Übungsblatt 0

In der ersten Übungswoche = zweite Vorlesungswoche wollen wir wiederholen oder ggf. neu lernen:

(i) metrischer Raum?

(ii) normierter Raum?

(iii) Jeder normierte Raum $(V, \|.\|)$ induziert eine Metrik auf V - wie?

(iv) Stetigkeit und Konvergenz in metrischen/normierten Räumen

(v) Eine Folge $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ in $(V, \|.\|)$ heißt beschränkt, falls ....

(vi) Eine Folge $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ in $(V, \|.\|)$ heißt Cauchyfolge, falls...

(vii) Zusammenhang: Cauchyfolgen und konvergente Folgen?

(viii) Vervollständigung von metrischen/normierten Räumen - wie gehts?, siehe auch Appendix A

(ix) $H^1([-1,1]) := \overline{C^\infty([-1,1])}^{\|.\|_{H^1}}$ mit $\|c\|_{H^1}^2 = \|c\|_2^2 + \|c'\|_2^2$ für $c \in C^\infty([-1,1])$.
Es ist $H^1([-1,1]) \subset L^2([-1,1])$ (wie muss man diese Inklusion verstehen?) und $H^1([-1,1]) \neq L^2([-1,1])$ (warum?).

Übungsblatt 1

Aufgabe 1.

(i) Seien H_i, $i \in \mathbb{N}$, Hilberträume mit Sesquilinearform $\langle .,. \rangle_i$. Wir betrachten $H_1 \oplus H_2$ versehen mit

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = \langle x_1, x_2 \rangle_{H_1} + \langle y_1, y_2 \rangle_{H_2}.$$

Zeigen Sie, dass damit $H_1 \oplus H_2$ ein Hilbertraum ist.

(ii) ℓ_2 ist die Menge komplexer Folgen $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ mit $\sum_{i=0}^{\infty} |a_i|^2 < \infty$ mit der Sesquilinearform

$$((a_i)_i, (b_i)_i)_{\ell_2} := \sum_{i=0}^{\infty} \overline{a_i} b_i.$$

Zeigen Sie, dass ℓ_2 vollständig ist.

Aufgabe 2. Sei $\operatorname{dom} T$ die Menge der $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ mit $\int_{\mathbb{R}} x^2 |\phi(x)|^2 dx < \infty$. Wir definieren

$$T \colon \operatorname{dom} T \subset L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R}) \text{ durch } (T\phi)(x) := x\phi(x).$$

Zeigen Sie,

(i) dass T dicht definiert ist, d.h. dass $\overline{\operatorname{dom} T}^{\|\cdot\|_2} = L^2(\mathbb{R})$.

Hinweis: Am leichtesten ist es eine Teilmenge $\mathcal{D} \subset \operatorname{dom} T$ zu finden, von der man sowieso weiss, dass sie in $L^2(\mathbb{R})$ dicht ist.

(ii) dass es keinen beschränkten Operator $\tilde{T} \colon \operatorname{dom} \tilde{T} = L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ mit $\tilde{T}|_{\operatorname{dom} T} = T$ gibt.

Hinweis: Eine geeignete Folge von Testfunktionen finden – z.B. Treppenfunktionen.

Aufgabe 3. Sei $\operatorname{dom} T$ die Menge der $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ differenzierbar mit $\int_{\mathbb{R}} |\phi'(x)|^2 dx < \infty$. Wir definieren

$$T \colon \operatorname{dom} T \subset L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R}) \text{ durch } (T\phi)(x) := \mathrm{i}\phi'(x).$$

(i) Zeigen Sie, dass es keinen beschränkten Operator $\tilde{T} \colon \operatorname{dom} \tilde{T} = L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ mit $\tilde{T}|_{\operatorname{dom} T} = T$ gibt.

(ii) Wir betrachten $\phi \mapsto \mathrm{i}\phi'$ nun als Operator von H^1 nach L^2 anstatt wie bisher von L^2 nach L^2, also:

$$A \colon \operatorname{dom} T \subset H^1(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R}), \quad \phi \mapsto T\phi.$$

Zeigen Sie, dass es nun einen beschränkten Operator $\tilde{A} \colon \operatorname{dom} \tilde{A} = H^1(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ mit $\tilde{A}|_{\operatorname{dom} T} = A$ gibt.

Hinweis: Hier mit der Definition von $H^1(\mathbb{R}) = \overline{C_c^\infty(\mathbb{R})}_{\|\cdot\|_{H^1}}$ aus der Vorlesung arbeiten. D.h. man muss sagen, was $\tilde{A}[c_k \in C_c^\infty(\mathbb{R})]_{H^1}$ sein soll...

Aufgabe 4. Sei X ein endlichdimensionaler Vektorraum. Zeigen Sie, dass je zwei Normen auf X äquivalent sind, d.h. für zwei Normen $\|.\|_a$ und $\|.\|_b$ auf X gibt es ein $C > 0$ mit

$$C^{-1} \|x\|_a \leq \|x\|_b \leq C \|x\|_b \quad \forall x \in X.$$

Hinweis: Zeigen Sie z.B., dass jede Norm zur euklidischen Norm/Supremumsnorm bzgl. einer gewählten Basis auf X äquivalent ist.

Abgabe am Mittwoch 04.05.21 bis 14 Uhr

Übungsblatt 2

Aufgabe 5. Ein normierter Vektorraum $(X, \|.\|)$ ist genau dann vollständig, wenn für jede Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\sum_{k=0}^{\infty} \|x_k\| < \infty$ die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$ konvergiert.

Hinweis: Für y_i Cauchyfolge $x_k = y_{i_{k+1}} - y_{i_k}$ für eine geeignete Teilfolge benutzen.

Aufgabe 6. Sei $(X, \|.\|_X)$ ein vollständig normierter Vektorraum (= Banachraum) und $Y \subset X$ ein abgeschlossener linearer Unterraum von X. Sei

$$X/Y := X/\sim$$

mit $x \sim y$ genau dann, wenn $x - y \in Y$ ist. Mit $[x] + \alpha[y] := [x + \alpha y]$ für $x, y \in X$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ wird X/Y zu einem Vektorraum. Sei

$$\|[x]\| := \inf_{y\in Y} \|x - y\|_X.$$

Zeigen Sie, dass $(X/Y, \|.\|)$ ein Banachraum ist.

