# Vorkurs Mathematik für Mathematiker

Universität Freiburg, WS 21/22
Nadine Große

Skript - Version vom 6. Oktober 2021

Wenn Sie (Tipp-)Fehler finden, bin ich dankbar, wenn Sie mir diese mitteilen.

# 1 Worum geht es hier?

**Tag 1**

Was ist eigentlich ein Vorkurs? Oder was soll dieser Vorkurs eigentlich sein? Dieser Vorkurs richtet sich an Studenten der Mathematik und am einfachsten ist es erst einmal zu sagen, was dieser Vorkurs nicht ist und auch nicht sein soll. Es wird keine Wiederholung oder Auffrischung des Schulstoffes der letzten Jahre sein und auch keine Nachhilfeveranstaltung. Sondern Ziel ist es mal an ein paar Beispielen zu sehen, wie Mathematik so funktioniert und wie der Mathematiker so denkt und tickt. Da denken Sie jetzt vielleicht – ist ja jetzt nicht so, dass ich noch nie Mathematik gesehen habe. Das kam schließlich in der Schule seit der ersten Klasse dran. Das ist richtig und Schulmathematik und Mathematik an der Uni ist erst einmal schon diesselbe Mathematik. Am Ende ist noch immer $2 + 2 = 4$. Der Unterschied liegt darin, wie Mathematik betrieben wird und worauf der Fokus liegt.

In der Schule geht es vor allem darum, überhaupt erst einmal rechnen zu lernen, zu lernen was gilt und was nicht, mit den Rechenwerkzeugen zu arbeiten, Algorithmen zu üben, . . . . Das ist natürlich alles gut und auch an der Uni noch wichtig, aber an der Uni geht es größtenteils darum: Warum sind Aussagen richtig? Wie finde ich überhaupt heraus, was richtig sein könnte?

In dem Sinne ist ein Mathematiker eine seltsame Spezies: Wenn jemand sagt 'xy gilt', dann sagt der Mathematiker nicht, 'Wird schon stimmen, derjenige ist schließlich Experte' (wie immer man das feststellen will), sondern die natürliche Reaktion ist 'Warum?'. Und dann muss das begründet werden bis alle Zweifel ausgeräumt sind. Das nennt man beweisen.

In diesem Vorkurs wollen wir uns ein bisschen diese Art des Denkens an Beispielen anschauen und die Hoffnung ist, dass Ihnen das den Einstieg ins Mathematikstudium etwas erleichtert. Was genau der Inhalt dieses Kurses ist, ist dabei gar nicht so wichtig. Wissen über die konkreten Inhalte dieses Vorkurs wird prinzipiell nicht beeinflussen, ob Sie das Mathematikstudium erfolgreich abschließen. Die Auswahl der konkreten Inhalte erfolgte hier nicht nach Wichtigkeit und/oder Relevanz, sondern eher nach: Wofür brauche ich möglichst wenig Vorwissen und kann trotzdem daran einige grundlegende Techniken schon mal zeigen?

Was mit diesen Techniken dann genau gezeigt wird, ist für diese Woche erst einmal irrelevant. In Wirklichkeit liegt die Bedeutung der Mathematik aber natürlich nicht darin, dass sie besonders formal irgendwelche unwichtigen Aussagen ableiten kann – das wäre eher Kunst ohne Publikum. Sondern darin, dass Mathematik einen fundamentalen Beitrag in vielen technischen Errungenschaften der Menschheit hat. Z.B. stecken in Wetterberichten, Fahrplänen und Computern viel fortgeschrittene Mathematik und mehr als nur 'ein bisschen Rechnen'. In diesem Lichte ist Inhalt und die Auswahl der Fragestellungen, mit denen man sich in der Mathematik beschäftigt, natürlich hochrelevant. Aber für diese Woche soll es uns erst einmal nicht interessieren.

Was allerdings von dem, was Sie hier im Vorkurs sehen, immer wieder eine Rolle spielen wird ist: Logisch Argumentieren zu können. Deshalb machen wir im ersten Kapitel erst einmal ein paar Grundlagen zur logischen Argumentation – Aussagenlogik. Sogar eher auf eher formaler Ebene, damit wir es ein bisschen systematischer analysieren können.

Ich hoffe, es wird Ihnen ein bisschen Spaß und Lust auf das Studium machen. Viel Erfolg!

