ und $E_{\lambda} = \operatorname{Id} - E_+(\lambda)$. Wir zeigen, dass E_{λ} eine beschränkte Spektralfamilie ist mit den geforderten Eigenschaften ist: Die E_{λ} sind Orthogonalprojektionen per Konstruktion.

Wir zeigen (ii): Kommutiere $C \in \mathcal{L}(H)$ mit A. Aus Lemma 5.3.2 folgt, dass C dann auch mit $A - \lambda \mathrm{Id} - |A - \lambda \mathrm{Id}|$ kommutiert. Nach Lemma 5.3.8 kommutiert C auch mit $E_+(\lambda)$ und somit auch mit E_{λ} .

Um nun (ii) aus Definition 5.3.9 zu zeigen, sei $\lambda < \mu$ und $P = E_{\lambda}(\text{Id} - E_{\mu})$. P ist als Produkt zweier Orthogonalprojektionen selbst wieder eine Orthogonalprojektion, ÜA. Wir zeigen zunächst, dass P = 0 ist:

Da E_{λ} und Id $-E_{\mu}$ Orthogonal projektionen sind und kommutieren, ist $E_{\lambda}P=P$ und (Id $-E_{\mu})P=P$. Außerdem ist nach Definition von E_{+} und Lemma 5.3.7.iii: $(A-\mu \mathrm{Id})(\mathrm{Id}-E_{\mu})=|A-\mu \mathrm{Id}|(\mathrm{Id}-E_{\mu})\geqslant 0$ und analog $-(A-\mu \mathrm{Id})E_{\lambda}=|A-\mu \mathrm{Id}|(-E_{\lambda})\geqslant 0$. Daraus folgt

$$\begin{split} (\mu - \lambda) \langle Pu, Pu \rangle = & \langle (A - \lambda \operatorname{Id}) Pu, Pu \rangle - \langle (A - \mu \operatorname{Id}) Pu, Pu \rangle \\ = & \langle (A - \lambda \operatorname{Id}) E_{\lambda} Pu, Pu \rangle - \langle (A - \mu \operatorname{Id}) (\operatorname{Id} - E_{\mu}) Pu, Pu \rangle \leqslant 0. \end{split}$$

Da $\mu > \lambda$ ist, ist damit Pu = 0. Damit ist P = 0 und somit $E_{\lambda} = E_{\lambda}E_{\mu}$.

Wir zeigen, dass daraus $E_{\lambda} \leq E_{\mu}$ folgt: Es ist $E_{\mu} - E_{\lambda} = E_{\mu} - E_{\lambda} E_{\mu} = (\mathrm{Id} - E_{\lambda}) E_{\mu}$ als Produkt zweier Orthogonalprojektionen wieder eine Orthogonalprojektion und damit nichtnegativ.

Aus $E_{\lambda} \leq E_{\mu}$ folgt für $u \in H$, dass $\lambda \mapsto \langle E_{\lambda}u, u \rangle$ eine nichtnegative, monoton wachsende Funktion ist. Damit existiert

$$\lim_{\lambda \nearrow \mu} \langle E_{\lambda} u, u \rangle = \sup_{\lambda < \mu} \langle E_{\lambda} u, u \rangle =: \ell_{\mu}.$$

Damit gibt es für alle $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass $\ell_{\mu} - \langle E_{\mu}u, u \rangle < \frac{\epsilon}{2}$ für alle $0 < \mu - \lambda < \delta$. Dann gilt für $\mu - \delta < \lambda < \nu < \mu$:

$$||E_{\nu}u - E_{\lambda}u||^{2} \stackrel{\text{selbstadj.}}{=} \langle (E_{\nu} - E_{\lambda})^{2}u, u \rangle \stackrel{\text{Proj.}}{=} \langle (E_{\nu} - E_{\lambda})u, u \rangle$$
$$\leq |\langle E_{\nu}u, u \rangle - \ell_{\mu}| + |\langle E_{\lambda}u, u \rangle - \ell_{\mu}| < \epsilon.$$

Da H vollständig ist, existiert $\lim_{\lambda \nearrow \mu} E_{\lambda} u =: E_{\mu-0} u$ für alle $u \in H$.

Analog zeigt man die Existenz von $\lim_{\lambda \searrow \mu} E_{\lambda} u =: E_{\mu+0} u$ für alle $u \in H$ und damit (iii) des Satzes.

Wir zeigen als nächstes $E_{\mu-0}=E_{\mu}$ und damit (iii) der Definition 5.3.9 der Spektralfamilie: Für $u\in H$ ist

$$(E_{\mu} - E_{\mu-0})u = \lim_{\lambda \nearrow \mu} (E_{\mu} - E_{\lambda})u = \lim_{\lambda \nearrow \mu} E_{\mu}(E_{\mu} - E_{\lambda})u = E_{\mu}(E_{\mu} - E_{\mu-0})u.$$
 (5.2)

Für $\lambda < \mu$ haben wir außerdem

$$(\mathrm{Id} - E_{\lambda})(E_{\mu} - E_{\lambda}) = E_{\mu} - E_{\lambda} - E_{\lambda} + E_{\lambda} = E_{\mu} - E_{\lambda}$$

und damit

$$(A - \mu \operatorname{Id})(E_{\mu} - E_{\lambda}) = \underbrace{(A - \mu \operatorname{Id})E_{\mu}}_{\leqslant 0} \underbrace{(E_{\mu} - E_{\lambda})}_{\geqslant 0} \leqslant 0$$

sowie

$$(A - \lambda \operatorname{Id})(E_{\mu} - E_{\lambda}) = \underbrace{(A - \lambda \operatorname{Id})(\operatorname{Id} - E_{\lambda})}_{\geqslant 0} \underbrace{(E_{\mu} - E_{\lambda})}_{\geqslant 0} \geqslant 0.$$

Zusammen ergibt dies $\lambda(E_{\mu} - E_{\lambda}) \leq A(E_{\mu} - E_{\lambda}) \leq \mu(E_{\mu} - E_{\lambda})$ für $\lambda < \mu$. Mit $\lambda \nearrow \mu$ folgt $\langle (A - \mu \operatorname{Id})(E_{\mu} - E_{\mu-0})u, u \rangle = 0$ für alle $u \in H$ und damit nach ÜA23 $(A - \mu \operatorname{Id})(E_{\mu} - E_{\mu-0}) = 0$. Sei $v = (E_{\mu} - E_{\mu-0})u$, also $(A - \mu \operatorname{Id})v = 0$. Dann ist $||A - \mu \operatorname{Id}|v||^2 = \langle (A - \mu \operatorname{Id})^2 v, v \rangle = 0$ und damit $|A - \mu \operatorname{Id}|v = 0$ und somit $E_+(\mu)v = v$ und $E_\mu v = 0$. Eingesetzt in (5.2) ergibt sich $E_\mu = E_{\mu-0}$.

Sei $m = \min \sigma(A)$. Wir zeigen $E_{\lambda} = 0$ für alle $\lambda < m$ (Wegen stark linksseitig stetig folgt dann auch $E_m = 0$). Angenommen es gibt ein $\lambda < m$ und ein $u \in H$ mit $v = E_{\lambda}u \neq 0$. O.B.d.A. ||v|| = 1. Dann ist

$$\langle Av, v \rangle - \lambda = \langle (A - \lambda \operatorname{Id}) E_{\lambda}^{2} u, E_{\lambda} u \rangle \leq 0.$$

Andererseits muss wegen $m' \in \rho(A)$ für m' < m dann $0 \leq \langle (A - m' \operatorname{Id})v, v \rangle$ sein, was $m \leq \lambda$ impliziert und so den Widerspruch gibt. Analog sieht man $E_{\lambda} = \operatorname{Id}$ für $\lambda > M = \max \sigma(A)$.

Es fehlt noch (iv): Dazu sei $\epsilon > 0$ und $(\Pi_\ell)_\ell = ((\lambda_i^\ell)_{i=0}^{n_\ell})_\ell$ eine Folge von Zerlegungen mit $|\Pi_\ell| \to 0$ für $\ell \to \infty$. Als Zwischenzerlegungen \mathcal{Z}_ℓ wählen wir jeweils die linken Intervallgrenzen, also $\mu_k^\ell = \lambda_{k-1}^\ell$ und als Zwischenzerlegungen $\tilde{\mathcal{Z}}_\ell$ die rechten Intervallgrenzen $\mu_k^\ell = \lambda_k^\ell$. Wie oben haben wir dann

$$\lambda_{k-1}^\ell(E_{\lambda_k^\ell}-E_{\lambda_{k-1}^\ell})\leqslant A(E_{\lambda_k^\ell}-E_{\lambda_{k-1}^\ell})\leqslant \lambda_k^\ell(E_{\lambda_k^\ell}-E_{\lambda_{k-1}^\ell})$$

und damit

$$A_{\mathrm{id},\Pi_{\ell},\mathcal{Z}_{\ell}} \leqslant A \leqslant A_{\mathrm{id},\Pi_{\ell},\tilde{\mathcal{Z}}_{\ell}}.$$

Existiert des Grenzwertes für $\ell \to \infty$ und Unabhängigkeit von der gewählten Zwischenzerlegung gibt dann analog zu oben (iv).

Vorl. 20 Beispiel 5.3.16. Sei $A: H \to H$ kompakt und selbstadjungiert. Dann ist nach Satz 5.2.1 die Form $A = \sum_i \mu_i \langle ., v_i \rangle v_i$ für eine endliche Folge/Nullfolge μ_i und v_i ein Orthonormalsystem v_i von H. $P_i := \langle ., v_i \rangle v_i$ ist dabei die Projektion auf $\mathbb{C}v_i$.

Um die Spektralfamilie zu bestimmen schauen wir uns wie im Beweis des letzten Satz

$$A - \lambda \operatorname{Id} - |A - \lambda \operatorname{Id}| = \sum_{i} (\mu_i - \lambda - |\mu_i - \lambda|) \langle ., v_i \rangle v_i + (-\lambda - |\lambda|) P_{\ker A}$$
$$= \sum_{i: \mu_i < \lambda} 2(\mu_i - \lambda) P_i - 2\lambda \delta_{\lambda < 0} P_{\ker A}$$

an und erhalten so

$$E_{+}(\lambda) = \sum_{i:\mu_{i} \geqslant \lambda} P_{i} + \delta_{\lambda \geqslant 0} P_{\ker A}$$
$$E_{\lambda} = \sum_{i:\mu_{i} < \lambda} P_{i} + \delta_{\lambda < 0} P_{\ker A}.$$

Beispiel 5.3.17 (Beschränkter Multiplikationsoperator). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ Lebesguemessbar und $f \in L^{\infty}(\Omega) \cap C^0(\Omega)$. Sei $M \colon L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$, $g \mapsto fg$. Dann ist $\sigma(M) = \overline{\text{Bild } f}$, vgl. ÜA35.

Für Multiplikationsoperatoren lässt sich die Spektralfamilie recht leicht bestimmen, da für $h \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stetig, da $h(M)u = (h \circ f)u$ ist (für f(x) = x auf $\Omega = [0,1]$ vgl. ÜA41).

Dann ist:

$$E_{\lambda}u = \begin{cases} 0 & \lambda \leqslant \inf \operatorname{Bild} f \\ \chi_{f < \lambda}u & \lambda \in (\inf \operatorname{Bild} f, \sup \operatorname{Bild} f] \\ u & \operatorname{sonst} \end{cases}$$

Für nicht Multiplikationsoperatoren ist es i.A. schwieriger die Spektralfamilie zu bestimmen. Aber nicht selten, lassen sich Operatoren durch Zwischenschalten von einem unitären Operator auf Multiplikationsoperatoren zurückführen:

Beispiel 5.3.18 (Diskreter Laplaceoperator). Wir betrachten $\ell_2(\mathbb{Z}) = \{(x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \mid x_n \in \mathbb{C}, \sum_n |x_n|^2 < \infty \}$ und

$$\Delta : \ell_2(\mathbb{Z}) \to \ell_2(\mathbb{Z}), \quad (\Delta(x_n)_n)_n := x_{n+1} + x_{n-1} - 2x_n.$$

Wir verwenden Fourierreihen:

$$U: \ell_2(\mathbb{Z}) \to L^2([0, 2\pi]), \quad (x_n)_n \mapsto (\xi \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_n e^{\mathrm{i}n\xi} x_n)$$

Nach [4, Satz 2.15] ist dies ein unitärer Operator.

Es gilt

$$(\Delta U^{-1}\varphi)_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} \left(e^{-i(n+1)\xi} + e^{-i(n-1)\xi} - 2e^{-in\xi} \right) \varphi(\xi) d\xi$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} e^{-in\xi} (2\cos\xi - 2)\varphi(\xi) d\xi$$

und damit nach [4, Abschnitt 2.1.2]

$$(U\Delta U^{-1}\varphi)(x) = \frac{1}{2\pi}(2\cos x - 2)\varphi(x).$$

Wir haben Δ also in einen beschränkten Multiplikationsoperator umgewandelt, von welchem wir nach letztem Beispiel die Spektralfamilie E_{λ} kennen.

Damit ist $UE_{\lambda}U^{-1}$ die Spektralfamilie von Δ auf $\ell_2(\mathbb{Z})$.

6. Unbeschränkte Operatoren

Sei H ein Hilbertraum. Wir wollen nun unbeschränkte Operatoren auf H betrachten. Einige Beispiele hatten wir schon in Beispiel 1.1.4 gesehen. Wichtige Beispielklassen sind:

(i) Differentialoperatoren auf $L^2(\mathbb{R}^n)$, d.h. Operatoren der Form:

$$(A\varphi)(x) := \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq k} a_{\alpha}(x) D^{\alpha} \varphi(x)$$

mit $a_{\alpha} \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ messbare (oft glatte) Funktionen und dom A eine dichte Teilmenge von $L^2(\mathbb{R}^n)$ mit $A(\text{dom } A) \subset L^2(\mathbb{R}^n)$ (oft verwendet dom $A = C_c^{\infty}(\mathbb{R}^n)$).

Zu den Differentialoperatoren gehören insbesondere (Definitionsbereich nicht extra ausgewiesen):

- (a) Impulsoperatoren: $p_j: L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n), \ \varphi \mapsto i \frac{\partial}{\partial x_j} \varphi$.
- (b) Laplaceoperator $\Delta = -\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$.
- (c) Schrödingeroperatoren $H=\Delta+V$, wobei $V:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ eine Funktion (das Potential) ist, z.B. im Schrödingeroperator für die Beschreibung des Elektrons im Wasserstoffatom ist $V(x)=\frac{1}{|x|}$ (modulo Konstanten/Einheiten, kommt von der Coloumbwechselwirkung mit dem Kern bei x=0)
- (ii) Multiplikationsoperatoren mit einer unbeschränkten messbaren Funktion auf $L^2(\mathbb{R}^n)$

6.1. Grundbegriffe

Definition 6.1.1. Sei $A: \text{dom } A \subset H \to H$ ein linearer Operator. Der *Graph* von A ist gegeben durch

$$graph(A) := \{(x, Ax) \mid x \in dom A\} \subset H \oplus H.$$

Der Operator A heißt abgeschlossen, wenn graph $(A) \subset H \oplus H$ abgeschlossen ist.

Ist A abgeschlossen, ist damit graph(A) insbesondere selbst wieder ein Hilbertraum.