Berechnen Sie $(X/Y, \|.\|)$ für das Beispiel $X = C^0([0, 1])$ mit Supremumsnorm und $Y = \{f \in X \mid f(0) = 0\}$.

Hinweis: ÜA5 verwenden.

Aufgabe 7 (2+3)**.**

(i) Sei H ein Hilbertraum und $S \subset H$ eine orthonormale Teilmenge. Zeigen Sie, dass S ist linear unabhängig.

(ii) Sei H ein unendlich dimensionaler Hilbertraum und $\{e_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ eine orthonormale Teilmenge von H, so dass der Abschluss dessen linearen Spans[1] ganz H ist. Zeigen Sie, dass

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} \langle x, e_n\rangle e_n$$

für alle $x \in H$ gilt und aus $x = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n e_n$, dann $\lambda_n = \langle x, e_n\rangle$ folgt.

Aufgabe 8 (1.5+1.5+2)**.**

(i) Zeigen Sie, dass $\{e_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ mit $e_i := (\delta_{ij})_{j\in\mathbb{N}}$ eine orthonormale Hilbertbasis von ℓ_2 ist.

(ii) Berechnen Sie die Operatornorm des *Linkshifts* $A\colon \ell_2 \to \ell_2$, $(a_0, a_1, a_2, \ldots) \mapsto (a_1, a_2, a_3, \ldots)$

(iii) Sei $A\colon \operatorname{dom} A = H_1 \to H_2$ ein beschränkter Operator zwischen den Hilberträumen H_1 und H_2. Zeigen Sie:

$$\|A\| = \sup\{|\langle Ax, y\rangle| \mid x \in H_1, \|x\|_{H_1} = 1, y \in H_2, \|y\|_{H_2} = 1\}.$$

Abgabe am Mittwoch 11.05.22 bis 14 Uhr

[1] Linearer Span = Menge aller endlichen Linearkombinationen

Übungsblatt 3

Aufgabe 9 (1.5+(1.5+2)).

(i) Berechnen Sie die Operatornorm $A\colon \operatorname{dom} A = L^1([a,b]) \to \mathbb{C}$, $A(x) = \int_a^b x(s)y(s)ds$ für ein gegebenes $y \in C^0([a,b])$.

(ii) Sei $\mathcal{P}$ die Menge der komplexwertigen Polynome auf $\mathbb{C}$. Für $p(t) = \sum_{k=0}^n a_k t^k$ sei $\|p\| := \sum_{k=0}^n |a_k|$.

(a) Zeigen Sie, dass $(\mathcal{P}, \|.\|)$ ein normierter Raum ist. Ist er vollständig?

(b) Berechnen Sie die Operatornorm von $A\colon \operatorname{dom} A = \mathcal{P} \to \mathcal{P}$, $(Ap)(t) = (t+1)p(t)$.

Aufgabe 10 (2.5+2.5).

(i) Zeigen Sie, dass die komplexwertigen Polynome auf $[-1,1]$ dicht in $L^2([-1,1])$ liegen, indem Sie benutzen, dass $\{e^{\mathrm{i}k\pi x} \mid k \in \mathbb{Z}\}$ eine Hilbertbasis von $L^2([-1,1])$[1] bildet.

(ii) Folgern Sie, dass der lineare Span von $A = \{1, x, x^2, x^3, \ldots\}$ dicht in $L^2([-1,1])$ liegt. Mittels Gram-Schmidt angewendet auf A erhält man eine Orthonormalbasis von $L^2([-1,1])$ durch Polynome. Berechnen Sie die ersten drei dieser Basiselemente.

Aufgabe 11 (3+1+1). Sei $A\colon X \to Y$ ein beschränkter Operator zwischen Banachräumen.

(i) Sei A injektiv. Zeigen Sie, dass $\operatorname{Bild} A \subset Y$ genau dann abgeschlossen ist, wenn es ein $c > 0$ mit $\|Ax\| \geq c\|x\|$ für alle $x \in X$ gibt.

(ii) Der Operator $\tilde{A}\colon X/\ker A \to Y$, $x + \ker A \mapsto Ax$, ist beschränkt.

(iii) Zeigen Sie, dass $\operatorname{Bild} A \subset Y$ genau dann abgeschlossen ist, wenn es ein $c > 0$ mit

$$\|Ax\| \geq c \inf_{z \in \ker A} \|x + z\|$$

für alle $x \in X$ gibt.

Aufgabe 12 (5+1*). Sei $A\colon \operatorname{dom} A = \ell_1 \to c_0^* := \mathcal{L}(c_0, \mathbb{C})$ definiert durch

$$(A(x_n)_n)(y_n)_n = \sum_{n=0}^{\infty} x_n y_n$$

für $(x_n)_n \in \ell_1$ und $(y_n)_n \in c_0$. Zeigen Sie, dass $A \in \mathcal{L}(\ell_1, c_0^*)$ ein Banachraumisomorphismus ist.

Hinweis: Beispiel 2.4.3.i/ii.

(*) Wenn man in dieser Aufgabe alle c_0 durch ℓ_∞ ersetzt, was geht schief?

Abgabe am Mittwoch 18.05.22 bis 14 Uhr

[1] da eindeutige Zerlegung als Fourierreihe

Übungsblatt 4

Aufgabe 13 (2+2+1)**.** Sei X ein normierter Raum.

(i) Zeigen Sie, dass $\|x\|_X = \sup_{\phi \in X^* \setminus \{0\}} \frac{|\phi(x)|}{\|\phi\|_{X^*}}$ für alle $x \in X$ gilt.

(ii) Sei U ein abgeschlossener linearer Unterraum, $x \in X \setminus U$. Zeigen Sie, dass dann ein $\phi \in X^*$ mit $\phi|_U = 0$ und $\phi(x) = 1$ existiert.