# 2 Aussagenlogik

In der Mathematik studieren wir Aussagen. Damit meinen wir immer Sätze, die entweder falsch oder wahr sind, z.B.

- 4 ist eine gerade Zahl.
- 2 ist eine ungerade Zahl.

Das sind beides Aussagen. Die erste ist wahr, die zweite ist falsch. Statt wahr und falsch, sagen wir auch oft, die Aussage gilt bzw. sie gilt nicht.

Dahingegen sind 'Juchu!' oder 'Bring den Müll runter!' keine Aussagen (sondern Ausrufe bzw. Aufforderungen'), da sie weder wahr noch falsch sind.

I.A. ist es nicht leicht, von einer Aussage zu bestimmen, ob Sie wahr oder falsch ist. Selbst bei unserem Beispiel '4 ist eine gerade Zahl.' muss man erst einmal wissen, was eine gerade Zahl sein und dann überprüfen, ob 4 eine ist.

## 2.1 Logische Grundoperationen

Abstrakte Aussagen bezeichen wir immer mit Buchstaben. Z.B. Aussage $A$. Wir können nun Aussagen verknüpfen und so neue Aussagen herstellen, deren Wahrheitsgehalt, dann davon abhängen wird, ob die Ausgangsaussagen wahr oder falsch waren und was genau die Verknüpfung ist. Ein Beispiel:

'Aussage A und Aussage B' ist wahr, wenn A und B beide wahr sind, ansonsten falsch.

Z.B. ist Aussage A '4 ist eine gerade Zahl' und Aussage B 'Heute ist Montag'. Dann wäre $A$ und $B$: '4 ist eine gerade Zahl und heute ist Montag'. Da $A$ definitiv wahr ist, hängt es davon ab, ob 'heute Montag' ist, ob A und B auch wahr ist.
Oft stellt man, die verschiedenen Fälle in sogenannten Wahrheitstafeln dar. Für die Und-Operation 'A und B' (wir schreiben auch kurz $A \wedge B$) wäre da wie in Tabelle 1.

Ähnlich gibt es

'Aussage 'Nicht-A' (Negation von A, $\neg A$) ist wahr, falls $A$ falsch ist und falsch, falls $A$ wahr ist.

'Aussage A oder Aussage B' ($A \vee B$) ist wahr, wenn (mindestens)* eine der Aussagen A und B wahr ist, und ansonsten falsch.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $A$ | w | w | f | f |
| $B$ | w | f | w | f |
| $A \wedge B$ | w | f | f | f |

Abbildung 1: Die ersten zwei Zeilen zeigen alle möglichen Kombinationen von wahr und falsch für die Aussagen $A$ und $B$.

Auch Sätzen wie 'Falls 4 eine gerade Zahl ist, dann ist 6 eine gerade Zahl' ordnen wir einen Wahrheitsgehalt, also wahr oder falsch zu.

'Falls Aussage 'A' gilt, dann gilt Aussage B' ($A \implies B$) ist wahr, falls $A$ falsch, auch wahr, falls $A$ und $B$ beide wahr sind, und ansonsten immer falsch.

Das ist übersichtlicher, wenn man in die zugehörige Wahrheitstafel schaut. Das Beispiel 'Falls 4 eine gerade Zahl ist, dann ist 6 eine gerade Zahl' ist also eine wahre Aussage, weil 6 eine gerade Zahl ist. Das irritiert jetzt vielleicht ein bisschen, da es überhaupt nicht davon abhängt, ob die Aussage nach 'Falls', also hier '4 ist eine gerade Zahl', wahr oder falsch ist. Vom normalen Sprachgebrauch sind wir eigentlich gewöhnt, dass 'Falls A, dann B.' einen kausalen Zusammenhang suggeriert. Aber dass muss es nicht, auch wenn wir es in der Mathematik oft so nutzen, weil alles andere eher unnötig wäre. So wäre z.B. 'Falls die Erde würfelförmig ist, scheint jeden Tag die Sonne.' eine wahre Aussage – einfach, weil die Erde nicht würfelförmig ist. Dass die Aussage wahr ist, hat also überhaupt nichts damit zu tun, ob jemals die Sonne scheinen wird.

Im nächsten Beispiel haben wir allerdings einen solchen kausalen Zusammenhang:

'Falls $m$ eine gerade Zahl ist, dann ist $m + 1$ eine ungerade Zahl.'