Definition 6.1.2. Seien A, B lineare Operatoren auf H. Falls dom $B \subset \text{dom } A$ und $A|_{\text{dom }B} = B$ ist, nennen wir A eine *Erweiterung* von B und schreiben $B \subset A$. Ein Operator heißt *abschliessbar*, wenn er eine abgeschlossene Erweiterung besitzt.

Jeder abschliessbare Operator A besitzt eine kleinste abgeschlossene Erweiterung, diese nennen wir Abschluss und bezeichnen diese mit \bar{A} .

Satz 6.1.3. Ist A abschliessbar, dann ist $graph(\bar{A}) = \overline{graph(A)}^*$.

Beweis. Sei B eine abgeschlossene Erweiterung von A, existiert da A abschliessbar ist. Dann ist $\overline{\operatorname{graph}(A)} \subset \operatorname{graph}(B)$. Insbesondere, folgt damit aus $(x,y) \in \overline{\operatorname{graph}(A)}$, dass y = Bx ist. Dieses y hängt nur von x und A und nicht von der Wahl von B ab: Sei $y_1 = Bx$ und $y_2 = \widehat{B}x$ für eine weitere abgeschlossene Erweiterung von A. Dann ist $(0, y_1 - y_2) \in \overline{\operatorname{graph}(A)}$ und damit $y_1 = y_2$.

Sei nun

$$M := \{x \mid (x, y) \in \overline{\operatorname{graph}(A)}\}\$$

und $R: M = \text{dom } R \subset H \to H$ definiert durch Rx = Bx. Nach obigen Überlegungen ist R unabhängig von der Wahl von B. Es ist insbesondere graph $(R) = \overline{\text{graph}(A)}$. Also ist R eine abgeschlossene Erweiterung von A mit $R \subset B$. Da B eine beliebige abgeschlossene Erweiterung ist, ist $R = \overline{A}$.

Beispiel 6.1.4. Sei $H=L^2(\mathbb{R})$, $\operatorname{dom} A=C_c^\infty(\mathbb{R})$, $\operatorname{dom} B=C_c^1(\mathbb{R})$ und A bzw. B wirken auf ihren Definitionsbereichen als $\operatorname{i} \frac{d}{dx}$. Es ist $A\subset B$. Beide Operatoren sind nicht abgeschlossen: Sei $\varphi\in H^1(\mathbb{R})\backslash C_c^1(\mathbb{R})$. Dann gibt es $\varphi_j\in C_c^\infty(\mathbb{R})$ mit $\varphi_i\to\varphi$ in $H^1(\mathbb{R})$, also $\varphi_j\to\varphi$ in L^2 und $\varphi_j'\to\varphi'$ in L^2 (wobei φ' i.A. nur eine schwache Ableitung ist). Damit ist $(\varphi_j,\operatorname{i}\varphi_j')\in\operatorname{graph} B\supset\operatorname{graph} A$, aber $(\varphi,\operatorname{i}\varphi')\notin\operatorname{graph} B$. Also sind A,B nicht abgeschlossen.

Aber die obigen Überlegungen zeigen, dass $C: \text{dom } C = H^1(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R}),$ $\varphi \mapsto i\varphi'$ abgeschlossen ist und $H^1(\mathbb{R}) \subset \text{dom } \bar{A} \subset \text{dom } \bar{B}$ ist. Damit ist $C = \bar{A} = \bar{B}$.

Lemma 6.1.5 (Spursatz in 1D). Die lineareAbbildung

res:
$$C^{\infty}([0,1]) \subset H^1([0,1]) \to \mathbb{C}, \quad \varphi \mapsto \varphi(0)$$

hat eine stetige Fortsetzung zu res: $H^1([0,1]) \to \mathbb{C}$. D.h. insbesondere: Es gibt es C > 0 mit

$$|\varphi(0)| \leqslant C \|\varphi\|_{H^1}.$$

Vorl. 21 Für ein $\varphi \in L^2([0,1])$ macht $\varphi(0)$ keinen Sinn, da man von φ Realisierungen mit beliebigen Werten in 0 finden kann. Das letzte Lemma sagt, dass dies für $H^1([0,1])$ anders ist und man $\varphi(0)$ einen eindeutigen Wert zuordnen kann. Analog geht das natürlich für jeden anderen Wert, wie $\varphi(1)$.

Beweis. Für φ glatt ist $\varphi(t) = \varphi(0) + \int_0^t \varphi'(s)ds$ und damit

$$|\varphi(0)| = \left| \varphi(t) - \int_0^t \varphi'(s) ds \right| \le |\varphi(t)| + \|\varphi'\|_2$$
$$|\varphi(0)|^2 \le \int_0^1 2(|\varphi(t)|^2 + \|\varphi'\|_2^2) dt \le 2\|\varphi\|_{H_1}^2.$$

 $^{*\}overline{\mathrm{graph}(A)}$ ist der Abschluss in $H \oplus H$

Damit ist res von $C^{\infty}([0,1])$ mit der H^1 -Norm nach $\mathbb C$ beschränkt. Mit Lemma 3.1.3 folgt die Behauptung.

Mit Hilfe des Spursatzes können wir

$$H_0^1([0,1]):=\{\varphi\in H^1([0,1])\mid \varphi(0)=\varphi(1)=0\}$$

definieren und erhalten auch aus dem Spursatz, dass $H_0^1([0,1]) \subset H^1([0,1])$ abgeschlossen ist und damit selbst ein Hilbertraum ist.

Beispiel 6.1.6. Sei $H=L^2([0,1])$ und $A=\mathrm{i}\frac{d}{dx}\colon C_c^\infty((0,1))\subset L^2([0,1])\to L^2([0,1]).$ Dann sieht ähnlich wie im letzten Beispiel, dass $B\colon H^1([0,1])\subset L^2([0,1]\to L^2([0,1],\varphi\mapsto\mathrm{i}\varphi',$ eine abgeschlossene Erweiterung von A ist. Allerdings ist hier diese nicht der Abschluss:

Der Operator $C\colon H^1_0([0,1])\subset L^2([0,1]\to L^2([0,1],\,\varphi\mapsto\mathrm{i}\varphi'$ ist $\bar A\colon$ Aus dem Spursatz folgt

$$\operatorname{graph} C = \{(\varphi, i\varphi') \mid \varphi \in H_0^1([0, 1])\} = \overline{\operatorname{graph} A}$$

und damit $C = \bar{A}$ nach Satz 6.1.3.

6.2. Adjungierte

Definition 6.2.1. Sei A ein dicht definierter linearer Operator auf H. Sei

$$\operatorname{dom} A^* := \{ x \in H \mid \exists y \in H \forall z \in \operatorname{dom} A : \langle Az, x \rangle_H = \langle z, y \rangle_H \}.$$

Für jedes $x \in \text{dom } A^*$ setzen wir $A^*x = y$ und nennen A^* : dom $A^* \subset H \to H$ den zu A adjungierten Operator.

 A^* ist wohl definiert, da y wegen der Nichtdegeneriertheit von $\langle .,. \rangle_H$ und der Dichtheit von dom A in H eindeutig ist.

Ist $A \subset B$, dann ist $B^* \subset A^*$.

Sei $T\colon H\oplus H\to H\oplus H,\ (\varphi,\psi)\mapsto (-\psi,\varphi).$ Dann ist T eine Isometrie mit $T^2=\mathrm{Id}$ und $(TU)^\perp=TU^\perp$ für alle linearen Unterräume $U\subset H\oplus H.$

Dann ist $(\varphi, \psi) \in (T(\operatorname{graph}(A)))^{\perp}$

genau dann, wenn $\langle (\varphi, \psi), (-Az, z) \rangle_{H \oplus H} = 0$ für alle $z \in \text{dom } A$

genau dann, wenn $\langle \varphi, Az \rangle = \langle \psi, z \rangle$ für alle $z \in \text{dom } A$

genau dann, wenn $\varphi \in \text{dom } A^*$ mit $\psi = A^* \varphi$.

Damit ist insbesondere graph $(A^*) = (T(\operatorname{graph}(A)))^{\perp}$.

Satz 6.2.2. Sei A ein dicht definierter linearer Operator auf H. Dann gilt

- (i) A^* ist abgeschlossen.
- (ii) A ist genau dann abschliessbar, wenn dom A^* dicht ist. In diesem Fall ist dann $\bar{A} = A^{**}$.

6. Unbeschränkte Operatoren

(iii) Ist A abschliessbar, dann ist $A^* = (\bar{A})^*$.

Wir können nach Definition der Adjungierten A^{**} erst bilden, wenn A^* dicht definiert ist.

Beweis. (i) Das folgt direkt aus graph $(A^*) = (T(\operatorname{graph}(A)))^{\perp}$ und Lemma 1.2.3.

(ii) Es ist nach Lemma 1.2.3 und obigen Überlegungen

$$\overline{\operatorname{graph}(A)} = (\operatorname{graph}(A)^{\perp})^{\perp} = (T^2 \operatorname{graph}(A)^{\perp})^{\perp} = (T(T \operatorname{graph}(A))^{\perp})^{\perp} = (T \operatorname{graph}(A^*))^{\perp}.$$

Ist A^* dicht definiert, dann ist $(T\operatorname{graph}(A^*))^{\perp} = \operatorname{graph}(A^{**})$ und somit dann $\bar{A} = A^{**}$, also A auch insbesondere abschliessbar.

Sei nun A^* nicht dicht definiert. Dann gibt es ein $\psi \in (\text{dom } A^*)^{\perp} \setminus \{0\}$ und es gilt $\underline{\langle (\psi, 0), (z, A^*z) \rangle_{H \oplus H}} = 0$ für alle $z \in \text{dom } A^*$. Damit ist $(0, \psi) \in T(\text{graph } A^*)^{\perp} = \text{graph } A$. Wäre A abschliessbar, wäre $\bar{A}0 = \psi \neq 0$, was den Widerspruch gibt.

(iii) Das folgt aus

$$A^* \stackrel{(i)}{=} \overline{A^*} \stackrel{(ii)}{=} A^{***} \stackrel{(ii)}{=} (\overline{A})^*.$$

6.3. Selbstadjungiert vs. symmetrisch

Definition 6.3.1. Sei A ein dicht definierter linearer Operator auf H. Wir nennen A symmetrisch, falls für alle $x, y \in \text{dom } A$ gilt:

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle.$$

Wir nennen A selbstadjungiert, wenn A symmetrisch ist und dom $A = \text{dom } A^*$ gilt.

Nach Definition von dom A^* sieht man direkt: A ist genau dann symmetrisch, wenn $A \subset A^*$ ist. A ist genau dann selbstadjungiert, wenn $A = A^*$ gilt.

Nach Satz 6.2.2 ist ein symmetrischer Operator immer abschliessbar, da dom A^* dann immer dom A enthält und somit dicht in H ist. Auch nach Satz 6.2.2 gilt dann $\bar{A} = A^{**}$.

Damit haben wir: Ist A symmetrisch, dann ist A^* eine abgeschlossene Erweiterung. Es muss also gelten

$$A \subset A^{**} \subset A^*$$
.

War A selbst schon abgeschlossen ist das linke \subset schon eine Gleichheit. Was A schon selbstadjungiert, sind alles Gleichheiten.

Beispiel 6.3.2. Sei $D=\mathrm{i} \frac{d}{dx}\colon H^1(\mathbb{R})=\mathrm{dom}\, D\subset L^2(\mathbb{R})\to L^2(\mathbb{R}).$ Dann ist

$$\operatorname{dom} D^* = \{ \varphi \in L^2(\mathbb{R}) \mid \exists \psi \in L^2(\mathbb{R}) \forall f \in H^1(\mathbb{R}) \colon \int_{\mathbb{R}} -\mathrm{i}\bar{f}'(x)\varphi(x)dx = \int_{\mathbb{R}} \bar{f}(x)\psi(x)dx \}.$$

Da $D = \overline{D|_{C^\infty_\infty(\mathbb{R})}}$ ist (Beispiel 6.1.4), ist mit Satz 6.2.2.
iii somit

$$\operatorname{dom} D^* = \left\{ \varphi \in L^2(\mathbb{R}) \mid \exists \psi \in L^2(\mathbb{R}) \forall f \in C_c^{\infty}(\mathbb{R}) \colon \int_{\mathbb{R}} -\mathrm{i} \bar{f}'(x) \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \bar{f}(x) \psi(x) dx \right\}$$
$$= \left\{ \varphi \in L^2(\mathbb{R}) \mid \exists \psi \in L^2(\mathbb{R}) \forall f \in C_c^{\infty}(\mathbb{R}) \colon -\int_{\mathbb{R}} \bar{f}'(x) \mathrm{i} \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \bar{f}(x) \psi(x) dx \right\}.$$

Aber das heisst, ψ muss die schwache Ableitung von i φ sein. Nach ÜA32 ist somit $\varphi \in H^1(\mathbb{R})$. Andererseits ist somit jedes $\varphi \in H^1(\mathbb{R})$ auch in dom D^* . D.h. dom $D^* = H^1(\mathbb{R})$ und D ist wesentlich selbstadjungiert.

Andererseits ist $C = i\frac{d}{dx}$ mit Definitionsbereich $H_0^1([0,1])$ (also Dirichletrandbedingungen) aus Beispiel 6.1.6 nicht selbstadjungiert – es ist $C^* = i\frac{d}{dx}$ mit Definitionsbereich $H^1([0,1])$.

Satz 6.3.3. Sei A ein symmetrischer Operator auf einem Hilbertraum H. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (i) A ist selbstadjungiert.
- (ii) A ist abgeschlossen und $\ker (A^* \pm i) = \{0\}.$
- (iii) Bild $(A \pm i) = H$.

Beweis. (i) \Longrightarrow (ii): Aus selbstadjungiert folgt aus (i) von Satz 6.2.2, dass A abgeschlossen ist. Sei nun $\varphi \in \ker (A^* + i)$ (– wird analog gehen). Dann ist wegen Selbstadjungiertheit $A\varphi = -i\varphi$. Dann folgt (analog wie für beschränkte selbstadjungierte Operatoren)

$$\mathrm{i} \langle \varphi, \varphi \rangle = \langle \varphi, \mathrm{i} \varphi \rangle = \langle \varphi, -A \varphi \rangle = \langle -A \varphi, \varphi \rangle = \langle \mathrm{i} \varphi, \varphi \rangle = -\mathrm{i} \langle \varphi, \varphi \rangle.$$

Also $\varphi = 0$.

(ii) \Longrightarrow (iii): Sei $\psi \in \text{Bild}(A-i)^{\perp}$. Dann ist $((A-i)\varphi,\psi)=0$ für alle $\varphi \in \text{dom } A$ und damit $\psi \in \text{dom } (A^*+i)$ mit $(A^*+i)\psi=0$. Nach (ii) ist dann $\psi=0$ und damit $\overline{\text{Bild}(A-i)}=H$.

Es bleibt zu zeigen, dass Bild (A - i) abgeschlossen ist: Sei $x_i \in \text{dom } A$ und $y \in H$ mit $(A - i)x_i \to y$. Wegen

$$||(A - i)x_i||^2 = ||Ax_i||^2 + ||x_i||^2$$

konvergiert dann auch x_i in H gegen ein x und Ax_i gegen ein z. Da A abgeschlossen ist, ist $x \in \text{dom } A$ und z = Ax. Insbesondere ist somit y = (A - i)x. Also ist das Bild abgeschlossen. (analog wird die Aussage für +i gezeigt).