(iii) Sei U ein linearer Unterraum. Zeigen Sie, dass dann U genau dann in X dicht ist, wenn aus $\phi|_U = 0$ für $\phi \in X^*$ schon $\phi = 0$ folgt.

Aufgabe 14. Sei X ein Banachraum und $V \subset X$ ein abgeschlossener linearer Unterraum. Sei $\iota \colon V \to X$ die Inklusionsabbildung. Zeigen Sie, dass dann sowohl

$$X^*/V^\perp \to V^*,\ \phi + V^\perp \mapsto (v \mapsto \phi(v))$$

als auch

$$A \colon (X/V)^* \to V^\perp, (\phi \colon X/V \to \mathbb{C}) \mapsto (x \mapsto \phi(x+V))$$

ein wohldefinierter Isomorphismus von Banachräumen ist.

Definition. Ein Banachraum X heißt *gleichmäßig konvex*, falls es für alle $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass $\|y - x\| < \epsilon$ für alle $x, y \in X$ mit $\|x\| = \|y\| = 1$ und $\|x + y\| > 2 - \delta$ folgt.

Bemerkung. Eine Verallgemeinerung der Jensen-Ungleichung[1] lautet: Sei $J \colon \mathbb{R}^2_+ := \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ stetig, positiv homogen[2] und konvex[3], $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue-messbar und $f_i \colon \Omega \to \mathbb{R}_{>0}$ Lebesgue integrierbar. Dann gilt

$$J\left(\int_\Omega f_1 \mathrm{dvol}, \int_\Omega f_2 \mathrm{dvol}\right) \leq \int_\Omega J(f_1, f_2) \mathrm{dvol}.$$

Unter gleichen Voraussetzungen aber J konkav statt konvex, kehrt sich das Relationszeichen in der Ungleichung um.

Mit Hilfe dieser Ungleichung kann man verschiedene andere Ungleichungen ableiten, z.B.

- Hölder für $J(x, y) = x^{\frac{1}{p}} y^{\frac{1}{q}}$ und $f_1(z) = |u(z)|^p$, $f_2(z) = |v(z)|^p$.
- Minkowski für $J(x, y) = (x^{\frac{1}{p}} + y^{\frac{1}{p}})^p$ und $f_1(z) = |u(z)|^p$, $f_2(z) = |v(z)|^p$.

Aufgabe 15 (1+2+2)**.** Zeigen Sie:

(i) Alle Hilberträume sind gleichmäßig konvex.

(ii) Für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue-messbar ist $L^p(\Omega)$ für $2 \leq p < \infty$ gleichmäßig konvex. (Die Aussage gilt auch für $p \in (1, 2)$[4].)

Hinweis: Für $p \geq 2$: Zeigen Sie zunächst die Hanner-Ungleichungen mittels einem geeignetem J: Für alle $u, v \in L^p(\Omega)$ gilt

$$\|u + v\|_p^p + \|u - v\|_p^p \leq (\|u\|_p + \|v\|_p)^p + |\|u\|_p - \|v\|_p|^p .$$

(iii) Zeigen Sie, dass $L^1(\Omega)$ und $L^\infty(\Omega)$ (für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen) nicht gleichmäßig konvex sind.

[1] *P. Roselli* and *M. Willem*, Am. Math. Mon. 109, No. 1, 64–70 (2002)

[2] d.h. $J(tx, ty) = tJ(x, y)$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2_+$ und $t > 0$

[3] Ein positiv homogenes J ist genau dann konvex, wenn $j(x) = J(1, x)$ für alle $x > 0$ konvex ist.

[4] Für $p \in (1, 2)$ gilt die inverse Ungleichung wie im Hinweis (mit gleichem J erhalten). Setzt man dann $u = \frac{x+y}{2}$ und $v = \frac{x-y}{2}$ folgt $2 \geq f(\|u\|_p, \|v\|_p)$ mit

$$f \colon \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R},\ (a, b) \mapsto (a + b)^p + |a - b|^p$$

f ist in jeder Variablen steng monoton steigend. D.h. nehmen wir an $\|x - y\|_p \geq \epsilon$, folgt $2 \geq f(\|u\|_p, \frac{\epsilon}{2})$. Mit $f(0, \frac{\epsilon}{2}) = 2\frac{\epsilon^p}{2^p} < 2 < f(1, \frac{\epsilon}{2})$ und Stetigkeit von f folgt, dass es ein $\delta > 0$ mit $f(1 - \delta/2, \frac{\epsilon}{2}) = 2$ gibt. Wählen wir also für das gegebene ϵ dieses δ, folgt aus $\|x + y\|_p > 2 - \delta$ dann $2 < f(\|u\|_p, \frac{\epsilon}{2})$, was den Widerspruch gibt und damit die gleichmäßige Konvexität beweist.

Aufgabe 16. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue-messbar. Sei $1 < p < \infty$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Zeigen Sie, dass dann

$$\Phi\colon f \in L^p(\Omega) \mapsto \left(g \in L^q(\Omega) \mapsto \int_\Omega fg \mathrm{dvol} \right) \in (L^q(\Omega))^*$$

ein isometrischer bijektiver Operator, also ein Banachisomorphismus, ist.

Für den Surjektivitätsteil des Beweises könnten Sie z.B. folgenden Lückentext ausfüllen und die 'Warums' beantworten:

(i) Für alle $\phi \in (L^q(\Omega))^*$ mit $\|\phi\| = 1$ gibt es ein $f \in L^q(\Omega)$ mit $\|f\| = 1$ und $\phi(f) = 1$:

Wegen der Definition der Norm von $(L^q(\Omega))^*$ gibt es eine Folge $f_k \in L^q(\Omega)$ mit $\|f_k\|_q = 1$ und $|\phi(f_k)| \to$ __ für $k \to \infty$. O.B.d.A. können wir $\phi(f_k) > 0$ annehmen, da wir sonst f_k einfach _____. Sei nun $\epsilon > 0$. Der Raum $L^q(\Omega)$ ist nach letzter Aufgabe gleichmäßig konvex ist. Sei $\delta > 0$ das Delta zu ϵ aus der gleichmäßig-konvex-Definition. Sei nun $k_0 \in \mathbb{N}$ so, dass $\phi(f_k) > 1 - \delta/2$ für alle $k \geq k_0$. Dann gilt für alle $k, \ell \geq k_0$

$$\left\| \frac{f_k + f_\ell}{2} \right\|_p \geq \left| \alpha \left(\frac{f_k + f_\ell}{2} \right) \right| > 1 - \delta/2.$$

warum?