Hier ist '$m$ eine gerade Zahl' der Grund, warum $m + 1$ eine ungerade Zahl ist. Hier gilt in Wirklichkeit sogar mehr, nämlich:

'$m$ ist genau dann eine gerade Zahl, wenn $m + 1$ eine ungerade Zahl ist.'

Das ist eine 'Genau-dann-wenn-Aussage':

'Aussage A gilt genau dann, wenn Aussage B gilt' ($A \Leftrightarrow B$) ist wahr, falls $A$ und $B$ beide wahr sind oder beide falsch sind, und ansonsten immer falsch.

Wir sagen alternativ auch: 'A ist äquivalent zu B'.

Genau-dann-wenn-Aussagen sind etwas, was wir im normalen Sprachgebrauch eher selten benutzen. Oft meinen Leute mit 'Falls A, dann B'-Aussagen leider in Wirklichkeit, genau-dann-wenn-Aussagen, also eigentlich: 'Falls A und nur dann, dann B' oder sogar

*Das mindestens sagen wir hier nur dazu, um zu unterstreichen, dass auch beide wahr sein könnten. Das ist aber auch schon so, wenn wir nur 'falls eine der Aussagen wahr ist' schreiben würden. Denn sind zwei wahr, ist insbesondere eine wahr.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $A$ | w | w | f | f |
| $B$ | w | f | w | f |
| $A \wedge B$ | w | f | f | f |
| $A \vee B$ | w | w | w | f |
| $A \implies B$ | w | f | w | w |
| $A \Leftrightarrow B$ | w | f | f | w |
| $\neg A$ | f | f | w | w |

Abbildung 2: Übersicht über die Definitionen der einzelnen logischen Operationen in Form einer Wahrheitstafel.

'Nur falls A gilt, dann könnte B gelten' (also sogar die ganz andere Richtung). Z.B. 'Wenn du dein Zimmer aufräumst, dann darfst du länger aufbleiben.' gibt strenggenommen eigentlich mit dem Zimmeraufräumen nur eine Möglichkeit ab, länger aufzubleiben. Dieser Satz sagt nicht, dass es nicht auch einen anderen Weg gibt, länger aufzubleiben. Natürlich ist es nur ungünstig formuliert, eigentlich wollte man wahrscheinlich sagen: 'Nur wenn du dein Zimmer aufräumst, kannst du länger aufbleiben.' Aber es macht einen Riesenunterschied in der Bedeutung. Darauf muss man aufpassen!

Die Aussage 'Falls $m$ und $n$ gerade Zahlen isind, dann ist $m + n$ auch gerade' ist z.B. auch wahr. Aber '$m$ und $n$ sind genau dann gerade Zahlen, wenn $m + n$ gerade ist' ist falsch, da aus $m + n$ gerade nicht folgt, dass $m$ und $n$ beide gerade sind, denn es können beide auch ungerade sein.

Diese ganzen logischen Grundoperationen kann man dann auf verschiedene Weise wieder miteinander verknüpfen:

Z.B. ist 'Nicht-(Nicht-A) (also die doppelte Negation von A) ist äquivalent zu A'. Mit Hilfe der Notationen von oben wäre das: $(\neg(\neg A)) \Leftrightarrow A$ ist eine wahre Aussage (d.h. es ist wahr unabhängig davon, ob die Aussagen A wahr ist). Um zu überprüfen, ob das wirklich stimmt, gehen wir die einzelnen Fälle des Wahrheitsgehaltes von $A$ durch. Am leichtesten geht das in einer Wahrheitstafel, siehe Tabelle 3. Die Klammern werden als Vorfahrtsregeln genutzt, damit man weiß, was man zu erst ausführen soll – wie bei $(3 + 2) \cdot 5$ vs. $3 + (2 \cdot 5)$.

**Zum Selbstprobieren:**

- Überlegen Sie sich einmal selber, dass $(\neg(A \wedge B)) \Leftrightarrow ((\neg A) \vee (\neg B))$ immer wahr ist und formulieren sie diese Aussage in 'normaler Sprache'.
- Überlegen Sie sich, dass folgende Aussage immer wahr ist: Es gilt $A$ oder die Negation von $A$. Formulieren Sie diese Aussage auch mittels der eigeführten Notation.