(iii) \Longrightarrow (i): Wir müssen dom $A = \text{dom } A^*$ zeigen. Sei $x \in \text{dom } A^*$. Da Bild (A - i) = H ist, gibt es ein $z \in \text{dom } A$ mit $(A - i)z = (A^* - i)(x)$. Da A symmetrisch ist, ist $z \in \text{dom } A^*$ und $(A^* - i)(z - x) = 0$. Andererseits folgt aus Bild (A + i) = H, für alle $y \in H$ gibt es ein $u \in \text{dom } A$ mit y = (A + i)u. Somit ist dann $\langle y, z - x \rangle = \langle u, (A^* - i)(z - x) \rangle = 0$. Damit muss z = x sein und somit $x \in \text{dom } A$.

Vorl. 22

Definition 6.3.4. Ist A ein dicht-definierter, abschliessbarer Operator auf einem Hilbertraum H, dessen Abschluss selbstadjungiert ist, dann heißt A wesentlich selbstadjungiert.

Dann folgt direkt aus letztem Satz und dessem Beweis:

Folgerung 6.3.5. Sei A ein symmetrischer Operator auf einem Hilbertraum H. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (i) A ist wesentlich selbstadjungiert.
- (ii) $\ker (A^* \pm i) = \{0\}.$
- (iii) Bild $(A \pm i)$ ist dicht in H.

6.4. Spektrum unbeschränkter Operatoren

Die Definition des Spektrums ist wie bei beschränkten Operatoren nur, dass man für die Elemente in der Resolventenmenge zusätzlich fordert, dass der inverse Operator beschränkt ist, da das kein Automatismus mehr ist.

Definition 6.4.1. Sei A: dom $A \subset X \to X$ ein Operator. Die Resolventenmenge $\rho(A)$ ist die Menge aller $\lambda \in \mathbb{C}$, so dass $A - \lambda \mathrm{Id}$ bijektiv ist und eine beschränkte Inverse besitzt. Dann nennen wir $R_{\lambda}(A) := (\lambda \mathrm{Id} - A)^{-1}$ die Resolvente von A in λ . Die Menge $\sigma(A) := \mathbb{C} \setminus \rho(A)$ heißt Spektrum von A.

Die Aufspaltung in Punktspektrum, residuelles Spektrum und stetiges Spektrum wird noch genau wie bei beschränkten Operatoren getroffen. Allerdings ist $\sigma(A)$ nun nicht mehr kompakt:

Beispiel 6.4.2. Sei $f: C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ unbeschränkt (z.B. f(x) = x) und dom $M:=\{\varphi \in L^2(\mathbb{R}) \mid f\varphi \in L^2(\mathbb{R})\}$. Dann ist $M: \text{dom } M \subset L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ ein unbeschränkter Operator und nach ÜA selbstadjungiert. Es gilt $\sigma(M) = \overline{\text{Bild } f}$ (wird genau wie im Falle beschränkter Multiplikationsoperatoren gezeigt).

Was man allerdings mit ganz analogem Beweis zum beschränkten Fall (Satz 5.1.2) zeigen kann:

Satz 6.4.3. Sei $A: \text{dom } A \subset H \to H$ ein dicht definierter Operator. Dann ist $\sigma(A)$ abgeschlossen und die Resolventenabbildung analytisch.

Im Unterschied zu beschränkten Operatoren kann das Spektrum allerdings sogar leer sein:

Beispiel 6.4.4. Sei $A = i\frac{d}{dx}$ mit dom $A := \{ \varphi \in H^1([0,1]) \mid \varphi(0) = 0 \} \subset L^2([0,1])$. Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ und $B_{\lambda} : L^2([0,1]) \to L^2([0,1])$ definiert durch

$$B_{\lambda}(\varphi)(x) := i \int_{0}^{x} e^{-i\lambda(x-s)} \varphi(s) ds.$$

Dann rechnet man direkt nach, dass $\|B_{\lambda}\varphi\|_{L^2} \leq \|\varphi\|_{L^2}$ ist und damit B_{λ} ein beschränkter Operator ist. Weiterhin gilt: $(B_{\lambda}\varphi)(0) = 0$. Damit ist $B_{\lambda}L^2([0,1]) \subset \text{dom } A$ und es gilt $(A - \lambda)B_{\lambda}\varphi = \varphi$ für alle $\varphi \in L^2([0,1])$ sowie $B_{\lambda}(A - \lambda) = \text{Id}|_{\text{dom } A}$. Also ist $\lambda \in \rho(A)$ und damit $\sigma(A) = \emptyset$.*

Für selbstadjungierte Operatoren gilt

Lemma 6.4.5. Sei A: dom $A \subset H \to H$ selbstadjungiert. Dann ist $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$ und es gibt kein residuelles Spektrum. Ist A zusätzlich nichtnegativ, also $\langle Ax, x \rangle \geq 0$ für alle $x \in \text{dom } A$, dann ist $\sigma(A) \subset [0, \infty)$.

Beweis. Sei $\lambda = a + ib$ mit $b \neq 0$. Sei $B = b^{-1}(A - a)$ mit dom B = dom A. Dann ist B selbstadjungiert und $B - i\text{Id} = b^{-1}(A - \lambda \text{Id})$. Außerdem gilt

$$||(B - iId)x||^2 = \langle (B^2 + 1)x, x \rangle \ge ||x||^2.$$

Damit ist $B-\mathrm{iId}\colon H\to \mathrm{Bild}\,(B-\mathrm{iId})$ bijektiv. Nach Satz 6.3.3 ist $\mathrm{Bild}\,(B-\mathrm{iId})=H$. Es bleibt zu zeigen, dass $(B-\mathrm{iId})^{-1}$ beschränkt ist (dann hat auch $A-\lambda\mathrm{Id}$ ein beschränktes Inverses und damit wäre $\lambda\notin\sigma(A)$) - aber das folgt direkt aus obiger Ungleichung mit $x=(B-\mathrm{iId})^{-1}y$ für $y\in H$.

Sei nun $\lambda \in \sigma(A) \subset \mathbb{R}$ und kein Eigenwert, also $A - \lambda \mathrm{Id}$ injektiv. Dann ist $A - \lambda \mathrm{Id}$: dom $A \to \mathrm{Bild}\,(A - \lambda \mathrm{Id})$ bijektiv. Sei $\psi \in (\mathrm{Bild}\,(A - \lambda \mathrm{Id}))^{\perp}$. Nach Definition des Definitionsbereich des adjungierten Operators ist $(\mathrm{Bild}\,(A - \lambda \mathrm{Id}))^{\perp} \subset \mathrm{dom}\,(A^* - \lambda \mathrm{Id}) = \mathrm{dom}\,(A - \lambda \mathrm{Id})$. Sei $\psi \in (\mathrm{Bild}\,(A - \lambda \mathrm{Id}))^{\perp}$. Dann ist $\|(A - \lambda)\psi\|^2 = \langle (A - \lambda)(A - \lambda)\psi, \psi \rangle = 0$ und somit $\psi \in \ker(A - \lambda) = \{0\}$. Insbesondere ist damit $\mathrm{Bild}\,(A - \lambda \mathrm{Id})$ dicht in H und λ kann nicht im residuellen Spektrum sein.

Sei nun A zusätzlich nichtnegativ und $\lambda \in (-\infty, 0]$. Dann geht der Beweis ganz analog zum beschränkten Fall: Es ist $\|(A - \lambda \operatorname{Id})x\|^2 = \|Ax\|^2 - 2\lambda \langle Ax, x \rangle + \lambda^2 \|x\|^2 \ge \lambda^2 \|x\|^2$. Also ist $A - \lambda$ injektiv und nach obigen Überlegungen, damit Bild $(A - \lambda \operatorname{Id})$ dicht in H.

Es bleibt zu zeigen, dass $(A - \lambda \operatorname{Id})^{-1}$: Bild $(A - \lambda \operatorname{Id}) \to H$ beschränkt ist. Dies folgt jedoch direkt aus obiger Ungleichung $\|(A - \lambda \operatorname{Id})x\|^2 \ge \lambda^2 \|x\|^2$.

Wir erwarten auch für unbeschränkte selbstadjungierte Operatoren einen ähnlichen Spektralsatz wie für beschränkte. Da wir jedoch nun gesehen haben, dass das Spektrum nicht kompakt ist, wird die Spektralfamilie nicht mehr beschränkt sein – d.h. wir wollen die letzte Bedingung in der Definition einer beschränkten Spektralfamilie ersetzen:

Definition 6.4.6. Eine *Spektralfamilie* auf einem Hilbertraum H ist eine Abbildung $E: \mathbb{R} \to \mathcal{L}(H)$ mit folgenden Eigenschaften:

- (i) $E_{\lambda} := E(\lambda)$ ist für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Projektionsoperator, d.h. $E_{\lambda}^2 = E_{\lambda}$.
- (ii) Aus $\lambda > \mu$, folgt $E_{\lambda} \ge E_{\mu}$.

^{*}Für A mit Definitionsbereich $\{\varphi \in H^1([0,1]) \mid \varphi(0) = \varphi(1) = 0\}$ funktioniert das nicht mehr, das $B_\lambda \varphi$ i.A. die Randbedingung bei x = 1 nicht mehr erfüllt.

6. Unbeschränkte Operatoren

(iii) Die Familie $(E_{\lambda})_{{\lambda}\in\mathbb{R}}$ ist stark linksstetig, d.h. für alle $\mu\in\mathbb{R}$ und $u\in H$ gilt

$$\lim_{\lambda \nearrow u} E_{\lambda} u = E_{\mu} u.$$

(iv) $\lim_{\lambda \to -\infty} E_{\lambda} u = 0$ und $\lim_{\lambda \to \infty} E_{\lambda} u = u$ für alle $u \in H$.

Ähnlich wie bei einer beschränkten Spektralfamilie sieht man, dass eine Spektralfamilie einen Operator $\int_{-\infty}^{\infty} \lambda dE_{\lambda}$ definiert (allerdings dieses Mal in Analogie zu einem uneigentlichen Riemann-Integral).

Satz 6.4.7. Sei A ein selbstadjungierter Operator auf H. Dann gibt es genau eine Spektralfamilie $(E_{\lambda})_{{\lambda} \in \mathbb{R}}$, so dass $A = \int_{-\infty}^{\infty} {\lambda} dE_{\lambda}$.

Außerdem gilt

$$\operatorname{dom} A = \left\{ x \in H \ | \ \int_{\mathbb{R}} \lambda^2 d\langle x, E_{\lambda} x \rangle_H < \infty \right\}.$$

Ist $U: H \to \hat{H}$ eine Isometrie, dann ist $UAU^{-1} = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda d(UE_{\lambda}U^{-1})$.

Kommutiere $B \in \mathcal{L}(H)$ mit A, d.h. $BA \subset AB$ (also dom $BA \subset \text{dom } AB$ sowie $AB|_{\text{dom } BA} = BA$), dann kommutiert B mit jedem E_{λ} .

Beweisidee/-schritte: Geeignet zurückführen auf beschränkte Operatoren und dort den Spektralsatz benutzen:

Sei $B = (\mathrm{Id} + A^2)^{-1}$ und C = AB. Dann sind $B, C \in \mathcal{L}(H)$ und $\sigma(B \ge 0) \in (0, 1 = ||B||]$. Also ist $B = \int_0^{1+\epsilon} \lambda dF_{\lambda}$ für eine beschränkte Spektralfamilie.

Sei
$$s_i(x) = \chi_{\left[\frac{1}{i+1}, \frac{1}{i}\right]}(x) \frac{1}{x}$$
 und $P_1 = F_{1+\epsilon} - F_1$, $P_i = F_{\frac{1}{i}} - F_{\frac{1}{i+1}}$ für $i \ge 2$. Sei $H_i = \text{Bild } P_i$.

Dann gilt
$$H = \bigoplus_i H_i$$
, dom $A = \{u \in H \mid \sum_{i=1}^{\infty} ||Au_i||^2 < \infty\}$ und $s_i(B)B = P_i$, $P_i A = s_i(B)C = Cs_i(B) = AP_i \in \mathcal{L}(H)$.

Insbesondere ist $A_i:=A|_{H_i} \in \mathcal{L}(H_i)$ selbstadjungiert. Wendet man für jedes A_i den Spektralsatz für beschränkte selbstadjungierte Operatoren an, kann man dann alles zu einer Spektralfamilie von A zusammenbauen.

Die Bedingung in der Darstellung von dom A bedeutet, dass $||Ax||^2 (= \langle A^2x, x \rangle)$ endlich sein soll, also $Ax \in H$ ist.

Was kann man an der Spektralfamilie zu A ablesen?

- $\lambda_0 \in \rho(A) \iff \exists \epsilon > 0 \colon E_{\lambda_0 \epsilon} = E_{\lambda_0 + \epsilon}$
- $\lambda_0 \in \sigma_{\text{cont}}(A) \iff E_{\lambda} \text{ ist stark stetig in } \lambda_0, \text{ d.h. } \lim_{\epsilon \to 0} E_{\lambda_0 + \epsilon} E_{\lambda_0 \epsilon} = 0.$
- $\lambda_0 \in \sigma_p(A) \iff E_\lambda \text{ ist nicht stark stetig in } \lambda_0.$

Beispiel 6.4.8. Für Multiplikationsoperatoren mit $f: \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ messbar gilt wieder $E_{\lambda}u = \chi_{f<\lambda}u$.

Beispiel 6.4.9. Wir betrachten $i\frac{d}{dx}$: $H^1(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$, der nach Beispiel 6.3.2 selbstadjungiert ist.

Sei $U: L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ die Fouriertransformation $\hat{\varphi}(\xi) := (U^{-1}\varphi)(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{\mathrm{i}x\xi} \varphi(x) dx$. Diese ist unitär, vgl. [4, Satz 2.3.15]. Dann ist [4, Satz 2.3.4]

$$Ui\frac{d}{dx}U^{-1}f(x) = xf(x).$$

Damit ist

$$i\frac{d}{dx}g(x) = \int_{\mathbb{R}} \lambda d\left(\lambda \mapsto \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ix\xi} \chi_{\xi < \lambda} \hat{g}(\xi) d\xi\right)$$
$$= \int_{\mathbb{R}} \lambda d\left(\lambda \mapsto \int_{-\infty}^{\lambda} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ix\xi} \hat{g}(\xi) d\xi\right)$$
$$= \int_{\mathbb{R}} \lambda \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ix\lambda} \hat{g}(\lambda) d\lambda$$

und insbesondere $\sigma(i\frac{d}{dx}) = \mathbb{R}$.

Die Funktionen $e^{-ix\lambda}$, die in der Spektraldarstellung vorkommen, erfüllen

$$i\frac{d}{dx}e^{-ix\lambda} = \lambda e^{-ix\lambda}.$$

Sie sind also Eigenfunktionen, allerdings nicht im Sinne von unserer Definition von Spektrum, da diese Funktionen nicht in $L^2(\mathbb{R})$ sind. Der Operator i $\frac{d}{dx}$ auf $H^1(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R})$ hat auch gar keine Eigenwerte (im Sinne der Definition des Punktspektrums). Um das zu unterscheiden, werden solche Lösungen verallgemeinerte Eigenfunktionen genannt. Mehr dazu später.