Aus der gleichmäßigen Konvexität folgt somit $\|f_k - f_\ell\|_p <$ __. Also ist f_k eine L^p-_____ und damit gibt es _____[5]

(ii) Sei $f \in L^q(\Omega)$ und

$$A(f)(x) := \begin{cases} __ & f(x) = __ \\ \bar{f}|f|__ & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann ist $A(f) \in L^p(\Omega)$.

(iii) Sei $\phi \in (L^q(\Omega))^*$ mit $\|\phi\| = 1$ und f wie in (i). Dann gilt $\Phi(A(f)) = \phi$:

Für alle $h \in L^q(\Omega)$ ist

$$0 = \frac{d}{dt}|_{t=0} \frac{|\phi(f + th)|}{\|f + th\|_q} = \frac{d}{dt}|_{t=0} \frac{|1 + t\phi(h)|}{\|f + th\|_q}. \tag{1}$$

In der letzten Zeile folgt die erste Gleichheit, da _____.

Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}|_{t=0} \|f + th\|_q^q &= \int_\Omega \frac{d}{dt}|_{t=0} _____ \mathrm{dvol} = q\mathrm{Re} _____ \quad \text{und damit} \\ \frac{d}{dt}|_{t=0} \|f + th\|_q &= \mathrm{Re} \int_\Omega A(_)_ \mathrm{dvol} \quad \text{sowie} \\ \frac{d}{dt}|_{t=0} |1 + t\phi(h)|^2 &= _____ \quad \text{und damit } \frac{d}{dt}|_{t=0} |1 + t\phi(h)| = _____. \end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich damit aus (1)

$$\mathrm{Re}\, \phi(h) = \mathrm{Re}\, \Phi(A(f))(h).$$

Die analoge Ungleichung mit Im statt Re ergibt sich, indem man h durch __ ersetzt. Also ist $\phi = \Phi(A(f))$.

Abgabe am Mittwoch 25.05.22 bis 14 Uhr

[5] Insgesamt haben wir in (i) dann sogar gezeigt: In gleichmäßig konvexen Banachräumen X wird das Supremum in der Definition von $\|\phi\|_{X^*}$ für $\phi \in X^*$ immer angenommen.

Übungsblatt 5

Aufgabe 17 (2+3)**.** (Zwei Anwendungen von Arzela-Ascoli)

(i) Sei $f_n \in C^2([0,1])$, so dass es ein $C > 0$ mit $|f_n(0)| \leq C$ und $|f_n'(0)| \leq C$ für alle n gibt. Außerdem existiere ein $a \in (1,2)$ mit $|f_n''(x)| < (1-x)^{-a}$ für alle $x \in (0,1)$. Zeigen Sie, dass f_n eine gleichmäßig konvergente Teilfolge besitzt.

(ii) (Peano-Theorem) Sei U eine offene Umgebung von $(0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ und $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ stetig. Zeigen Sie, dass dann ein $\epsilon > 0$ gibt, so dass das Anfangswertproblem $x'(t) = f(t, x(t))$, $x(0) = x_0$ eine Lösung auf $[0, \epsilon]$ besitzt.

Hinweis: Betrachten Sie

$$x_n(t) = \begin{cases} x_0 & x \in [0, \frac{\epsilon}{n}] \\ x_0 + \int_0^{t-\frac{\epsilon}{n}} f(s, x_n(s))ds & x \in (\frac{\epsilon}{n}, \epsilon] \end{cases}$$

für geeignetes ϵ (warum sind die wohldefiniert?). Für welche f sind die $x_n \in C^1([0,\epsilon])$? Warum kann man o.B.d.A. annehmen, dass wir in dieser Situation sind?

Die Aufgaben 18 und 19 sind u.a. eine Anwendung des Satzes der beschränkten Inversen:

Aufgabe 18. (2.5+2.5) Sei X ein Banachraum.

(i) Seien X_1, X_2 lineare Unterräume von X, so dass $X = X_1 \oplus X_2$ (als Gleichheit von Vektorräumen). Zeigen Sie, dass $P\colon \operatorname{dom} P = X_1 \oplus X_2 \to X_1$, $(x_1, x_2) \mapsto x_1$ genau dann beschränkt ist, wenn X_1 und X_2 in X abgeschlossen ist.

(ii) Sei X_1 ein abgeschlossener linearer Unterraum von X. Zeigen Sie, dass $P\colon \operatorname{dom} P = X \to X_1$ genau dann die Form aus (i) für ein geeignetes P hat, wenn P beschränkt ist und $P^2 = P$ erfüllt.

Aufgabe 19 (Lax-Milgram)**.** Sei H ein Hilbertraum und $b\colon H \times H \to \mathbb{C}$ eine beschränkte Sesquilinearform. Sei $A \in \mathcal{L}(H,H)$ mit $b(x,y) = (x, Ay)$ (s. auch Folgerung 1.2.8). Sei b *koerziv*, d.h. es gibt ein $c > 0$ mit $b(x,x) \geq c\|x\|^2$. Zeigen Sie, dass dann A invertierbar ist und $\|A^{-1}\| \leq c^{-1}$ gilt.

Aufgabe 20. (1+4)

(i) Sei $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ mit $(g, \phi)_{L^2} = 0$ für alle $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Zeigen Sie, dass dann $g = 0$ f.ü. gilt.