Dazu noch ein anderes Beispiel: Es ist '$A$ genau dann, wenn $B$' äquivalent zu: 'Falls A, dann B' und 'Falls B, dann A'. (Das erklärt aus, warum das Symbol für 'äquivalent sein' aus den beiden Pfeilen für Wenn-dann für die beiden Richtungen zusammengesetzt ist.) Mit Hilfe der Bezeichnungen von eben geschrieben, wäre das

| $A$ | $\neg A$ | $\neg(\neg A)$ | $(\neg(\neg A)) \Leftrightarrow A$ |
|---|---|---|---|
| w | f | w | **w** |
| f | w | f | **w** |

Abbildung 3: Für jeden Wahrheitsgehalt von $A$ (also wahr oder falsch) prüfen wir nach, dass $(\neg(\neg A)) \Leftrightarrow A$ immer wahr ist. Das machen wir, in dem wir diese Aussage schrittweise ausführen (beginnend bei der innersten).

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $A$ | w | w | f | f |
| $B$ | w | f | w | f |
| $A \Leftrightarrow B$ | w | f | f | w |
| $A \implies B$ | w | f | w | w |
| $B \implies A$ | w | w | f | w |
| $(A \implies B) \wedge (B \implies A)$ | w | f | f | w |
| $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow ((A \implies B) \wedge (B \implies A))$ | **w** | **w** | **w** | **w** |

Abbildung 4: Für jede Kombination von Wahrheitsgehalten von $A$ und $B$ prüfen wir analog zur letzten Tabelle schrittweise, die zu zeigende Aussage nach. Da dies für alle Fälle wahr ist, ist es insgesamt eine wahre Aussage.

$$(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow ((A \implies B) \wedge (B \implies A))$$

ist eine wahre Aussage (d.h. es ist wahr unabhängig davon, ob die Aussagen A und B wahr sind). Um das zu überprüfen, stellen wir auch wieder eine Wahrheitstafel auf, vgl. Tabelle 4.

Das heißt, wir haben uns gerade überlegt, dass man eine Genau-dann-wenn-Aussage $A \Leftrightarrow B$ beweisen kann, indem man die Aussagen $A \implies B$ und $B \implies A$ einzeln zeigt. Das ist auch genau die Art, wie genau-dann-wenn Aussagen im Allgemeinen bewiesen werden.

Es ist jetzt nicht so, dass wir in der Mathematik, alle unsere Aussagen, mit diesen Symbolen (und noch weiteren) schreiben. Im Gegenteil, Beweise in der Mathematik sind oft viel Fließtext, wie wir bald sehen werden. Aber dies soll uns hier helfen, die Strukturen in logischen Schlüssen zu erkennen.

**Lemma 2.1.** *Sei $m$ eine natürliche Zahl. Dann ist $m$ genau dann gerade, wenn $m+1$ ungerade ist.*

Ein nicht kleiner Teil von Ihnen, wird jetzt sagen: Ist ja klar, oder? Offensichtlich richtig. Das ist aber kein Beweis. Wenn Sie das sagen, frage ich 'Warum? Erklären Sie es mir.' Und was machen Sie dann? Das ist i.A. gar nicht zu sagen, denn die Erklärung hängt z.B. auch stark davon ab, was man schon weiß und was man in der Erklärung benutzen darf.

Die erste Frage sollte also sein: Was muss man eigentlich dazu wissen, um die Aussage überhaupt zu verstehen, geschweige denn zu beweisen?

- Was ist eine natürliche Zahl? – Wir nehmen hier mal an, dass wir das schon wissen (ist ja auch so) und natürliche Zahlen auch addieren und multiplizieren können.
- Wann heißt eine natürliche Zahl gerade? – Eine natürliche Zahl $m$ ist gerade, wenn es eine natürliche Zahl $n$ mit $m = 2n$ gibt.
- Wann heißt eine natürliche Zahl ungerade? – Eine natürliche Zahl $m$ ist gerade, wenn es eine natürliche Zahl $n$ mit $m = 2n + 1$ gibt.

Das ist, was uns klar sein muss, damit wir die Aussage überhaupt verstehen können. Nun können wir diese 'Genau-dann-wenn-Aussage' auch beweisen:

*Beweis.* Da es eine Genau-dann-wenn-Aussage ist, können wir diese beweisen, indem wir die zwei Richtungen:

(i) Ist $m$ gerade, dann ist $m + 1$ ungerade.

(ii) Ist $m + 1$ ungerade, dann ist $m$ gerade.

separat beweisen, siehe Tabelle 4.