Im letzten Beispiel gibt es kein Punktspektrum, also muss nach Lemma 6.4.5 das gesamte Spektrum kontinuierlich sein und somit $(A - \lambda \operatorname{Id})^{-1}$: Bild $(A - \lambda \operatorname{Id}) \to H$ nicht beschränkt sein. D.h. es gibt eine Folge $x_i \in \operatorname{dom} A$ mit $||x_i|| \ge 1$ und $||(A - \lambda \operatorname{Id})x_i|| \to 0$.

In obigem Beispiel können wir eine solche Folge mit Hilfe der verallgemeinerten Eigenfunktionen und Abschneidefunktionen finden: Sei $\eta_k \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ glatt mit $\eta_k|_{[-k,k]} = 1$, $\eta_k|_{|x|<2k} = 0$ und $|\eta_k'| \leqslant \frac{2}{k}$. Dann ist $\|\eta_k\|_2 \geqslant 1$ und

$$\left\| \left(i \frac{d}{dx} - \lambda \right) \eta_k(x) e^{i\lambda x} \right\| = \|\eta'_k(x) e^{i\lambda x}\|_2 \leqslant \frac{2}{k} (4k)^{\frac{1}{2}} \to 0.$$
 (6.1)

D.h. so hätten wir auch ohne den Spektralsatz sehen können, dass \mathbb{R} das Spektrum ist. (Aber natürlich ist es wie bei Matrizen, nur die Eigenwerte gibt nicht die gesamte Information zur Matrix, sondern man braucht dort auch jeweils die Eigenräume.)

Bevor wir hier weitermachen: Wie bei beschränkten selbstadjungierten Operatoren kann man den Spektralsatz nutzen um f(A) für geeignete Funktionen f zu definieren:

Vorl. 23

Satz 6.4.10. Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stetig und sei $A = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dE_{\lambda}$ ein selbstadjungierter Operator auf einem Hilberraum H. Dann ist

$$f(A) := \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) dE_{\lambda}$$

ein Operator mit Definitionsbereich

$$\operatorname{dom} f(A) := \left\{ x \in H \mid \int_{-\infty}^{\infty} (f(\lambda))^2 d\langle x, E_{\lambda} x \rangle_H \right\}.$$

Ist f beschränkt, dann ist $f(A) \in \mathcal{L}(H)$ mit $||f(A)|| \leq ||f||_{\infty}$. Ist $f(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ ein Polynom, dann $f(A) = \sum_{k=0}^{n} a_k A^k$.

Beweisidee: Erst einmal für f Polynome und da dann wie für das stetige Funktionalkalkül für beschränkte selbstadjungierte Operatoren. Man muss nur zusätzlich immer auf den Definitionsbereich aufpassen.

Damit kann man z.B. für $\lambda \in \rho(A)$ die Resolvente $R_{\lambda}(A)$ darstellen als

$$R_{\lambda}(A) = (A - \lambda)^{-1} = \int_{-\infty}^{\infty} (\mu - \lambda)^{-1} dE_{\mu} \in \mathcal{L}(H).$$

Außerdem gilt wie bei einer beschränkten Spektralfamilie für f ist konstant eins:

$$||u||^2 = \langle \operatorname{Id} u, u \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} d\langle E_{\lambda} u, u \rangle_{H}.$$

Schauen wir noch einmal auf die Charakterisierung des Spektrums (von vorhin mit $i\frac{d}{dx}$): Es gibt eine Folge $x_i \in \text{dom } A$ mit $||x_i|| \ge 1$ und $||(A - \lambda \text{Id})x_i|| \to 0$. Diese Folge gibt es auch, falls λ ein Eigenwert ist (wähle x_i konstant eine zugehörige Eigenfunktion). Bevor wir uns anschauen, wie wir diesen Effekt durch eine Zusatzbedingung an die Folge ausschliessen können und damit fast immer im stetigen Spektrum landen, nehmen wir eine leicht andere Zerlegung des Spektrums vor.

Definition 6.4.11. Sei $A: \text{dom } A \subset H \to H$ selbstadjungiert. Wir sagen λ liegt im diskreten Spektrum von A ($\lambda \in \sigma_{\text{disc}}(A)$), falls λ ein Eigenwert mit endlicher Multiplizität ist und es ein $\epsilon > 0$ mit $\sigma(A) \cap (\lambda - \epsilon, \lambda + \epsilon) = {\lambda}$ ist.

 $\sigma_{\rm ess}(A) := \sigma(A) \setminus \sigma_{\rm disc}(A)$ nennen wir essentielles Spektrum von A.

Das essentielle Spektrum besteht also aus dem kontinuierlichen Spektrum und allen Eigenwerte unendlicher Multiplizität. Insbesondere ist λ im essentiellen Spektrum falls dim Bild $(E_{\lambda+\epsilon}-E_{\lambda-\epsilon})=\infty$ ist für alle $\epsilon>0$.

Lemma 6.4.12. Es ist Bild $(E_{\kappa} - E_{\mu}) \subset \text{dom } A$.

^{*}Deshalb heißt E_{λ} manchmal auch resolution of the identity.

Beweis. Wir wollen die Beschreibung von dom A aus Satz 6.4.7 nachrechnen: Dazu sei o.B.d.A. $\kappa \geqslant \mu$ und $x = (E_{\kappa} - E_{\mu})u$. Mit $E_{\lambda}E_{\mu} = E_{\mu}E\lambda = E_{\mu}$ für $\mu \leqslant \lambda$ erhalten wir:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 d\langle x, E_{\lambda} x \rangle_H = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 d\langle (E_{\kappa} - E_{\mu}) u, E_{\lambda} (E_{\kappa} - E_{\mu}) u \rangle_H$$
$$= \int_{\mu}^{\kappa} \lambda^2 d\langle u, (E_{\lambda} - E_{\mu} u) \rangle_H + \int_{\kappa}^{\infty} \lambda d\langle u, (E_{\kappa} - E_{\mu}) u \rangle_H = \int_{\mu}^{\kappa} \lambda^2 d\langle u, E_{\lambda} u \rangle_H$$

Somit haben wir

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} \lambda d\langle x, E_{\lambda} x \rangle_{H} \right| \leqslant \max\{|\kappa|, |\mu|\}^{2} \int_{\mu}^{\kappa} d\langle u, E_{\lambda} u \rangle_{H} \leqslant \max\{|\kappa|, |\mu|\}^{2} \|u\|^{2} < \infty.$$

Also ist $x \in \text{dom } A$.

Das nächste Lemma sagt uns, dass im Falle von kontinuierlichen Spektrum, diese Folge x_i schwach konvergent zu Null gewählt werden kann.

Lemma 6.4.13. Sei A ein selbstadjungierter Operator auf einem Hilbertraum H. Dann ist $\lambda_0 \in \sigma_{ess}(A)$ genau dann, wenn es eine Folge $x_i \in \text{dom } A$ mit $||x_i|| = 1$, $x_i \stackrel{w}{\to} 0$ und $||(A - \lambda_0)x_i|| \to 0$ gibt.

Beweis. Sei $A = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dE_{\lambda}$ und $\lambda_0 \in \sigma_{\mathrm{ess}}(A)$. Damit ist dim Bild $(E_{\lambda_0 + \epsilon} - E_{\lambda_0 - \epsilon}) = \infty$ für alle $\epsilon > 0$ und wir können rekursiv eine Folge $x_i \in \mathrm{Bild}\,(E_{\lambda_0 + \frac{1}{i}} - E_{\lambda_0 - \frac{1}{i}})$ mit $\|x_i\| = 1$ für alle $i \geqslant 1$ und $\langle x_i, x_k \rangle = 0$ für alle $1 \leqslant k < i$ finden. Damit ist nach letztem Lemma $x_k \in \mathrm{dom}\,A$ und es ist

$$\|(A - \lambda_0)x_k\|^2 = \langle (A - \lambda_0)^2 x_k, x_k \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^2 d\langle E_{\lambda} x_k, x_k \rangle$$
$$= \int_{\lambda_0 - \frac{1}{k}}^{\lambda_0 + \frac{1}{k}} (\lambda - \lambda_0)^2 d\langle E_{\lambda} x_k, x_k \rangle \leqslant \frac{1}{k^2} \|x_k\|^2$$

Da die x_k paarweise orthogonal stehen, gilt $x_k \stackrel{w}{\to} 0$. Also ist $(x_k)_k$ die gesuchte Folge.

Sei nun x_k eine solche Folge und es ist zu zeigen, dass $\lambda_0 \in \sigma_{\mathrm{ess}}(H)$ gilt: Es muss $\lambda_0 \in \sigma(A)$ sein, da $(A - \lambda_0)^{-1}$ nicht beschränkt sein kann. Angenommen $\lambda_0 \in \sigma_{\mathrm{disc}}(A)$. Dann gibt es ein $\epsilon_0 > 0$, so dass E_λ konstant auf $[\lambda_0 - \epsilon_0, \lambda_0]$ und $(\lambda_0, \lambda_0 + \epsilon_0]$ ist und dim Bild $(E_{\lambda_0 + \epsilon_0} - E_{\lambda_0 - \epsilon_0}) < \infty$ ist. Somit haben wir

$$\begin{split} \|(A-\lambda_0)x_k\|^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} (\lambda-\lambda_0)^2 d\langle E_{\lambda}x_k, x_k \rangle \geqslant \epsilon_0^2 \left(\int_{-\infty}^{\lambda_0 - \epsilon_0} + \int_{\lambda_0 + \epsilon_0}^{\infty} \right) d\langle E_{\lambda}x_k, x_k \rangle \\ &= \epsilon_0^2 \left(\int_{-\infty}^{\infty} - \int_{\lambda_0 - \epsilon_0}^{\lambda_0 + \epsilon_0} \right) d\langle E_{\lambda}x_k, x_k \rangle \\ &= \epsilon_0^2 \left(\|x_k\|^2 - \langle (E_{\lambda_0 + \epsilon_0} - E_{\lambda_0 - \epsilon_0})x_k, x_k \rangle \right). \end{split}$$

Da dim Bild $(E_{\lambda_0+\epsilon_0}-E_{\lambda_0-\epsilon_0})<\infty$ ist $E_{\lambda_0+\epsilon_0}-E_{\lambda_0-\epsilon_0}$ ein Operator endlichen Ranges und damit insbesondere kompakt. Nach Lemma 4.0.10 folgt somit aus $x_k \stackrel{w}{\to} 0$, dass $\langle (E_{\lambda_0+\epsilon_0}-E_{\lambda_0-\epsilon_0})x_k,x_k\rangle \to 0$ für $k\to\infty$ gilt. Damit folgt für $k\to\infty$ insgesamt $0 \ge \epsilon_0^2$, was den Widerspruch gibt.

6.5. Schrödingeroperatoren

Wir betrachten nun Schrödingeroperatoren – der Laplace $\Delta = -\sum_{k=0}^{n} \frac{\partial^{2}}{\partial x_{k}^{2}}$ auf \mathbb{R}^{n} plus ein Potential $V : \mathbb{R}^{n} \to \mathbb{R}$ auf dem Hilbertraum $L^{2}(\mathbb{R}^{n})$. In Anwendungen ist das Potential zumeist von unten beschränkt, deshalb beschränkten wir uns auch darauf (außer beim Coloumbpotential (fürs Wasserstoffion)).

$$H = \Delta + V$$
,

hier wirkt V als Multiplikationsoperator.

Betrachten wir zunächst nur V=0: Als Definitionsbereich wählen wir zunächst $C_c^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ und nennen $H|_{C_c^{\infty}(\mathbb{R}^n)}=:H_0$. Dann ist H_0 ein dichtdefinierter symmetrischer Operator. Man kann nachrechnen, dass dom $H_0^*=H^2(\mathbb{R}^n)$ mit $H_0^*\varphi=\Delta\varphi$, wobei $\Delta\varphi$ hier die Summe der zweiten schwachen Ableitungen $\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\varphi$ ist. Insbesondere sieht man, dass H_0^* dichtdefiniert und abgeschlossen ist und man rechnet nach, dass H_0^* selbstadjungiert ist. Damit ist nach Satz 6.3.3 H_0 abschliessbar mit $H:=\overline{H_0}=(H_0)^{**}=H_0^*$. Also ist H mit dom $H=H^2(\mathbb{R}^n)$ selbstadjungiert.

Ist $V \in L^{\infty}(\mathbb{R}^n)$, dann ist V damit ein beschränkter Multiplikationsoperator auf \mathbb{R}^n . Somit ist $H = \Delta + V$ auch auf dom $H = H^2(\mathbb{R}^n)$ definiert.

Ist V von unten beschränkt, aber insgesamt unbeschränkt, folgt aus $\varphi \in H^2(\mathbb{R}^n)$ nicht mehr $V\varphi \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Trotzdem hat $H_0 = \Delta + V : C_c^{\infty}(\mathbb{R}^n) \subset L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ eine selbstadjungierte Erweiterung – die Friedrichs-Erweiterung.

Konstruktion Friedrichs Erweiterung Sei $A : \text{dom } A \subset H \to H$ ein dichtdefinierter, symmetrischer Operator mit $A \geqslant \text{Id.}$ Dann konstruieren wir eine nichtnegative selbstadjungierte Erweiterung wie folgt:

Wir definieren $d(u,v):=\langle u,Av\rangle_H$ für alle $u,v\in \operatorname{dom} A$. Wegen A symmetrisch und $A\geqslant \operatorname{Id}$ ist d ein inneres Produkt auf dom A. Sei $H_A:=\overline{\operatorname{dom} A}^d$. Dann ist H_A ein Hilbertraum und wegen $d(u,v)\geqslant\langle u,v\rangle_H$ gilt $H_A\subset H$.

Nun definiert $\ell_u(v \in H_A) = \langle v, u \rangle_H$ für jedes $u \in H$ ein Element $\ell_u \in H_A^*$. Nach dem Rieszschen Darstellungssatz, Satz 1.2.7, gibt es somit ein $w \in H_A$ mit $\ell_u(v) = d(v, w)$. Wir setzen $\mathcal{D} := \{w \in H_A \mid \exists u \in H \colon \ \forall v \in H_A : \langle v, u \rangle_H = d(v, w)\}$ und $\tilde{A} \colon w \in \mathcal{D} \subset H \mapsto u \in H_A$. (Wohldefiniertheit von \tilde{A} folgt wegen Dichtheit von dom A in H und der Nichtdegeneriertheit von $\langle ., . \rangle_H$.) Es ist dom $A \subset \mathcal{D}$ und $\tilde{A}|_{\text{dom }A} = A$. Man kann nun noch nachrechnen, dass \tilde{A} auch selbstadjungiert ist und noch immer $\tilde{A} \geqslant \text{Id}$ erfüllt.

Dieses \tilde{A} heißt dann Friedrichs-Erweiterung von A.

Die Voraussetzung $A \ge \operatorname{Id}$ ist keine Einschränkung: Ist $A \ge \mu\operatorname{Id}$, dann ist die Friedrichs-Erweiterung von $A - (\mu - 1)\operatorname{Id}$ plus $(\mu - 1)\operatorname{Id}$ die gesuchte Erweiterung (da $(\mu - 1)\operatorname{Id}$ beschränkt und selbstadjungiert ist). Friedrichs-Erweiterungen sind nützlich, wenn der Operator nicht wesentlich selbstadjungiert ist oder es einfach nur schwierig zu zeigen ist, dass er wesentlich selbstadjungiert ist.