(ii) Sei

$$H := \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}) \;\middle|\; \exists g \in L^2(\mathbb{R})\ \forall \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}) : \int (f(x)\phi'(x) + g(x)\phi(x))\, dx = 0 \right\}.$$

Sei $f \in H$. Zeigen Sie, dass das g aus der Definition eindeutig bestimmt ist. Damit definiert $\|f\|_H^2 := \|f\|_2^2 + \|g\|_2^2$ eine Norm auf H, welche durch eine Sesquilinearform induziert wird. Zeigen Sie, dass H vollständig (und damit ein Hilbertraum) ist und dass

$$\iota\colon H^1(\mathbb{R}) = \overline{C_c^\infty(\mathbb{R})}^{\|\cdot\|_{H^1}} \to H, f \mapsto f$$

eine wohldefinierte injektive isometrische Abbildung ist.[1]

Hinweis: Betrachten Sie zunächst $\iota|_{C_c^\infty(\mathbb{R})}$.

Abgabe am Mittwoch 01.06.22 bis 14 Uhr

[1] Wir werden später sehen, dass es sogar bijektiv ist und damit H eine andere Möglichkeit ist, $H^1(\mathbb{R})$ zu definieren. Für $H^1(\mathbb{R}^n)$ wird es ähnliche Darstellungen auch in mehreren Variablen geben.

Übungsblatt 6

Aufgabe 21 (2+1+2)**.** Seien X, Y Banachräume.

(i) Sei $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ und A' der adjungierte Operator. Zeigen Sie, dass A' beschränkt ist und $\|A\| = \|A'\|$ gilt.

(ii) Seien X, Y reflexiv und $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Zeigen Sie, dass $A = A''$ ist.

(iii) Sei $L_p, R_p \colon \ell_p \to \ell_p$, $1 < p < \infty$, der Links- bzw. Rechtsshift, d.h.

$$L_p(x_1, x_2, \ldots) := (x_2, x_3, \ldots) \quad R_p(x_1, x_2, \ldots) := (0, x_1, x_2, x_3, \ldots).$$

Sei $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Zeigen Sie, dass $L_p' = R_q$ und $R_p' = L_q$ ist.

Aufgabe 22 (2+1.5+1.5)**.** Berechnen Sie die (im Hilbertraum-Sinne) adjungierten Operatoren A^* der folgenden Operatoren:

(i) $A(f \in L^2([0,1]), \mathbb{C})(x) = \int_0^x f(s)ds$

(ii) Sei $k \in L^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ und

$$A(f \in L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}))(x) := \int_{\mathbb{R}^n} k(x, y) f(y) \mathrm{dvol}_y.$$

(iii) Seien H_1, H_2, H Hilberträume mit $H = H_1 \oplus H_2$ und $A \colon H_1 \oplus H_2 \to H_1$, $(x_1, x_2) \mapsto x_1$. Sei $A \in \mathcal{L}(H, H_1)$ (also eine Projektion, vgl. ÜA 18).

Aufgabe 23 (2.5+2.5)**.** Sei H ein Hilbertraum und $A \in \mathcal{L}(H, H)$. Zeigen Sie:

(i) A genau dann selbst-adjungiert ist, wenn $(Ax, x)_H \in \mathbb{R}$ für alle $x \in H$ gilt.[1]

(ii) Sei A selbst-adjungiert. Dann gilt

$$\|A\| = \sup_{\|x\|_H = 1} |(Ax, x)_H|.$$

Aufgabe 24. Sei $A \colon \operatorname{dom} A = H \to H$ ein Operator zwischen Hilberträumen. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind

(a) A ist beschränkt mit $AA^* = A^*A = \mathrm{Id}$

(b) A ist surjektiv mit $\langle Ax, Ay \rangle_H = \langle x, y \rangle_H$ für alle $x, y \in H$ ist.

(c) A ist unitär, d.h. A ist beschränkt und invertierbar mit $A^{-1} = A^*$.

(d) A ist normal und eine Isometrie[2].

Abgabe am Mittwoch 15.06.22 bis 14 Uhr

[1] Das ist falsch für reelle Hilberträume, sieht man schon an reellen Matrizen.
[2] A Isometrie heißt, dass $\|Ax\|_H = \|x\|_H$ für alle $x \in H$

Übungsblatt 7

Aufgabe 25 (3+2)**.** Sei $k \in L^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ und

$$T_k \colon L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n),\ (T_k f)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} k(x,y) f(y) \mathrm{dvol}_y.$$

(i) Sei $k(x,y) = \chi_A(x)\chi_B(y)$ für messbare Mengen $A, B \subset \mathbb{R}^n$ mit endlichem Maß. Zeigen Sie, dass T_k ein Operator endlichen Ranges ist.

(ii) Zeigen Sie, dass T_k für allgemeines $k \in L^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ ein kompakter Operator ist.

Hinweis: Der Span von $\chi_A(x)\chi_B(y)$, für messbare Mengen $A, B \subset \mathbb{R}^n$ mit endlichem Maß, ist dicht in $L^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$.

Aufgabe 26. Sei H ein Hilbertraum und $A \colon H \to H$. Zeigen Sie, dass dann A^*A genau dann kompakt ist, wenn A kompakt.

Ist $A \colon \ell_2 \to \ell_2$, $(x_1, x_2, \ldots) \mapsto (0, x_1, x_2, \ldots)$ kompakt?

Aufgabe 27. Sei $\lambda = (\lambda_i)_i \in \ell_\infty$ und $p \in [1, \infty]$. Wir definieren

$$A_\lambda \colon (x_i)_i \in \ell_p \mapsto (\lambda_i x_i)_i \in \ell_p.$$

Zeigen Sie, dass $\lambda \in c_0$ eine notwendige und hinreichende Bedingung ist, damit A_λ kompakt ist.

Sei $\alpha \in (0,1)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ der Abschluss einer offenen und beschränkten Teilmenge. Sei $C^{k,\alpha}(\Omega)$ die Menge aller $f \in C^k(\Omega)$ mit

$$\|f\|_{C^{k,\alpha}} = \|f\|_{C^k} + \sum_{\gamma \in \mathbb{N}^n, |\gamma| = k} \sup_{x \neq y} \frac{|D^\gamma f(x) - D^\gamma f(y)|}{|x-y|^\alpha}.$$

Man kann nachrechnen, dass dann $C^{k,\alpha}(\Omega)$ mit der Norm $\|.\|_{C^{k,\alpha}}$ ein Banachraum ist.