Wir beginnen mit (i): Da $m$ eine gerade Zahl ist, gibt es eine natürliche Zahl $n$ mit $m = 2n$. Dann ist $m+1 = 2n+1$ und damit $m+1$ nach Definition von oben ungerade.*

Nun zu (ii): Da $m + 1$ ungerade ist, gibt es eine natürliche Zahl $n$ mit $m + 1 = 2n + 1$. Dann gilt $m = 2n$, also ist $m + 1$ gerade. □

(Wir machen am Ende eines Beweises oft □ oder *qed* o.ä. Das ist nicht vorgeschrieben, sondern soll nur anzeigen, dass der Beweis jetzt zu Ende ist und damit die Lesbarkeit verbessern.)

## 2.2 Quantoren

Nur mit 'und', 'oder' etc. kommen wir nicht sehr weit, was auch häufig vorkommen wird und implizit hier sogar schon vorgekommen ist, sind *Quantoren*. Das sind 'Für alle' ($\forall$) und 'es existiert' ($\exists$).

'Für alle' haben wir schon benutzt, auch wenn wir es da nicht so genannt haben: 'Ist $m$ eine gerade natürliche Zahl, dann ist $m + 1$ ungerade.' ist ein Beispiel. Diese Aussage kann anders formuliert werden, als

Für alle geraden natürlichen Zahlen $m$ gilt, dass $m + 1$ ungerade ist.
($\forall m$ gerade natürliche Zahl : $m + 1$ist ungerade.).

Formal sehen 'für alle'-Aussagen i.A. aus, wie:

*Noch mal zu 'Falls, dann': (i) ist eigentlich eine 'Falls A, dann B'-Aussage: 'Falls $m$ gerade ist, dann ist $m + 1$ ungerade.' Um zu zeigen, dass diese wahr ist, reicht es den Fall zu analysieren, dass $A$ wahr ist. Denn ist $A$ falsch, stimmt die Falls-dann-Aussage automatisch. Deshalb fangen wir immer direkt damit an, $A$ als wahr anzunehmen, also hier 'Da $m$ eine gerade Zahl ist . . . '

$$\forall x \text{ mit Eigenschaft } u : A(x)$$

D.h. Für alle $x$, die die Eigenschaft $u$ erfüllen, gilt die Aussage $A(x)$. (wobei das $(x)$ in $A(x)$ zeigen soll, dass der Wahrheitsgehalt von $A(x)$ von $x$ abhängen wird. Für unser Beispiel 'Für alle geraden natürlichen Zahlen $x$ gilt, dass $x + 1$ ungerade ist.' wäre die Eigenschaft $u$ eine gerade natürliche Zahl zu sein und $A(x)$ die Aussage '$x + 1$ ist ungerade'.

Ein Beispiel für 'es existiert' wäre

Es existiert eine natürliche Zahl, deren Quadrat 4 ist.

Das ist richtig, 2 erfüllt das.

Formal sehen 'es existiert'-Aussagen i.A. aus, wie:

$$\exists x \text{ mit Eigenschaft } u : A(x)$$

D.h. Es gibt ein $x$, das die Eigenschaft $u$ erfüllt, und für das die Aussage $A(x)$ gilt. Für unser Beispiel von eben, wäre die Eigenschaft $u$ eine natürliche Zahl zu sein und $A(x)$ die Aussage '$x^2 = 4$'. Hier dran ist gerade nicht zu sehen, warum man $u$ nicht in die Aussage $A(x)$ steckt. Also in unserem Beispiel $u$ weglässt und für $A(x)$ die Aussage '$x$ ist eine natürliche Zahl und $x^2 = 4$' nimmt. Aber diese Freiheit wird später bei Negationen nützlich sein.

Im normalen Sprachgebrauch gibt es da jeweils Synonyme, z.B. 'jede' statt 'für alle' und 'es gibt' statt 'es existiert'.

Worauf man etwas aufpassen muss: 'Für alle'-Aussagen sagen nichts darüber aus, ob es das Objekt über das eine 'für alle' Aussage gemacht wird überhaupt existiert. Sondern nur darüber, dass für jedes solche existente Objekt etwas bestimmtes gelten muss. Z.B.