Die Friedrichs-Erweiterung von $\Delta \colon C_c^{\infty}(\mathbb{R}^n) \subset L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ ist genau der selbstadjungierte Operator von oben mit Definitionsbereich $H^2(\mathbb{R}^n)$.

Aber allgemeiner wissen wir nun, dass Schrödingeroperatoren auf $C_c^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ mit nach untem beschränktem Potential eine selbstadjungierte Erweiterung haben. In vielen Situationen (z.B. wenn $V \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ ist, [6, Thm. X.26]) sind diese Operatoren auch wesentlich selbstadjungiert und damit die Friedrichs-Erweiterung die eindeutige selbstadjungierte Erweiterung. Man kann zeigen, dass für symmetrische Operatoren A mit $A \geq \text{Id}$ gilt: A ist genau dann wesentlich selbstadjungiert, wenn A wenn ker $A^* = \{0\}$ ist, was genau dann der Fall ist, wenn A nur eine von unten beschränkte selbstadjungierte Erweiterung besitzt [6, Thm. X.28].

6.5.1. Regularität

Wir haben

$$H^k(\mathbb{R}^n) \overset{\text{Bsp. } 1.1.2.iii}{=} \overline{C_c^{\infty}(\mathbb{R}^n)}^{\|\cdot\|_{H^k}}$$

$$\overset{\text{Satz}}{=} \overset{4.0.12}{=} \{ f \in L^2(\mathbb{R}^n) \mid \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leqslant k : \text{ Es existieren die schwachen}$$
 Ableitungen $D^{\alpha}f$ und $D^{\alpha}f \in L^2(\mathbb{R}^n) \}.$

Mit Hilfe von Fouriertransformationen* kann man zeigen[†]:

$$H^{k}(\mathbb{R}^{n}) = \{ f \in L^{2}(\mathbb{R}^{n}) \mid (1 + \Delta)^{\frac{k}{2}} f \in L^{2}(\mathbb{R}^{n}) \}$$

und die H^k -Norm ist äquivalent zur Norm $\|(1+\Delta)^{\frac{k}{2}}f\|_{L^2}$.

Dies gibt uns sofort elliptische Abschätzungen für den Laplaceoperator

Lemma 6.5.1. Sei $f \in H^k(\mathbb{R}^n)$, $k \ge 2$ und $\Delta f = u \in H^{k-2}(\mathbb{R}^n)$. Dann gibt es eine Konstante c = c(n, k) mit

$$||f||_{H^k} \le c(||u||_{H^{k-2}} + ||f||_{L^2}).$$

Beweis. Sei zunächst k=2 ($H^0=L^2$). Dann ist

$$||f||_{H^2} \le c||(1+\Delta)f||_{L^2} \le c(||u||_{L^2} + ||f||_{L^2}).$$

^{*}Da $\|\widehat{f}\|_{L^2_{\cdot}}=\|f\|_{L^2}$ ist und $\widehat{D^{\alpha}f}(\xi)=(\mathrm{i}^{|\alpha|}\xi^{\alpha}\widehat{f}(\xi)$

 $^{(1 + \}Delta)^{\frac{k}{2}}$ ist hier mit dem Funktionalkalkül ' $f(\Delta)$ ' wie in Satz 6.4.10 definiert.

6. Unbeschränkte Operatoren

Allgemein gilt für $f \in C_c^{\infty}(\mathbb{R}^n)$

$$||f||_{H^k} = \sum_{|\alpha| \le k-2} ||D^{\alpha} f||_{H^2} \le \sum_{|\alpha| \le k-2} c(||\Delta D^{\alpha} f||_{L^2} + ||D^{\alpha} f||_{L^2})$$

$$= c \left(\sum_{|\alpha| \le k-2} c(||D^{\alpha} \Delta f||_{L^2} + ||D^{\alpha} f||_{L^2}) \right) = c(||u||_{H^{k-2}} + ||f||_{H^{k-2}}).$$

Iterative Anwendung (und Nutzen von $||f||_{H^i} \leq ||f||_{H^j}$ für $i \leq j$) ergibt die Behauptung für $f \in C_c^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ und damit für ganz H^k .

Sei $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge. Wir setzen $H^k_0(\Omega){:=}\overline{C^\infty_c(\Omega)}^{\|.\|_{H^k}}$ und

$$H^k(\Omega) := \{ f \in L^2(\Omega) \mid \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leqslant k : \text{ Es existieren die schwachen}$$
 Ableitungen $D^{\alpha} f \text{ und } D^{\alpha} f \in L^2(\Omega) \}.$

Es ist $H_0^k(\Omega) \subsetneq H^k(\Omega)$ für Ω beschränkt und k > 0 (die Konstante ist H^k aber nicht in H_0^k). Außerdem gilt Lemma 6.5.1 dann auch ganz analog für $H^k(\Omega)$.

Für Anwendungen in PDE sind wichtige Sätze

Satz 6.5.2. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte und offene Teilmenge oder $\Omega = \mathbb{R}^n$.

(i) (Sobolevscher Einbettungssatz) Sei $f \in H^m(\Omega)$ und m > k + n. Dann gibt es ein $g \in C^k(\Omega)$ mit f = g fast überall. Man schreibt kurz: $f \in C^k(\Omega)$.

Insbesondere gibt es ein c = c(m, n) mit $||f||_{C^k} \le c||f||_{H^m}$.

(ii) (Spursatz) Sei Ω beschränkt und offen mit $\partial \Omega$ eine glatte Untermannigfaltigkeit. Dann hat res: $C^{\infty}(\bar{\Omega}) \to C^{\infty}(\partial \Omega)$, $f \mapsto f|_{\partial \Omega}$, eine stetige Fortsetzung

res:
$$H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$$
.

Wir schreiben $f|_{\partial\Omega}$:=res f.

Insbesondere ist $H_0^1(\Omega) = \{ f \in H^1(\Omega) | f|_{\partial\Omega} = 0^* \}.$

(iii) (Rellich-Kondrakov) Sei Ω beschränkt und offen. Dann ist die Inklusion $H^m_{(0)}(\Omega) \to H^{m-1}_{(0)}(\Omega)$ kompakt.[†]

Beweisskizze. (i) Skizze nur für $\Omega = \mathbb{R}^n$ – mit Fouriertransformationen:

$$\begin{aligned} & \|f\|_{H^m} = \sum_{|\alpha| \leqslant m} \|\xi^{\alpha} \hat{f}(\xi)\|_{L^2} \geqslant c \|(1 + |\xi|^2)^{\frac{m}{2}} \hat{f}(\xi)\|_{L^2} \\ & \text{Weiterhin ist} \end{aligned}$$

$$||D^{\alpha}f||_{C^0} \le c_1 ||\widehat{D^{\alpha}f}||_{L^1} = c_1 ||\xi|^{\alpha} \widehat{f}(\xi)||_{L^1}$$

^{*}Hier 0 als Element in $L^2(\partial\Omega)$.

 $^{^\}dagger \mathrm{Der}$ Index (0) bedeutet, dass die Aussage sowohl für die H- als auch die H_0 -Räume gilt.

und damit

$$\||\xi|^{\alpha} \hat{f}(\xi)\|_{L^{1}} \leq \int_{\mathbb{R}^{n}} (1 + |\xi|^{2})^{\frac{|\alpha|}{2}} |\hat{f}(\xi)| d\text{vol}_{\xi}$$

$$\leq \left(\int_{\mathbb{R}^{n}} (1 + |\xi|^{2})^{m} |\hat{f}(\xi)|^{2} d\text{vol}_{\xi} \right)^{\frac{1}{2}} \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}^{n}} (1 + |\xi|^{2})^{-\frac{m-k}{2}} d\text{vol}_{\xi} \right)}_{<\infty \text{ für } m > k + \frac{n}{n}}.$$

Für Ω beschränkt und offen kann man z.B. zuerst zeigen [1, S. 146 ff.], dass man $f \in H^k(\Omega)$ zu einem Element in $Ef \in H^k(\mathbb{R}^n)$ derart fortsetzen kann, dass $||Ef||_{H^k(\mathbb{R}^n)} \leq c||f||_{H^k}$ (mit c von f unabhängig) ist und dann obiges Resultat anwenden.

(ii) Erst einmal für $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0\}$ auch wenn dieses Ω nicht beschränkt ist (deshalb res nur auf $C_c^{\infty}(\bar{\Omega})$ definieren). In Richtung von x_n mit Hauptsatz der Analysis (wie in Lemma 6.1.5) und dann Integration über die restlichen Koordinaten.

Für Ω wie im Satz: Zerlegung der Eins und geeignete Koordinaten auf der Untermannigfaltigkeit, so dass in Koordinaten $\partial\Omega$ wie der Rand des oberen Halbraumes aussieht.

(iii) Für H_0 mit Fouriertransformationen und Satz von dominierter Konvergenz (und erst einmal für m=1). Für H mit so einem Fortsetzungsoperator E wie oben beschrieben, dann auf einem größeren Gebiet Abschneidefunktionen und das Resultat für H_0 benutzen.

Folgerung 6.5.3. Sei
$$f \in H^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$$
 mit $\Delta f = u \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$. Dann ist $f \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$. Sei $f \in H^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$ mit $\Delta f = \lambda f$. Dann ist $f \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$.

Beweis. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und offen. Dann impliziert $f \in H^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$, dass $f|_{\Omega} \in H^2(\Omega)$ ist. Da u glatt ist, ist $u|_{\Omega} \in H^k(\Omega)$ für alle k. Elliptische Abschätzung wie in Lemma 6.5.1 gibt somit $f \in H^k(\Omega)$ für alle k und damit ist nach dem Sobolevschen Einbettungssatz f glatt.

Gleiches Argument, rekursiv genutzt, gibt die zweite Behauptung.

6.5.2. Spektra einiger Schrödingeroperatoren

Nach Lemma 6.4.5 besteht das Spektrum von der selbstadjungierten Erweiterung $H=\Delta+V$ nur aus isolierten Eigenwerten endlicher Multiplizität (das diskrete Spektrum) – hier sind die zugehörigen Eigenfunktionen nach Folgerung 6.5.3 automatisch glatt – und dem essentiellen Spektrum.

Das essentielle Spektrum ist eine Eigenschaft des Operators im 'Unendlichen von \mathbb{R}^n ' im folgenden Sinne:

Lemma 6.5.4. Sei R > 0. Es ist $\lambda_0 \in \sigma_{ess}(H)$ genau dann, wenn es eine Folge $\varphi_i \in \text{dom } H$ mit supp $\varphi_i \subset \mathbb{R}^n \backslash B_R(0)^*$ und $\|(H - \lambda_0)\varphi_i\|_{L^2} \to 0$ für $i \to \infty$ gibt.

Vorl. 24

^{*}D.h. für $\varphi_i \in L^2$, dass es eine Realisierung von φ_i mit Support in $\mathbb{R}^n \backslash B_R(0)$ gibt.

6. Unbeschränkte Operatoren

Beweis. Nach Lemma 6.4.13 gibt es eine Folge $u_i \in \text{dom } H \text{ mit } ||u_i||_{L^2} = 1, u_i \stackrel{w}{\to} 0 \text{ und } ||(H - \lambda_0)u_i||_{L^2} \to 0 \text{ für } i \to \infty.$

Wir zeigen als erstes, dass u_i eine beschränkte Folge in $H^2(\mathbb{R}^n)$ ist:

$$\begin{aligned} \|u_i\|_{H^2} &\leqslant c \|(1+\Delta)u_i\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leqslant c \|(H-\lambda_0)u_i\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + c \|(1-V+\lambda_0)u_i\|_{L^2(\{1\geqslant V-\lambda_0\})} \\ & \text{Vunterh. beschr.} \\ &\leqslant c \|(H-\lambda_0)u_i\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + c \max\{1-V+\lambda_0\} \to c \max\{1-V+\lambda_0\}. \end{aligned}$$

Nach Rellich-Kondrakov konvergiert somit u_i auf allen beschränkten offenen Teilmengen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ schon stark in $H^1(\Omega)$, also insbesondere auch in $L^2(\Omega)$, konvergiert. Da u_i schwach in L^2 gegen Null konvergiert, folgt mit Lemma 4.0.2.i, dass $u_i|_{\Omega} \to 0$ in L^2 ist.

Sei nun $\eta_i \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ glatt mit supp $\eta_i \subset \mathbb{R}^n \backslash B_{\frac{1}{i}}(0)$, $\|\eta_i\|_{C^2} \leqslant \frac{1}{i}$. Dann gilt

$$\|(H-\lambda_0)(\eta_j u_i)\|_{L^2} \leqslant \frac{1}{j} \|u_i\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} + \|(H-\lambda_0)u_i\|_{L^2} \to 0.$$

Außerdem gilt $\eta_j u_i \stackrel{w}{\to} 0$ und

$$1 = \|u_i\|_{L^2} \leqslant \|\eta_j u_i\|_{L^2} + \|(1 - \eta_j) u_i\|_{L^2} \leqslant \|\eta_j u_i\|_{L^2} + \|u_i\|_{L^2(\operatorname{supp}\eta_j)} \to \inf_i \|\eta_j u_i\|_{L^2}.$$

Damit muss $\inf_i \|\eta_j u_i\|_{L^2} > 0$ sein und $\varphi_i = \frac{\eta_j u_i}{\|\eta_j u_i\|_{L^2}}$ für $j > R^{-1}$ ist die gesuchte Folge.

Beispiel 6.5.5. Wir betrachten $\Delta \colon H^2(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$. Es ist $\Delta \geq 0$ und selbstadjungiert. Das Spektrum ist nach Lemma 6.4.5 damit eine Teilmenge von $[0, \infty)$.

Es ist $\Delta e^{\mathrm{i}\langle\xi,x\rangle}=|\xi|^2e^{\mathrm{i}\langle\xi,x\rangle}$ für alle $\xi\in\mathbb{R}^n$. Da $e^{\mathrm{i}\langle\xi,x\rangle}\notin L^2$ ist, ist $e^{\mathrm{i}\langle\xi,x\rangle}$ keine Eigenfunktion im funktionalanalytischen Sinne. Aber wie bei $\mathrm{i}\frac{d}{dx}$ können wir $e^{\mathrm{i}\langle\xi,x\rangle}$ mit Abschneidefunktionen multiplizieren, um zu sehen, dass $|\xi|^2$ im essentiellen Spektrum von Δ ist. Also ist $\sigma(\Delta)=\sigma_{\mathrm{ess}}(\Delta)=[0,\infty)$. Man kann analog wie bei $\mathrm{i}\frac{d}{dx}$ auch hier wieder Fouriertransformationen verwenden, um die Spektralfamilie explizit hinzuschreiben

Beispiel 6.5.6. \mathbb{R}^3 : $H=\Delta+V$ mit $V(x)=-\frac{1}{|x|}$ beschreibt ein einzelnen Elektron um einen Kern herum (z.B. das Wasserstoffion). In Dimension 3 ist $V\in L^2_{\mathrm{loc}}$ und damit $H_0=H|_{C^\infty_c(\mathbb{R}^3)}$ wesentlich selbstadjungiert. H sei der selbstadjungierte Abschluss (und damit gleich der Friedrichs-Erweiterung) – Hier ist V nicht von unten beschränkt, wir werden aber später sehen, dass es H schon ist, es also ein $\mu\in\mathbb{R}$ mit $H\geqslant \mu\mathrm{Id}$ gibt.