Aufgabe 28 (2.5+2.5)**.** (i) Sei $\beta \in \mathbb{R}$ und

$$f \colon [-1,1] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ x^\beta & x > 0 \end{cases}$$

Für welche α ist $f \in C^{0,\alpha}([-1,1])$? Für welche α und $k \in \mathbb{N}$ gilt $f \in C^{k,\alpha}([-1,1])$?

(ii) Zeigen Sie, dass die Inklusion $C^{k,\alpha}([-1,1]) \hookrightarrow C^k([-1,1])$ ein kompakter Operator ist.

Hinweis: Mit $k = 0$ starten.

Abgabe am Mittwoch 22.06.22 bis 14 Uhr

Übungsblatt 8

Aufgabe 29. Sei $f \in C^n([a,b])$. Zeigen Sie, dass dann $A\colon \phi \in C^n([a,b]) \mapsto (x \mapsto \int_a^x f(s)\phi(s)ds) \in C^n([a,b])$ ein kompakter Operator ist.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass A als Operator von $C^n([a,b])$ nach $C^{n+1}([a,b])$ beschränkt ist.

Aufgabe 30. Sei

$$A{:=}\frac{d^n}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1(x)\frac{d}{dx} + a_0(x)$$

für $a_i(x) \in C^\infty([a,b])$. Dann ist $A\colon C^n([a,b]) \to C^0([a,b])$ beschränkt. Zeigen Sie, dass A Fredholm ist und berechnen Sie den Fredholmindex.

Hinweis: Schreiben Sie A in der Form $\frac{d^n}{dx^n}(\mathrm{Id} + K)$ für einen geeigneten kompakten Operator K und überlegen Sie sich dann, wie sich für einen Fredholmoperator $B\colon C^n([a,b]) \to C^k([a,b])$ der Index von $\frac{d}{dx}B\colon C^n([a,b]) \to C^{k-1}([a,b])$ in Abhängigkeit von $\operatorname{ind} B$ verhält.

Aufgabe 31 (Fredholm $\sim$ 'fast invertierbar')**.** Sei $A \in \mathcal{L}(X,Y)$. Zeigen Sie, dass dann die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) A ist Fredholm

(ii) Es existiert ein $B \in \mathcal{L}(Y,X)$ und Operatoren endlichen Ranges $S_1 \in \mathcal{L}(X,X)$ und $S_2 \in \mathcal{L}(Y,Y)$ mit $BA = \mathrm{Id}_X + S_1$ und $AB = \mathrm{Id}_Y + S_2$.

(iii) Es existiert ein $B \in \mathcal{L}(Y,X)$ und kompakte Operatoren $S_1 \in \mathcal{L}(X,X)$ und $S_2 \in \mathcal{L}(Y,Y)$ mit $BA = \mathrm{Id}_X + S_1$ und $AB = \mathrm{Id}_Y + S_2$.

Aufgabe 32 (2.5+2.5)**.** (Fortführung von Aufgabe 20) Sei

$$H{:=}\left\{ f \in L^2(\mathbb{R}) \;\middle|\; \exists g \in L^2(\mathbb{R})\ \forall \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}) : \int (f(x)\phi'(x) + g(x)\phi(x))\,dx = 0 \right\}$$

zusammen mit $\|f\|_H^2{:=}\|f\|_2^2 + \|g\|_2^2$. Nach Aufgabe 20 ist H ein Hilbertraum und g eindeutig bestimmt. Ist f differenzierbar, dann ist $g = f'$. Deshalb schreiben wir auch für allgemeines f, dann $f' = g$[1].

(i) Sei $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ und $f \in H$. Zeigen Sie, dass dann $\phi * f \in H$ mit $(\phi * f)' = \phi * f'$ gilt.

Hinweis: $*$ ist die Faltung wie in Analysis III, Abschnitt 2.2.

(ii) Zeigen Sie, dass $H = H^1(\mathbb{R})$ als Hilberträume ist.

Hinweis: Analysis III, Satz 2.2.5 und 2.2.8

Abgabe am Mittwoch 29.06.22 bis 14 Uhr

[1] Man nennt g dann die *schwache Ableitung* von f

Übungsblatt 9

Aufgabe 33. Für welche Funktionen $g \in C^0([0,\pi])$ hat die Gleichung

$$f(x) - \int_0^\pi \sin(x+y) f(y) dy = g(x)$$

eine Lösung $f \in C^0([0,\pi])$? Wie viele Lösungen gibt es dann gegebenenfalls?

Aufgabe 34 (2+3)**.**

(i) Sei X ein endlichdimensionaler Banachraum. Sei $(x_k)_k$ eine in X schwach konvergente Folge. Zeigen Sie, dass dann x_k schon stark in X konvergiert.

(ii) Sei $(x_k)_k$ eine in ℓ_1 schwach konvergente Folge. Zeigen Sie, dass dann x_k schon stark in ℓ_1 konvergiert.

Hinweis: Zeigen Sie, zunächst dass es ausreicht zu zeigen, dass es keine Folge x_k in ℓ_1 mit $\|x_k\|_{\ell_1} = 1$ für alle k und $x_k \xrightarrow{w} 0$ gibt. Zeigen Sie dann, dass es eine Teilfolge a^{k_j} von a^k und paarweise disjunkte Mengen $M_j \subset \mathbb{N}$ gibt, so dass für jedes $j \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{n \in M_j} |a^{k_j}| > \frac{1}{2} \text{ und } \sum_{n \in \mathbb{N} \setminus M_j} |a^{k_j}| < \frac{1}{4}.$$

Konstruieren Sie damit ein $\ell \in \ell_\infty \cong (\ell_1)^*$ mit $\langle \ell, a^{k_j} \rangle > \frac{1}{4}$ für alle j.

