QQ 1 – Wahr oder falsch?

Nehmen Sie an, dass Schweine niemals fliegen können.

Ist die Aussage

"Wenn Schweine fliegen könnten, dann ist $2 + 2 = 5$."

dann wahr oder falsch?

QQ 2 – Wahrheitstabellen

Finden Sie Funktionen f, g und h, so dass die folgende Tabelle stimmt. D.h. finden Sie logische Ausdrücke in den Aussagen X, Y nur unter Verwendung von $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\implies$ und $\Leftrightarrow$. Formulieren Sie die von Ihnen gefunden Ausdrücke auch in 'normaler Sprache'.

X	Y	f(X,Y)	g(X,Y)	h(X,Y)
f	f	w	w	f
f	w	w	f	f
w	f	f	w	f
w	w	w	f	w

QQ 3 – $\forall$ vs. $\exists$

Seien x und y reelle Zahlen.

Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch?

A $\forall x \; \forall y : \; x = y^2$

B $\exists y \; \exists x : \; x = y^2$

C $\forall x \; \exists y : \; x = y^2$

D $\forall y \; \exists x : \; x = y^2$

QQ 4 – Teilbarkeit

Ist die Zahl 123456789 eine Primzahl?

Wird sich die Antwort ändern, wenn wir die Ziffernreihenfolge ändern?

QQ 5 – Teilbarkeit

Beweisen Sie:

Für jede natürliche Zahl x ist $x(x+1)$ gerade.

QQ 6 – Teilbarkeit

Beweisen Sie:

(i) Ist k ein Teiler von m, dann ist k auch ein Teiler von $-m$.

(ii) Ist k ein Teiler von m und ℓ ein Teiler von k, dann ist ℓ auch ein Teiler von m.

QQ 7 – Eine Nim-Variante - Teil 1

Paula und Quentin spielen: Vor ihnen liegen ein paar Haufen mit jeweils einer Menge von Stäbchen. Die Spieler ziehen abwechselnd, Paula beginnt. In jedem Zug darf ein Spieler von <u>einem</u> Haufen eine beliebige Anzahl von Stäbchen nehmen (aber immer mindestens eines). Der Spieler, der das letzte Stäbchen nehmen muss, verliert.

Geben Sie ein paar (einfache) Gewinnpositionen an.

QQ 8 – Eine Nim-Variante - Teil 2

Paula und Quentin spielen: Vor ihnen liegen ein paar Haufen mit jeweils einer Menge von Stäbchen. Die Spieler ziehen abwechselnd, Paula beginnt. In jedem Zug darf ein Spieler von <u>einem</u> Haufen eine beliebige Anzahl von Stäbchen nehmen (aber immer mindestens eines). Der Spieler, der das letzte Stäbchen nehmen muss, verliert.

Welche Verlustpositionen kann man aus den Gewinnpositionen der letzten QQ ableiten?

QQ 9 – Eine Nim-Variante - Teil 3

Paula und Quentin spielen: Vor ihnen liegen ein paar Haufen mit jeweils einer Menge von Stäbchen. Die Spieler ziehen abwechselnd, Paula beginnt. In jedem Zug darf ein Spieler von einem Haufen eine beliebige Anzahl von Stäbchen nehmen (aber immer mindestens eines). Der Spieler, der das letzte Stäbchen nehmen muss, verliert.

Es seien 3 Haufen, einer mit 2 Stäbchen, einer mit 3 Stäbchen und einer mit 4 Stäbchen. Kann Paula immer gewinnen?

QQ 10 – Meinung dazu?

Lemma

Seien a, b und c natürliche Zahlen, so dass a das Produkt bc teilt. Dann ist a ein Teiler von b oder ein Teiler von c.

Beweis.

Sei $a = 5$, $b = 3$ und $c = 10$. Dann teilt 5 das Produkt $3 \cdot 10 = 30$ und 5 teilt c, also ist die Behauptung richtig. $\square$

QQ 11 – Meinung dazu?

Lemma

Sei a eine rationale Zahl und b eine irrationale Zahl.[1] *Dann ist $a + b$ irrational.*

Beweis.

$a + b = \frac{k}{\ell}$ und $a = \frac{p}{q}$
Dann ist $b = \frac{k}{\ell} - \frac{p}{q} = \frac{kq - p\ell}{\ell q}$ und damit rational . □

---

[1] Eine reelle Zahl a heißt *rational*, wenn es zwei ganze Zahlen p, q mit $a = \frac{p}{q}$ gibt. Eine reelle Zahl, die nicht rational ist, heißt *irrational*.

QQ 12 – Meinung dazu?

Wir betrachten die Gleichung $x^2 + x + 1 = 0$. Dann muss $x \neq 0$ sein. Damit folgt

$$x^3 + x^2 + x = x(x^2 + x + 1) = x \cdot 0 = 0.$$

Addition von 1 auf beiden Seiten liefert:

$$x^3 + x^2 + x + 1 = x^3 + 0 = x^3 = 1.$$

Also ist $x = 1$, was in der ersten Gleichung $1^2 + 1 + 1 = 0$ impliziert. Also ist $3 = 0$.