H hat also nur diskretes Spektrum und essentielles Spektrum. Das essentielle Spektrum ist nach letztem Lemma eine Eigenschaft des Unendlichen von \mathbb{R}^n . Da geht aber V gegen Null und H sieht immer mehr aus wie der Laplace – wir erwarten also $\sigma_{\rm ess}(H)=[0,\infty)$. Genauer:

Sei $\lambda_0 \in \sigma_{\rm ess}(H)$ und für R > 0 sei φ_i eine Folge wie im letztem Lemma. Dann ist

$$\begin{split} 0 &\longleftarrow \!\! \langle (H-\lambda_0)\varphi_i,\varphi_i\rangle_{L^2} \geqslant \langle (V-\lambda_0)\varphi_i,\varphi_i\rangle_{L^2} \\ &\geqslant \!\! \langle (V-\lambda_0)\varphi_i,\varphi_i\rangle_{L^2(\mathbb{R}^3\backslash B_R(0))} \geqslant \left(-\frac{1}{R}-\lambda_0\right) \|\varphi_i\|_{L^2}. \end{split}$$

Also muss $\sigma_{\rm ess}(H) \subset [0,\infty)$ sein. Um zu sehen, dass $[0,\infty)$ wirklich das essentielle Spektrum ist, kann man den Testfunktionen wie bei Laplace (ohne Potential) direkt nachrechnen.

Wir kennen also nun das essentielle Spektrum. Das diskrete Spektrum (falls existent) muss in $[-\min_{x\in\mathbb{R}^n}V(x),0)$ liegen.

Beispiel 6.5.7. Sei $H = \Delta + V$ ein Schrödingeroperator auf $C_c^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ mit $V(x) \to \infty$ für $|x| \to \infty$. Dann hat (die selbstadjungierte Erweiterung von) H nur diskretes Spektrum:

Das Spektrum ist nach Lemma 6.4.5 reell. Sei $\lambda_0 \in \mathbb{R}$. Dann gibt es ein R > 0 mit $V(x) \ge \lambda_0 + 1$ für alle $x \notin B_R(0) \subset \mathbb{R}^n$. Sei $u \in C_c^{\infty}(\mathbb{R}^n \backslash B_R(0))$ und $||u||_{L^2} = 1$. Dann ist

$$\|(H - \lambda_0)u\|_{L^2} \geqslant \langle (\Delta + V - \lambda_0)u, u \rangle \geqslant \langle u, u \rangle = 1.$$

Nach letztem Lemma kann λ_0 somit nicht im essentiellen Spektrum sein. Also kann H nur diskretes Spektrum besitzen.

Im Gegensatz dazu:

Beispiel 6.5.8. Sei nun V ein periodisches Potential – periodisch in mindestens eine Richtung, sagen wir x_1 , also $V(x+ae_1)=V(x)$ für alle $x\in\mathbb{R}^n$ und ein $a\in\mathbb{R}$. Außerdem sei $V\in L^2_{\mathrm{loc}}$ (dann ist $\Delta+V|_{C^\infty_c(\mathbb{R}^n)}$ auf alle Fälle wesentlich selbstadjungiert). Sei H der selbstadjungierte Abschluss.

Angenommen $\lambda \in \sigma(H)$ ist Eigenwert zum Eigenwert λ und sei $\varphi \in \text{dom } H$ eine zugehörige Eigenfunktion. Dann ist $\varphi_k \colon x \mapsto \varphi(x + ake_1)$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ auch eine Eigenfunktion zum Eigenwert λ . D.h. falls H Punktspektrum hat, hat jeder Eigenwert darin automatisch unendliche Multiplizität. H hat also nur essentielles Spektrum.

Die Frage ist natürlich, wie man zumindest für geeignete, einfache Potentiale, die Eigenwerte bestimmen kann. Sei also $V \in L^2_{\rm loc}$ von unten beschränkt und $H = \overline{\Delta + V|_{C^\infty_{\infty}(\mathbb{R}^n)}}$.

Wie in Folgerung 6.5.3 kann man sehen, dass Eigenfunktionen von H zumindest in allen Punkten glatt sind, in denen auch V glatt ist.

Wir wollen uns auf folgende Beispiele beschränken, um explizit das Spektrum zu finden:

- (I) der quantenmechanische Oszillator*: $V(x) = |x|^2$
- (II) Wasserstoffion: $V(x) = -\frac{1}{|x|}$ in Dimension 3.

Zu (I): Ist λ ein Eigenwert, dann muss es also ein $u \in L^2(\mathbb{R}^n) \cap C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ mit $\Delta u(x) + |x|^2 u(x) = \lambda u(x)$ geben.

^{*}https://de.wikipedia.org/wiki/Harmonischer_Oszillator_(Quantenmechanik)

6. Unbeschränkte Operatoren

(a)
$$n = 1$$
: $-u''(x) + x^2 u(x) = \lambda u(x)$

Aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichung wissen wir, dass für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ der Lösungsraum dieser Differentialgleichung zweidimensional ist.

!! Aber wir haben hier die Zusatzbedingung, dass $u \in L^2$ sein soll. Dann gibt es nur für abzählbar viele λ eine Lösung und zwar genau eine: Der n.te Eigenwert $\lambda_n = n + \frac{1}{2}$ hat die Eigenfunktion $\varphi_n(x) = \pi^{-\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} H_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}}$ mit $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$ (Die φ_n heißen Hermite-Funktionen und H_n heißen Hermite-Polynome.)

(b) Für $n \ge 2$ kann man für $V(x) = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$ den Ansatz machen $u(x) = u_1(x_1) \cdot \ldots \cdot u_n(x_n)$ und so kann man das Problem in mehrere eindimensionale Probleme zerlegen.* Dann erhält man Eigenfunktionen $u_1(x_1) \cdot \ldots \cdot u_n(x_n)$ zum Eigenwert $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n$, wobei u_i eine Eigenfunktion des 1D-quantenmechanischen Oszillators zum Eigenwert λ_i ist.

Das letzte profitiert sehr davon, dass V(x) Summe von Potentialen in jede Koordinatenrichtung ist. Für allgemeines radialsymmetrisches glattes Potential V(r) macht man eher folgendes:

n=2: In Polarkoordinaten:

$$-\frac{\partial^2}{\partial r^2}u(r,\varphi) - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}u(r,\varphi) - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}u(r,\varphi) + V(r)u(r,\varphi) = \lambda u(r,\varphi).$$

Man macht den Ansatz $u(r,\varphi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_k(r) e^{\mathrm{i}k\varphi}$ (also Fourierreihe in der periodischen Variable φ – für r fest ist, das genau die Spektralzerlegung von $-\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$ auf $H^2(S^1) = \overline{C^{\infty}(S^1)}^{\|\cdot\|_{H^2}}$). Die $e^{\mathrm{i}k\varphi}$ sind genau die Eigenfunktionen von $\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$. Einsetzen liefert:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{\mathrm{i}k\varphi} \left(-f_k''(r) - \frac{1}{r} f_k'(r) + \frac{k^2}{r^2} f_k(r) + V(r) f_k(r) - \lambda f_k(r) \right) = 0.$$

Dann muss für jedes $k \in \mathbb{Z}$

$$(L_k f_k)(r) := -f_k''(r) - \frac{1}{r} f_k'(r) + \frac{k^2}{r^2} f_k(r) + V(r) f_k(r) = \lambda f_k(r)$$

sein. Wir haben also eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung auf $(0, \infty)$, die ohne weitere Bedingungen wieder für jedes λ einen zweidimensionalen Lösungsraum haben wird.

Wir brauchen also wieder Zusatzbedingungen (=Randbedingungen): u soll in $L^2(\mathbb{R}^2)$ sein, also sollte auch $f_k(r)e^{ik\varphi} \in L^2(\mathbb{R}^2)$ sein.

Nun ist $||f_k(r)e^{\mathrm{i}k\varphi}||_{L^2}^2 = 2\pi \int_0^\infty |f(r)|^2 r dr$. D.h. der richtige Hilbertraum für die Lösung von f_k ist nicht mehr $L^2((0,\infty))$ sondern ein gewichteter L^2 -Raum:

^{*}Bilder der Eigenfunktionen für n=2 unter https://www.st-andrews.ac.uk/physics/quvis/simulations_html5/sims/2DQuantumHarmonicOscillator/2d_oscillator2.html

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge und $\rho \colon \Omega \to \mathbb{R}$ stetig, $\rho > 0$. Dann setzen wir

$$L^2_{\rho}(\Omega) := \overline{C_c^{\infty}(\bar{\Omega})}^{\|.\|_{L^2_{\rho}}} \quad \text{ mit } \|f \in C_c^{\infty}(\bar{\Omega})\|_{L^2_{\rho}} := \left(\int_{\Omega} |f(x)|^2 \rho(x) \mathrm{d}\mathrm{vol}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Man überprüft direkt, dass $\|.\|_{L^2_{\rho}}$ wirklich ein inneres Produkt ist (da $\rho > 0$) und damit $L^2_{\rho}(\Omega)$ ein Hilbertraum ist.

In unserer Situation oben nehmen wir also als Hilbertraum $L_r^2((0,\infty))$. Dies entspricht einer Randbedingung im Unendlichen (also $r \to \infty$), da es eine gewisse Abfalleigenschaft impliziert.

Es legt aber noch keine Randbedingung bei r = 0 fest. In diesem konkreten Beispiel erhalten wir die aber wie folgt: Die Eigenfunktionen u am Ende soll glatt sein, also auch in der Null. Daraus folgt $f'_k(0) = 0$.

Für jedes $k \in \mathbb{Z}$ suchen wir also die Eigenfunktionen f von L_k in $L_r^2((0,\infty))$ mit f'(0) = 0.

n = 3: In Kugelkoordinaten:

$$-\frac{\partial^2}{\partial r^2}u(r,\varphi,\theta) - \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}u(r,\varphi,\theta) - \frac{1}{r^2}\Delta_{S^2}u(r,\varphi,\theta) + r^2u(r,\varphi,\theta) = \lambda u(r,\varphi,\theta)$$

wobei Δ_{S^2} ein Differentialoperator zweiter Ordnung in φ und θ (also unabhängig von r) ist – der Laplaceoperator auf S^2 (explizite Formel auf Seite 105).

In Dimension n=2 wussten wir zufällig schon die Spektralzerlegung von $-\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$ – dem Laplaceoperator auf S^1 . Das kann man auch für $\Delta_{S^2} = \overline{\Delta_{S^2}|_{C^\infty(S^2)}}$: $H^2(S^2) \subset L^2(S^2) \to L^2(S^2)$ machen. Auf Seite 105 sieht man, wie man auch das wieder auf gewöhnliche Differentialgleichungen zurückführen kann, eine in φ und eine in θ (Die in φ gibt wieder eine Fourierreihe, die in θ ist ein singuläres Sturm-Liouville-Problem, dessen Eigenfunktionen assoziierte Legendre-Polynome* in der Variablen $\cos\theta$ sind.). Dazu gibt es explizite Lösungen – sogenannte spherical harmonics†: Für alle $\ell \in \mathbb{N}$ und alle $m \in \mathbb{Z}$ mit $-\ell \leqslant m \leqslant \ell$ gibt es $Y_\ell^m(\varphi,\theta)$ mit $\Delta_{S^2}Y_\ell^m(\varphi,\theta) = \ell(\ell+1)Y_\ell^m(\varphi,\theta)$. Diese Y_m^ℓ bilden eine orthonormale Hilbertbasis von $L^2(S^2)$.

Nutzen wir das und setzen $u(r,\varphi,\theta)=\sum_{\ell\in\mathbb{N};-\ell\leqslant m\leqslant\ell}f_{\ell,m}(r)Y_m^\ell(\varphi,\theta)$ erhalten wir ganz analog zu n=2 für $f_{\ell,m}$ die Differentialgleichung

$$-f_{\ell,m}''(r) - \frac{2}{r}f_{\ell,m}'(r) + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}f_{\ell,m}(r) + V(r)f_{\ell,m}(r) = \lambda f_{\ell,m}(r).$$

Dieses Mal sind die Randbedingungen $f_{\ell,m} \in L^2_{r^2}((0,\infty))$ (Das Gewicht r^2 kommt aus dem Volumenelement in sphärischen Koordinaten) und $f'_{\ell,m}(0) = 0$.

^{*}https://en.wikipedia.org/wiki/Associated_Legendre_polynomials

[†]https://en.wikipedia.org/wiki/Spherical_harmonics

Zu (II): Mit dem gleichen Vorgehen wie in oben erhalten wir in für den radialen Anteil die Differentialgleichung

$$-f''(r) - \frac{2}{r}f'(r) + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}f(r)V(r)f(r) = \lambda f(r).$$

Wir wissen schon das Eigenwerte λ vom zugehörigen H negativ sein müssen. Außerdem muss wie oben $f \in L^2_{r^2}((0,\infty))$ sein. Es fehlt noch die Randbedingung bei r=0. Dieses Mal können wir nicht über Glattheit der Eigenfunktion argumentieren, da wir diese apriori nur haben, wo V glatt ist, also weg von der Null. Man kann sich überlegen, dass die richtige Randbedingung bei r=0 ist, dass $\lim_{r\to 0} f(r)$ als endlicher Grenzwert existieren soll ist. Dann kann man die Lösungen explizit hinschreiben*.

Man sieht an den letzten Beispielen, dass man bei radialsymmetrischen Potentialen, die Symmetrien vom \mathbb{R}^n nutzen kann und die Eigenwertgleichtung für den Schrödingeroperator auf gewöhnliche Differentialgleichungen der Form

$$-f''(r) - \frac{n-1}{r}f'(r) + \frac{\lambda_k}{r^2}f(r) + V(r)f(r) = \lambda f(r)$$

mit λ_k Eigenwert von $\Delta_{S^{n-1}}$ reduzieren kann für $f \in L^2_{r^{n-1}}((0,\infty))$ und einer geeigneten Randbedingung in r=0. (Explizit lösbar ist dies natürlich nur für gewisse Potentiale.) Aber auch allgemein, kann man relativ viel über solche Differentialgleichungen sagen – das sind immer Sturm-Liouville-Operatoren (da $-f''(r) - \frac{n-1}{r}f'(r) = -\frac{1}{r^n}(r^nf'(r))'$ ist). Nur nun auf $(0,\infty)$ und damit nicht mehr regulär – sondern singulär, vgl. Abschnitt B.2. Aber man kann sich überlegen, dass Lösungen davon nicht nur 'echte' Eigenfunktionen in L^2 des Ausgangsproblem beschreiben, sondern auch das essentielle Spektrum (Mit Abschneidefunktionen wie in (6.1) sieht man das Lösungen (die nicht zu schnell wachsen...) Elemente im essentiellen Spektrum beschreiben. Allerdings muss man mehr arbeiten, um zu sehen, dass man so auch das gesamte essentielle Spektrum erhält - z.B. mit Hilfe sogenannter Gelfand-Tripel/Rigged Hilbert spaces † .)