Aufgabe 35. Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und beschränkt. Sei $M_f\colon L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$, $\phi \mapsto f\phi$. Bestimmen Sie das Punktspektrum, residuelle Spektrum und stetige Spektrum von M_f. Welche Dimension haben die Eigenräume (wenn sie existieren)?

Aufgabe 36. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ offen, beschränkt mit $\partial\Omega$ eine glatte zweidimensionalene Untermannigfaltigkeit. Sei n_y der äußere Einheitsnormalenvektor zu $\partial\Omega$ in $y \in \partial\Omega$. Wir setzen

$$k(x,y) = \frac{\langle x-y, n_y \rangle}{|x-y|^3}$$

und $K\colon C^0(\partial\Omega) \to C^0(\partial\Omega)$ durch

$$(K\phi)(x) = \int_{\partial\Omega} k(x,y)\phi(y) \mathrm{dvol}_{\partial\Omega}.$$

Zeigen Sie, dass K kompakt ist.

Hinweis: Betrachten Sie zunächst $(K_\epsilon\phi)(x) = \int_{\partial\Omega} k_\epsilon(x,y)\phi(y)\mathrm{dvol}_{\partial\Omega}$ mit $k_\epsilon(x,y) = \frac{\langle x-y, n_y\rangle}{|x-y|^3+\epsilon}$ (Man sagt k_ϵ ist ein *regularisierter Kern*). In Beispiel 3.4.2.iv haben wir gesehen, dass Integraloperatoren mit stetigem Kern auf einer kompakten Menge kompakt sind. D.h. wir können den Satz auch auf die kompakte Menge $\partial\Omega$ anwenden.

Abgabe am Mittwoch 06.07.22 bis 14 Uhr

Übungsblatt 10

Aufgabe 37 (2.5+2.5)**.** Sei X ein Banachraum und $A, B \in \mathcal{L}(X)$. Zeigen Sie

(i) $R_\lambda(A) - R_\mu(A) = (\mu - \lambda)R_\lambda(A)R_\mu(A)$ für alle $\lambda, \mu \in \rho(A)$.

(ii) $R_\lambda(A) - R_\lambda(B) = R_\lambda(A)(A - B)R_\lambda(B)$ für alle $\lambda \in \rho(A) \cap \rho(B)$.

Aufgabe 38 (2+3)**.** Sei $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π-periodisch und $h|_{[0,2\pi]} \in L^2([0, 2\pi]$. Sei T_h die Faltung mit h, d.h.

$$T_h\colon L^2([0, 2\pi]) \to L^2([0, 2\pi]), \quad T_h f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)h(t - s)dt.$$

(i) Zeigen Sie, dass T_h normal und kompakt ist.

(ii) Bestimmen Sie die Eigenwerte von T_h und die zugehörigen Eigenvektoren[1]

Hinweis: Entwickeln Sie h in eine Fourierreihe (Analysis 3)

Aufgabe 39/40 (1+2+1+2+2+2)**.** Wir betrachten das Sturm-Liouville-Problem

$$(Lu)(x) := = -\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d}{dx}u(x)\right) + q(x)u(x)$$

für $p > 0$, $p \in C^1([a, b])$, $q, g \in C^0([a, b])$ mit den Randbedingungen

$$R_1 u := \alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a)$$
$$R_2 u := \beta_1 u(b) + \beta_2 u'(b)$$

für $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{C}$.

Sei u_1, u_2 ein Fundamentalsystem von $Lu = 0$ mit $R_1 u_1 = 0$ und $R_2 u_2 = 0$ (gibt es wegen?)

$$\Gamma(x, \xi) = \begin{cases} \frac{1}{c}u_1(\xi)u_2(x) & x \geq \xi, x \in [a, b] \\ \frac{1}{c}u_2(\xi)u_1(x) & x < \xi, x \in [a, b] \end{cases}$$

mit $c = p(x)(u_1(x)u_2'(x) - u_2(x)u_1'(x))$ (Dann hängt c nicht von x ab und verschwindet nicht. Warum?) Die Funktion $\Gamma\colon [a, b]^2 \to \mathbb{R}$ heißt *Greenfunktion assoziiert zu L mit den Randbedingungen R_i*.

(i) Zeigen Sie, dass Γ stetig und weg von $x = \xi$ zweimal stetig differenzierbar ist, und dass $R_1\Gamma(., \xi) = R_2\Gamma(., \xi) = 0$ für alle $\xi \in [a, b]$ gilt.

(ii) Sei $g \in C^0([a, b])$ und $u(x) = \int_a^b \Gamma(x, \xi)g(\xi)d\xi$. Zeigen Sie, dass $u \in C^2$ ist und $Lu = g$ mit $R_1 u = R_2 u = 0$ erfüllt.

(iii) Zeigen Sie, dass $T\colon C^0([a, b]) \to C^0([a, b])$, $(Tf)(x) := \int_a^b \Gamma(x, \xi)f(\xi)d\xi$ sich zu einem Operator von $L^2([a, b]) \to L^2([a, b])$ stetig fortsetzen lässt.

(iv) Zeigen Sie, dass dann $T\colon L^2([a, b]) \to L^2([a, b])$ aus (iii) kompakt und selbst-adjungiert ist.

(v) Zeigen Sie, dass $R_i(Tf) = 0$ und $L(Tf) = f$ für alle $f \in C^0([a, b])$ gillt.

(vi) Verwenden Sie den Spektralsatz für T, um zu zeigen, dass es eine Zerlegung von $L^2([a, b])$ in Eigenfunktionen von L mit Randbedingungen $R_i u = 0$ gibt.

Abgabe am Mittwoch 13.07.22 bis 14 Uhr

[1] Da es sich dabei selbst wieder um Funktionen handelt, sagt man hier auch *Eigenfunktionen*.

Übungsblatt 11

Aufgabe 41. Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ und $\mathcal{Z}_n = (x_i)_{i=0}^n$ Zerlegungen von $[a,b]$, also $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$, mit $|\mathcal{Z}_n| \to 0$ für $n \to \infty$.