Kommen wir als anderes Beispiel nun zu periodischen Potentialen – in Dimension 1 ist hat der Operator dann die Form $-\frac{d^2}{dx^2}+V(x)$ mit V(x)=V(x+a) für ein $a\in\mathbb{R}$ und $V\in L^2_{\mathrm{loc}}$. Wir hatten uns in Beispiel 6.5.8 schon überlegt, dass es nur essentielles Spektrum gibt.

Für periodische Potentiale gibt es die Floquet-Bloch- $Theorie^{\ddagger}$. Hier nur für den Fall n=1 (gilt aber auch analog in höheren Dimensionen) – es gibt aber recht ähnliche Versionen auch für höhere Dimensionen, wenn das Potential in alle Koordinatenrichtungen periodisch ist:

Sei $H = -\frac{d^2}{dx^2} + V(x)$ für $V \in L^2_{loc}(\mathbb{R})$ mit V(x) = V(x+a). Die Floquet-Bloch-Theorie sagt, dass das gesamte Spektrum von Lösungen von $H\psi = \lambda \psi$ der Form $\psi(x) = e^{\mathrm{i}kx}u(x)$

^{*}https://en.wikipedia.org/wiki/Hydrogen-like_atom

[†]https://en.wikipedia.org/wiki/Rigged_Hilbert_space

[‡]https://en.wikipedia.org/wiki/Bloch%27s_theorem

mit u(x+a) = u(x) und $k \in \mathbb{R}$ kommt.* Man kann sich überlegen das diese Darstellung von ψ kein eindeutiges u und k liefert und man sich auf $k \in [-\frac{\pi}{a}, \frac{\pi}{a}]^{\dagger}$ zu beschränken.

Wir suchen zunächst das Spektrum von $H(k):=-\frac{d^2}{dx^2}+V(x)$ auf $\left[-\frac{a}{2},\frac{a}{2}\right]$ mit den Randbedingungen $\psi(-\frac{a}{2})=e^{\mathrm{i}k}\psi(\frac{a}{2})$ und $\psi'(-\frac{a}{2})=e^{\mathrm{i}k}\psi(\frac{a}{2})$. Die Randbedingungen sind genau so gewählt, dass sich eine Eigenfunktion ψ zu $H(k)\psi=\lambda\psi$ sich zu einer verallgemeinerten Eigenfunktion von H von $H\psi=\lambda\psi$ fortsetzen lässt.

So ist H(k) ein reguläres Sturm-Liouville-Problem und die Randbedingungen entsprechen der Wahl einer selbstadjungierten Erweiterung (Es gibt für H(k) also nur diskretes Spektrum).

Mit einem Argument mit Abschneidefunktionen sieht man $\sigma(H) \subset \sigma(H(k))$ für alle k. Mit mehr Arbeit sieht man allerdings auch, dass wir auf diese Weise das gesamt Spektrum erhalten, also

$$\sigma(H) = \bigcup_{k \in \mathcal{L}} \sigma(H(k))$$

ist. Das typische Verhalten ist dann, dass das Spektrum von H aus disjunkten Intervallen besteht – die Bereiche dazwischen nennt man $Bandl\"ucken^{\ddagger}$.

Als letztes Beispiel wollen wir noch einmal zu unserem Dirichletproblem vom Anfang zurückkommen:

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt mit $\partial \Omega$ nett genug (z.B. eine glatte Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^n). Dann ist

$$\Delta u := -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^{2} u}{\partial x_{i}^{2}} = f \in C^{0}(\bar{\Omega}) \quad \text{ auf } \Omega$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0 \quad \text{ auf } \partial\Omega$$

Es ist $\Delta \colon C_c^\infty(\Omega) \subset L^2(\bar{\Omega}) \to L^2(\bar{\Omega})$ ein dichtdefinierter symmetrischer Operator. Die 1D-Variante wäre der regulärer Sturm-Liouville-Operator $-\frac{d^2}{dx^2}$ auf einem geschlossenen Intervall. D.h. wie auch dort wird Δ unendlich viele selbstadjungierte Erweiterungen haben. Z.B. dom $\Delta = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ – das ist der Laplace mit Dirichletrandbedingungen (und gleichzeitig die Friedrichs-Erweiterung von $\Delta|_{C_c^\infty(\Omega)}$). Eine andere selbstadjungierte Erweiterung wäre dom $\Delta = \{u \in H^2(\Omega) \mid \partial_n u = 0 \text{ auf } \partial\Omega\}^\S$ – dies ist der Laplace mit Neumannrandbedingungen.

Da wir aber ein Problem mit Dirichletrandwerten lösen wollen, betrachten wir Δ auf dom $\Delta = H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)$. Als selbstadjungierter nichtnegativer Operator hat Δ a priori

^{*}Um das zu zeigen, benutzt man unter anderem das H mit dem Translationsoperator $T\psi(x)=\psi(x+a)$ kommutiert und $e^{\mathrm{i}kx}$ verallgemeinerte Eigenfunktionen zum Eigenwert $e^{\mathrm{i}ka}$ sind.

 $^{^\}dagger \text{Die Brillouin-Zone des dualen Gitters - https://en.wikipedia.org/wiki/Brillouin_zone.}$

[‡]https://en.wikipedia.org/wiki/Particle_in_a_one-dimensional_lattice

[§]Hier ist n das Einheitsnormalenvektorfeld auf Ω . Das kann man zu einem Vektorfeld auf ganz Ω fortsetzen. Dann existiert $\partial_n u$ als schwache Ableitung und ist somit in $H^1(\Omega)$. Nach dem Spursatz ist somit $\partial_n u|_{\partial\Omega}\in L^2(\partial\Omega)$ und man kann verlangen, dass es in diesem Raum gleich Null ist.

6. Unbeschränkte Operatoren

nur diskretes und essentielles Spektrum und $\sigma(\Delta) \subset [0,\infty)$. Da jedoch $\bar{\Omega}$ kompakt ist, kann man analog zum regulären Sturm-Liouville-Problem, s. Seite B.1.2, argumentieren, dass es kein essentielles Spektrum geben kann. Es gibt also nur diskretes Spektrum $0 \leq \lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \ldots$ gezählt mit Vielfachheiten. Da Δ unbeschränkt ist, ist auch das Spektrum unbeschränkt und damit $\lim_{i\to\infty}\lambda_i=\infty$. Die zugehörigen Eigenfunktionen v_i (Diese erfüllen insbesondere $v_i|_{\partial\Omega}=0$) seien so gewählt, dass sie eine Orthonormalbasis von $L^2(\bar{\Omega})$. Der Spektralsatz gibt uns $\mathrm{Id}=\sum_{i=0}^\infty P_i$ mit P_i die Orthogonalprojektion auf $\mathbb{C}v_i$. Damit können wir jedes $f\in L^2(\bar{\Omega})$ als $f=\sum_{i=0}^\infty \alpha_i v_i$ für $\alpha_i\in\mathbb{C}$ schreiben*. Da wir eine Lösung u des Dirichletproblem in C^2 suchen, ist u insbesondere in L^2 und hat auch eine Zerlegung $u=\sum_{i=0}^\infty \beta_i v_i$. Einsetzen in $\Delta u=f$ liefert:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i \beta_i v_i = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i \alpha_i v_i$$

und damit $\lambda_i \beta_i = \alpha_i$ für alle *i*. Das bestimmt für alle *i* β_i aus α_i eindeutig. Problem wäre nur, wenn $\lambda_0 = 0$ wäre. Doch

$$0 \stackrel{\Delta u = 0}{=} \int_{\Omega} u \Delta u \operatorname{dvol} \stackrel{u|_{\partial \Omega} = 0}{=} \int_{\Omega} |\nabla u|^{2} \operatorname{dvol}$$

impliziert u ist auf Ω konstant, damit wegen $u|_{\partial\Omega}=0$ gleich Null und kann somit keine Eigenfunktion sein. Also ist

$$u = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\alpha_i}{\lambda_i} v_i.$$

Da die λ_i nach unten beschränkt sind, ist u auch wirklich in L^2 . Regularitätstheorie liefert $u \in H^k(\overline{\Omega})$ für alle k und damit $C^{\infty}(\Omega)$ und $u|_{\partial\Omega} = 0$.

^{*}Obwohl die v_i alle Nullrandwerte haben, folgt nicht automatisch, dass f auch Nullrandwerte haben muss. da dies eine Gleichheit in L^2 ist.

A. Zusammenfassung Analysis 3

A.1. Vervollständigung

Sei (X,d) ein metrischer Raum. Ist X nicht vollständig, dann ist die Idee für alle Cauchyfolgen, die nicht schon in X konvergieren, ein Element zu X hinzuzunehmen, wobei für Cauchyfolgen, die den gleichen Grenzwert haben sollten, das gleiche Element hinzugefügt werden soll. So kann man \mathbb{R} aus \mathbb{Q} konstruieren:

Definition A.1.1. [4, Def. 1.3.1] Sei (X, d) ein metrischer Raum. Sei

$$\overline{X}^d := \{(a_k)_{k \in \mathbb{N}} \text{ Cauchyfolge in } (X, d)\} / \sim$$

wobei $(a_k)_k \sim (b_k)_k$ genau dann, wenn $d(a_k, b_k) \to 0$ für $k \to \infty$ ist.

Die Abbildung $\iota: X \to \overline{X}^d$, $x \mapsto [(x)_k]_d$, ist injektiv, da aus $[(x)_k]_d = [(y)_k]_d$ folgt, dass d(x,y) = 0 sein muss. Damit können wir X mit $\iota(X)$ identifizieren.

 \overline{X}^d wird mit

$$\bar{d}([a_k]_d, [b_k]_d) := \lim_{k \to \infty} d(a_k, b_k).$$

wieder zu einem metrischen Raum, der nun vollständig ist [4, Satz 1.3.2], und für den \bar{d} auf $X \times X \subset \overline{X}^d \times \overline{X}^d$ gleich d ist. Den metrischen Raum \overline{X}^d (dann immer versehen mit \bar{d}) nennt man Vervollständigung von (X,d).

Sei $(X, \|.\|_X)$ ein normierter Vektorraum und $d(x,y) := \|x-y\|_X$. Dann ist (X,d) ein metrischer Raum [3, Abschnitt 3.3] und die Norm auf Vervollständigung $\overline{X}^{\|.\|} := \overline{X}^d$ kommt auch wieder von einer Norm [4, Satz 1.3.4]. Kam die Norm $\|.\|_X$ von einem inneren Produkt, dann auch die Norm auf der Vervollständigung.

Erst einmal ist die Vervollständigung ein abstrakter Raum, deren Elemente erst einmal nur Äquivalenzklassen von Cauchyfolgen sind. Allerdings ist das eine Sichtweise, die es einem ggf. erlaubt, (geeignete) Rechenoperationen/Abbildungen, die erst einmal auf X definiert sind, im Sinne einer stetigen Fortsetzung (wenn existent) auf \overline{X}^d zu erweitern. Z.B. Lipschitzkalkül auf L^1 [4, Abschnitt 1.3.5] oder Fouriertransformationen auf L^2 [4, Abschnitt 2.3.2] oder für ein einfaches Beispiel s. ÜA3.ii.

A.2. L^p -Räume

 $C_c^0(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})$ - Menge der kompakt getragenen stetigen Funktionen auf \mathbb{R}^n (das folgende geht sowohl reell- als auch komplexwertig und auch für $C_c^0(D,\mathbb{C})$ für $D \subset \mathbb{R}^n$ offen)

A. Zusammenfassung Analysis 3

 $L^p\text{-Norm von }c\in C^0_c(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})\text{ für }1\leqslant p<\infty\text{: }\|c\|_p\text{:=}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|c|^p\mathrm{dvol}\right)^{\frac{1}{p}}.$

Vervollständigung von $C_c^0(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})$ bzgl. der L^p -Norm: $L^p(\mathbb{R}^n):=\overline{C_c^0(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})}^{\|.\|_p}$ D.h. ein Element $f\in L^p(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})$ ist eine Äquivalenzklasse von L^p -Cauchyfolgen in $C_c^0(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})$, wobei zwei L^p -Cauchyfolgen äquivalent heißen, wenn ihre gliedweise Diffe-

Jedes Element $f \in L^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ hat eine Realisierung $g \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, d.h. es gibt ein L^p -Cauchyfolge in der Äquivalenzklasse zu f, welche fast überall punktweise gegen g konvergiert. Zwei Realisierungen von f stimmen fast überall überein.

Ist $f \in L^p$, dann ist $|f|^{p/q} \in L^q$.

renz eine L^p -Nullfolge ist.

Wichtige Ungleichung – Hölder:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |fg| \mathrm{dvol} \leqslant ||f||_p ||g||_q$$

für $1 < p, q < \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

B. Etwas zu Sturm-Liouville-Problemen

B.1. (Reguläre) Sturm-Liouville Probleme

 $(Lu)(x) := -\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d}{dx}u(x)\right) + q(x)u(x)$ (B.1)

für $p, q \in C^0([a, b], \mathbb{R}), p \in C^1((a, b), \mathbb{R}), p > 0$ auf (a, b). Falls p > 0 auf ganz (a, b) betrachten wir L mit Randbedingungen:

> Variante 1 – mixed: $\alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a) = 0 = \beta_1 u(b) + \beta_2 u'(b)$ Variante 2 – periodisch: u(a) = u(b) und u'(a) = u'(b)

Für p=0 in genau einem der Punkte a oder b, sei dort die Randbedingung aus Variante 1 gewählt.

(Zu Variante 1: Der Fall $\alpha_2=\beta_2=0$ heißt *Dirichlet-Bedingung* und der Fall $\alpha_1=\beta_1=0$ heißt *Neumann-Bedingung*.)

Ein $\lambda \in \mathbb{C}$ heißt Eigenwert von L unter obigen Randbedingungen, falls es eine Lösung $u \in C^2([a,b],\mathbb{C})\setminus\{0\}$ von $Lu = -\lambda u$ mit $u(a) = c_0$ und $u(b) = c_1$ gilt. Hier heißt u dann Eigenfunktion zum Eigenwert λ .

(i) L ist symmetrisch bzgl. des L^2 -Produktes auf allen Elementen aus $C^2([a,b])$, welche obige Randbedingungen erfüllen, d.h. $(u,Lv)_{L^2}=(Lv,u)_{L^2}$ für alle $u,v\in C^2([a,b])$ mit obigen Randbedingungen:

Beweis.

$$(u, Lv)_{L^2} - (Lu, v)_{L^2} = \int_a^b \overline{u}(-(pv')' + qv)dx - \int_a^b \overline{(-(pu')' + qu)}vdx$$
$$= [-\overline{u}pv' + p\overline{u}'v]_a^b = 0,$$

klar, wo p = 0, sonst Randbedingung einsetzen.

(ii) Eigenwerte von L unter obigen Randbedingungen sind reell:

101

Vorl. 7

Beweis. Sei $Lu = \lambda u$.

$$\lambda(u,u)_{L^2} = (u,Lu)_{L^2} = (Lu,u)_{L^2} = \bar{\lambda}(u,u)_{L^2}$$

Wegen $u \neq 0$, folgt $\lambda \in \mathbb{R}$.

(iii) Eigenfunktionen zu verschiedenen Eigenwerten von L unter obigen Randbedingungen sind orthogonal in $L^2([a,b])$:

Beweis. Sei $Lu = \lambda u$ und $Lv = \mu v$ mit $\lambda \neq \mu$. Dann ist

$$\mu(u,v)_{L^2} = (u,Lv)_{L^2} = (Lu,v)_{L^2} = \bar{\lambda}(u,v)_{L^2} = \lambda(u,v)_{L^2}$$

und somit $(u, v)_{L^2} = 0$.

Beispiel: $[a,b] = [-\pi,\pi]$, p=1, q=0 und periodische Randbedingung. Dann ist $u(x) = e^{ikx}$ für $k \in \mathbb{Z}$ Eigenfunktion zum Eigenwert k^2 . In diesem Fall bilden die e^{ikx} sogar eine Orthonormalbasis von $L^2([-\pi,\pi])$ (Fourierreihenzerlegung).

B.1.1. ...und Legendre-Polynomen

Am Ende werden wir gesehen haben:

- (i) ein anderes Beispiel für eine Zerlegung von $L^2([a,b])$ als die Fourierreihenzerlegung, aber welches auch von einem Eigenwertproblem herkommt (Ein Beispiel eines Sturm-Liouville-Problems).
- (ii) was beim Gram-Schmidt Verfahren für die dichte Teilmenge $\{1,x,x^2,\ldots\}$ von $L^2([-1,1])$ herauskommt.

Legendre-Differentialgleichung

$$(x^{2} - 1)u'' + 2xu' - n(n+1)u = 0$$
(B.2)

Sei $(\tilde{L}u)(x) := (x^2 - 1)u''(x) + 2xu'(x)$.

- (iv) Dann hat \tilde{L} die Form (B.1) für $p = 1 x^2$ und q = 0.
- (v) $u(x) = \frac{d^n}{dx^n}(x^2 1)^n$ ist eine Lösung von (B.2):

Beweis. Es gilt $(x^2-1)((x^2-1)^n)'=2xn(x^2-1)^n$. Davon die (n+1).te Ableitung und iterative Leibnizregel* ergibt:

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (x^2 - 1)^{(k)} \left[(x^2 - 1)^n \right]^{(n+2-k)} = 2n \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^{(k)} \left[(x^2 - 1)^n \right]^{(n+1-k)}$$

$$(x^2 - 1)u''(x) + (n+1)2xu'(x) + n(n+1)u(x) = 2xnu'(x) + 2n(n+1)u(x)$$

$$\frac{d^{n}}{dx^{n}}(fg) = \sum_{k=1}^{n} {n \choose k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

^{*}Itorativa Laibnizrogal:

(vi) (B.2) hat auf $x \in (-1,1)$ einen zweidimensionalen Lösungsraum, da u dort eine lineare Differential- gleichung zweiter Ordnung erfüllt $(x^2 - 1 \neq 0)$. Eine zu u linear unabhängige Lösung kann man z.B. mit dem Lösungsansatz u(x)v(x) mit dem u aus (v) erhalten, da dann (B.2) zu einer erster Ordnung ODE in v wird. Das wird dann kein Polynom mehr sein und auch nicht mehr in $L^2([-1,1])$ - machen wir hier nicht...

Legendre-Polynome.

$$P_n(x) := \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$$

- P_n ist ein Polynom vom Grad n .
- $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$
- $P_n(1) = 1$:

Beweis.

$$2^{n} n! P_{n}(x) = \frac{d^{n}}{dx^{n}} \left((x-1)^{n} (x+1)^{n} \right) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \underbrace{\left[(x-1)^{n} \right]^{(k)}}_{=0 \text{ in } x=1 \text{ für } k < n} \left[(x+1)^{n} \right]^{(n-k)}$$
$$2^{n} n! P_{n}(1) = n! (1+1)^{n}$$

- $P_n(-1) = -1$
- $\frac{\sqrt{2n+1}}{\sqrt{2}}P_n(x)$ ist eine orthonormale Teilmenge von $L^2([-1,1])$:

Beweis. Wir zeigen als erstes: $\frac{d^i}{dx^i}(x^2-1)^n=(x^2-1)^{n-i}P_i(x)$ für ein Polynom P_i : Für i=0 richtig mit $P_0(x)=1$.

Induktionsschritt:

$$\frac{d^{i+1}}{dx^{i+1}}(x^2-1)^n = \left((x^2-1)^{n-i}P_i(x)\right)' = (x^2-1)^{n-i-1}((n-i)P_i(x) + (x^2-1)P_i'(x))$$

Dann gilt für m > n:

$$\int_{-1}^{1} \frac{d^{n}}{dx^{n}} (x^{2} - 1)^{n} \frac{d^{m}}{dx^{m}} (x^{2} - 1)^{m} dx$$

$$= \left[\frac{d^{n}}{dx^{n}} (x^{2} - 1)^{n} \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} (x^{2} - 1)^{m} \right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} (x^{2} - 1)^{n} \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} (x^{2} - 1)^{m} dx$$

$$= \dots = (-1)^{m} \int_{-1}^{1} (x^{2} - 1)^{m} \underbrace{\frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}} (x^{2} - 1)^{n}}_{=0 \text{ fix } m > n} dx = 0.$$

B. Etwas zu Sturm-Liouville-Problemen

Für n = m:

$$\int_{-1}^{1} P_n(x) P_n(x) dx = \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \int_{-1}^{1} (x^2 - 1)^n dx.$$

und

$$A_n := \int_{-1}^{1} (x^2 - 1)^n \cdot 1 dx = \left[x(x^2 - 1)^n \right]_{-1}^{1} - 2n \int_{-1}^{1} (x^2 - 1)^{n-1} x^2 dx$$
$$= -2nA_n - 2nA_{n-1},$$

also $A_n = -\frac{2n}{2n+1}A_{n-1}$. Wegen $A_0 = 2$ folgt

$$A_n = (-1)^n \frac{2}{3} \frac{4}{5} \dots \frac{2n}{2n+1} 2 = (-1)^n \frac{2^{2n+1} (n!)^2}{(2n+1)!}$$

und damit

$$\int_{-1}^{1} P_n(x) P_n(x) dx = \frac{2}{2n+1}.$$

• $\int_{-1}^{1} P_n(x) x^k = 0$ für alle k < n:

Beweis.

$$\int_{-1}^{1} x^{k} \frac{d^{n}}{dx^{n}} (x^{2} - 1)^{n} = \left[x^{k} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (x^{2} - 1)^{n} \right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} kx^{k-1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (x^{2} - 1)^{n} dx$$

$$= \dots = (-1)^{k} k! \int_{-1}^{1} \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} (x^{2} - 1)^{n} dx = (-1)^{k} k! \left[\frac{d^{n-k-1}}{dx^{n-k-1}} (x^{2} - 1)^{n} \right]_{-1}^{1} = 0 \square$$

Da span $\{P_0,\ldots,P_n\}$ = span $\{1,\ldots,x^n\}$ ist und obige Orthonormalitätsrelationen gelten, entsteht $\frac{\sqrt{2n+1}}{\sqrt{2}}P_n(x)$ aus $\{1,x,x^2,\ldots\}$ auf $L^2([-1,1])$ mittels Gram-Schmidt und ist damit eine orthonormale Hilbertbasis von $L^2([-1,1])$.

Sei nun Lu=mu für $m\in\mathbb{R}$ und $u\in L^2([-1,1])\cap C^2([-1,1])$. Mit dem Ansatz $u=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_nP_n$ (geht da ONB) sieht man direkt, dass m=n(n+1) und $u=cP_n$ für ein $n\in\mathbb{N}$ und ein $c\in\mathbb{C}$ sein muss.

Das P_n senkrecht auf P_m für $n \neq m$ ist, hätten wir eigentlich nicht extra nachrechnen müssen: L ist ein Sturm-Liouville-Operator mit p=0 an den Intervallrändern. Aus Seite iii oben folgt dann schon, dass Eigenfunktionen zu verschiedenen Eigenwerten orthogonal sein müssen.

Legendre-DGL/Legendre-Polynome - Wo kommt es z.B. vor?

• Betrachtet man die Laplacegleichung $\Delta u = 0$ auf \mathbb{R}^3 in sphärischen Koordinaten

$$\Delta u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}$$

und macht einen Separationsansatz: $u(r,\varphi,\theta)=R(r)\Phi(\varphi)\Theta(\theta)$, dann errechnet man

$$\frac{\Theta''}{\Theta} + \cot\theta \frac{\Theta'}{\Theta} + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\Phi''}{\Phi} = -r^2 \frac{R''}{R} - 2r \frac{R'}{R}.$$

Also müssen beide Seiten konstant – sagen wir gleich λ – sein. Für die rechte Seite führt dies auf eine Cauchy-Euler-DGL*. Für die linke Seite führt dies nach Umformung auf

$$\sin^2\theta \frac{\Theta''}{\Theta} + \sin\theta\cos\theta \frac{\Theta'}{\Theta} + \lambda\sin^2\theta = -\frac{\Phi''}{\Phi},$$

was wieder ergibt, dass beide Seiten konstant – sagen wir gleich μ – sein müssen. Für Θ führt es dann auf eine verallgemeinerte Legendre-Differentialgleichung für $x = \cos \theta$, die für $\mu = 0$ die obige Legendre-Differentialgleichung als Spezialfall hat. (Ansatz: $y(x) = \Theta(x = \cos \theta)$.)

• Es gilt (rechnen wir heute nicht nach)

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2xt + t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n.$$

Da die Legendre-Polynome die Koeffizienten in der Potenzentwicklung der linken Parameterfamilie von Funktionen ist, nennt man die linke Seite erzeugende Funktion der Legendre-Polynome.

Damit erhält man z.B. (mit Kosinussatz für Dreiecke) für $x,x'\in\mathbb{R}^3$ für die Entwicklung des Newtonpotentials, [Ana3, S.67],

$$\frac{1}{|x-x'|} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x'|^n}{|x|^{n+1}} P_n(\cos\varphi),$$

wobei φ der von x und x' eingeschlossene Winkel ist.

B.1.2. Reguläre Sturm-Liouville als selbstadjungierter unbeschränkter Operator

Der Operator L aus (B.1) ist als Operator L: $C_c^{\infty}((a,b)) \subset L^2([a,b]) \to L^2([a,b])$ ein dichtdefinierter symmetrischer Operator. Man kann nachrechnen, dass L mit den unter

^{*}https://en.wikipedia.org/wiki/Cauchy%E2%80%93Euler_equation

(B.1) angegebenen Randwerten jeweils selbstadjungiert ist. Es gibt hier als unendlich viele selbstadjungierte Erweiterungen.

Für jede dieser selbstadjungierten Erweiterung wüssten wir aus der abstrakten Theorie, dass der Operator (auch L genannt) nur diskretes und essentielles Spektrum haben kann.

Mit Argumenten wie in Lemma 6.5.4 kann man sehen, dass essentielles Spektrum nicht möglich ist: Ist λ im essentiellen Spektrum von L, dann gibt es eine Fogle $x_i \in \text{dom } L$ mit $\|x_i\| = 1$, $x_i \stackrel{w}{\to} 0$, $\|(L - \lambda_0)x_i\| \to 0$. Ähnlich wie in Lemma 6.5.4 folgert man, dass dann x_i in $H^2([a,b])$ beschränkt ist und damit nach Rellich-Kondrakov in $L^2([a,b])$ schon stark konvergiert, also $x_i \to 0$ in L^2 . Das ist ein Widerspruch zu $\|x_i\| = 1$. Also hat L nur diskretes Spektrum, vgl. auch ÜA39/40.

B.2. Singuläre Sturm-Liouville

Wir betrachten noch immer Operatoren der Form (B.1), allerdings dieses Mal mit $p,q\in C^0(I,\mathbb{R}),\ p\in C^1(I,\mathbb{R}),\ p>0$ auf I. Hier ist I ein offenes, nicht zwingend beschränktes Intervall. Ist I beschränkt und p,q sogar stetig auf \bar{I} , sind wir im Fall vom Anfang dieses Kapitels – bei regulären Sturm-Liouville-Problemen. Sonst nennen wir das Problem $singul\ddot{a}r$.

Prototyp eines singulären Sturm-Lioville Operators:

$$(Lu)(x) = \left(\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d}{dx}u(x)\right) + q(x)u(x)\right)$$

auf einem offen Intervall I mit $p, q \in C^0(I, \mathbb{R}), p \in C^1(I, \mathbb{R}), p > 0$ auf I. Zusammen mit einer Gewichtsfunktion $\rho: I \to \mathbb{R}, \rho > 0$. Wir betrachten

$$L \colon C_c^{\infty}(I) \subset L_o^2(I) \to L_o^2(I)$$
.

I.A. hat L mehr als eine selbstadjungierte Erweiterung.

Sei $I = (0, \infty)$. Dann entspricht die Forderung in $L^2_{\rho}(I)$ zu sein einer Randbedingung im Unendlichen und in r = 0 hat man dann oft Bedingungen wir $u(0) = \lim_{x\to 0} u(x)$ ist endlich oder $u'(0) = \lim_{x\to 0} u'(x)$ ist endlich.

Im Gegensatz zu regulären Sturm-Liouville-Problemen ist das Spektrum im Allgemeinen nicht mehr diskret, sondern kann diskrete und essentielle Anteile haben.

Literaturverzeichnis

- [1] Robert A. Adams and John J. F. Fournier. *Sobolev spaces*. New York, NY: Academic Press, 2nd ed. edition, 2003.
- [2] Nadine Große. Analysis I, Skript, WS 2020/21, Uni Freiburg. https://home.mathematik.uni-freiburg.de/ngrosse/teaching/Vorlesungen/AnalysisI/Analysis1_WS-2021_Skript.pdf
 Übungsaufgaben unter https://home.mathematik.uni-freiburg.de/ngrosse/teaching/Vorlesungen/AnalysisI/Analysis1_WS-2021_uebungen_gesamt.pdf.
- [3] Nadine Große. Analysis II, Skript, SS 2021, Uni Freiburg. https://home.mathematik.uni-freiburg.de/ngrosse/teaching/Vorlesungen/AnalysisII/Analysis2_SS-21_Skript.pdf
 Übungsaufgaben unter https://home.mathematik.uni-freiburg.de/ngrosse/teaching/Vorlesungen/AnalysisII/Analysis2_SS-21_uebungen_gesamt.pdf.
- [4] Nadine Große. Analysis III, Skript, WS 2021/22, Uni Freiburg. https://home.mathematik.uni-freiburg.de/ngrosse/teaching/Vorlesungen/AnalysisIII/Analysis3_WS-2122_Skript.pdf
 Übungsaufgaben unter https://home.mathematik.uni-freiburg.de/ngrosse/teaching/Vorlesungen/AnalysisIII/Analysis3_WS-2122_uebungen_gesamt.pdf.
- [5] Serge Lvovski. Principles of complex analysis. Translated from the Russian by Natalia Tsilevich, volume 6 of Mosc. Lect. Cham: Springer, 2020.
- [6] Michael Reed and Barry Simon. Methods of modern mathematical physics. II: Fourier analysis, self- adjointness. New York - San Francisco - London: Academic Press, a subsidiary of Harcourt Brace Jovanovich, Publishers. XV, 361 p. \$ 24.50; £ 11.75 (1975)., 1975.
- [7] Dirk Werner. Funktionalanalysis. Springer-Verlag, Berlin, extended edition, 2000.