Sei $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ monoton wachsend. Dann ist das *Riemann-Stieltjes-Integral* von f

$$\int_a^b f dg := \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^n f(x_i)(g(x_{i+1}) - g(x_i))$$

sofern dieser Grenzwert rechts existiert und unabhängig der Folge $(\mathcal{Z}_n)_n$ ist. Es ist also wie das Riemann-Integral nur das dem Intervall $[x_i, x_{i+1}]$ eine neue Länge zugeordnet wird, nämlich $g(x_{i+1}) - g(x_i)$.

Zeigen Sie:

(i) Ist g differenzierbar, dann ist $\int_a^b f dg = \int_a^b f(x)g'(x)dx$.

(ii) Ist g stetig und stückweise differenzierbar, dann ist $\int_a^b f dg = \sum_{j=1}^n \int_{I_j} f(x)g'(x)dx$, wobei $[a,b] = I_1 \sqcup \ldots \sqcup I_n$ mit $g|_{I_j}$ diffenzierbar ist. (Damit ist $\int_a^b f dg = \int_a^b f(x)g'(x)dx$, wenn man g' als schwache Ableitung versteht.)

(iii) Ist $g = 0$ für $x \leq c$ und $g = 1$ für $x > c$, $c \in (a,b)$, dann ist $\int_a^b f dg = f(c)$.

(iv) Sei $\mu \geq 0$, $g_i\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ monoton steigend. Dann ist $\int_a^b f d(\mu g_1 + g_2) = \mu \int_a^b f dg_1 + \int_a^b f dg_2$.

Aufgabe 42. Sei $A \in \mathcal{L}(H)$ selbstadjungiert und nichtnegativ. Zeigen Sie:

(i) $\sigma(A) \subset [0, \infty)$

(ii) (Existenz einer Wurzel) Es gibt einen selbstadjungierten nichtnegativen Operator B mit $B^2 = A$.

(iii) Sei auch $B \in \mathcal{L}(H)$ selbstadjungiert und nichtnegativ. Dann ist AB genau dann ein selbstadjungierter nichtnegativer Operator, wenn A mit B kommutiert.

Hinweis: Für die Nichtnegativität in (iii) (ii) verwenden.

Aufgabe 43. Sei A ein beschränkter selbstadjungierter Operator auf einem Hilbertraum H und $\varphi\colon C^0(\sigma(A)) \to \mathcal{L}(H)$ die zugehörige Abbildung aus Satz 5.3.1 ($\varphi(f) = f(A)$). Wir wollen (b) dieses Satzes beweisen (Falls f ein komplexes Polynom ist, wissen wir schon, dass die Aussage wahr ist).

Dazu sei $f \in C^0(\sigma(A))$.

(i) Sei $\lambda \notin \operatorname{Bild} f$ und $g = (f - \lambda)^{-1}$. Zeigen Sie, dass $\varphi(g) = (\varphi(f) - \lambda)^{-1}$.

(ii) Sei $\lambda \in \operatorname{Bild} f$. Zeigen Sie, dass es für alle $\epsilon > 0$ ein $x \in H$ mit $\|x\| = 1$ und $\|(\varphi(f) - \lambda)x\| < \epsilon$ gibt. Folgern Sie daraus, dass $\lambda \in \sigma(\phi(f))$ ist.

(iii) Folgern Sie nun: $\sigma(\varphi(f)) = \{f(\lambda) | \lambda \in \sigma(A)\}$.

Aufgabe 44. Sei $H = L^2([0,1])$ und $M\colon H \to H,\ f(x) \mapsto xf(x)$.

(i) Sei $g \in C^0(\sigma(M))$. Bestimmen Sie $g(M)$.

(ii) Bestimmen Sie die Spektralfamilie $(E_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ für M.

(iii) Für $f \in H$ berechnen Sie mit Hilfe von (ii) explizit

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda d(E_\lambda f, f)_{L^2}$$

(also ohne zu verwenden, dass Sie wissen, das dies gleich $(Mf, f)_{L^2}$ sein muss).

Abgabe am Mittwoch 20.07.22 bis 14 Uhr

Übungsblatt 12– Bonuspunkteblatt

Aufgabe 41. Sei H ein Hilbertraum und $P \in \mathcal{L}(H)$. Wir nennen P genau dann eine Orthogonalprojektion, wenn es einen abgeschlossen Unterraum $H_1 \subset H$ gibt und P die Form $H_1^\perp \oplus H_1 \mapsto H_1^\perp \oplus H_1$, $(u, v) \mapsto (u, 0)$ hat (dann ist $H_1 = \ker P$).

(i) Orthogonalprojektionen sind selbst-adjungiert.

(ii) Das Produkt zweier Orthogonalprojektionen ist wieder eine Orthogonalprojektion.

Aufgabe 42. Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig (nicht unbedingt beschränkt). Sei $\operatorname{dom} M_f = \{\phi \in L^2(\mathbb{R}) \mid f\phi \in L^2(\mathbb{R})\}$. Sei $M_f\colon \operatorname{dom} M_f \subset L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$, $\phi \mapsto f\phi$. Bestimmen Sie M_f^* und das Spektrum von M_f.

Aufgabe 43. Sei $A\colon \operatorname{dom} A \subset H \to H$ ein abgeschlossener Operator. Sei $B \in \mathcal{L}(H)$. Zeigen Sie, dass $A + B$ auf $\operatorname{dom} A$ wohldefiniert und $A + B\colon \operatorname{dom} A \subset H \to H$ auch abgeschlossen ist.

Aufgabe 44. Sei $A \in \mathcal{L}(H)$ selbstadjungiert.

(i) Zeigen Sie, dass $\|(A \pm \mathrm{iId})u\|^2 = \|Au\|^2 + \|u\|^2$ ist und folgern Sie, dass $A \pm \mathrm{iId}$ invertierbar ist.

(ii) Rechnen Sie nach, dass die Cayley-Transformierte $U_A{:=}(A + \mathrm{iId})(A - \mathrm{iId})^{-1}$ ein unitärer Operator ist.

Freiwillige Abgabe am Mittwoch 27.07.22 bis 14 Uhr