'Jedes Einhorn ist rosarot und unsichtbar.' oder anders gesagt
'Für jedes Einhorn gilt, dass es rosarot und unsichtbar ist.'

ist wahr (wenn wir mal annehmen, dass wir wissen, dass es keine Einhörner gibt). Wogegen unter der Annahme, dass es keine Einhörner gibt, die Aussage

'Es gibt ein rosarotes, unsichtbares Einhorn'.

falsch ist, da es insbesondere keine Einhörner gibt.

Im letzten Abschnitt hatten wir die Negation von Aussagen. Wir wollen uns hier mal überlegen, was denn die Negation der Aussage 'Für alle geraden natürlichen Zahlen $m$ gilt, dass $m+1$ ungerade ist.' wäre. Da wir schon wissen, dass die Aussage wahr ist, muss die Negation falsch sei. Aber wir wollen sie als Aussage trotzdem mal formulieren. Damit wir sehen, dass eine 'für alle'-Aussage nicht stimmt, müssen wir nur ein Gegenbeispiel finden, für den sie falsch ist, also für welches die Negation gilt. Die Negation von

$$\forall x \text{ mit Eigenschaft } u : A(x)$$

ist also

$$\exists x \text{ mit Eigenschaft } u : \neg A(x).$$

In unserem Beispiel:

Es gibt eine gerade natürliche Zahl $m$, für die $m+1$ nicht ungerade ist.

Andererseits wäre die Negation einer 'es existiert'-Aussage eine 'Für alle'-Aussage: Die Negation von

$$\exists x \text{ mit Eigenschaft } u : A(x)$$

ist also

$$\forall x \text{ mit Eigenschaft } u : \neg A(x).$$

Z.B. Die Negation von 'Es gibt ein rosarotes, unsichtbares Einhorn' wäre 'Für alle Einhörner gilt, sie sind nicht rosarot und unsichtbar'. Das letzte ist eine wahre Aussage, da es nach unserer Annahme gar keine Einhörner gibt.

**Zum Selberdenken:** Die Aussage 'Für jedes Einhorn gilt, es ist nicht rosarot oder unsichtbar' ist nicht die Negation von 'Es gibt ein rosarotes, unsichtbares Einhorn'. Warum nicht?

# 3 Teilbarkeit

Wir wollen nun ein paar weitere grundlegende Beweistechniken kennenlernen, am Beispiel der Teilbarkeit. Dazu beginnen wir mit **Tag 2**

**Satz 3.1.** *Das Quadrat einer natürliche Zahl hat die Form $3k$ oder $3k+1$ für eine natürliche Zahl $k$.*

Hier nehmen wir an, dass wir schon wissen, dass jede natürliche Zahl, eine der Formen $3m$, $3m+1$ oder $3m+2$ für eine natürliche Zahl $m$ hat. Allgemeiner hat für $\ell > 0$ eine natürliche Zahl immer eine der Formen $\ell m$, $\ell m + 1$, $\ldots$, $\ell m + \ell - 1$ für eine natürliche Zahl $m$[*]
Wir beweisen das mittels *Fallunterscheidung*, d.h. wir gehen eine endliche Anzahl von Fällen durch, die alle Möglichkeiten abdecken (hier die drei Darstellungen $3m$, $3m+1$ und $3m+2$), und zeigen die Behauptung für jeden Fall einzeln.

*Beweis.* Fall 1: Die natürliche Zahl hat die Form $3m$ für eine natürliche Zahl $m$. Dann ist das Quadrat $(3m)^2 = 9m^2 = 3(3m^2)$ und hat damit die Form $3k$ für die natürliche Zahl $k = 3m^2$.[†]

[*] Das entspricht der Aussage: Jede natürliche Zahl lässt bei Division durch eine natürliche Zahl $\ell > 0$ einen Rest $0, 1, \ldots,$ oder $\ell - 1$.

[†] Hier benutzen wir z.B., dass wir wissen, dass Produkte natürlicher Zahlen wieder natürliche Zahlen sind.

Fall 2: Die natürliche Zahl hat die Form $3m + 1$ für eine natürliche Zahl $m$. Dann ist das Quadrat $(3m + 1)^2 = 9m^2 + 6m + 1 = 3(3m^2 + 2m) + 1$ und hat damit die Form $3k + 1$ für die natürliche Zahl $k = 3m^2 + 2m$.

Fall 3: Die natürliche Zahl hat die Form $3m + 2$ für eine natürliche Zahl $m$. Dann ist das Quadrat $(3m + 2)^2 = 9m^2 + 12m + 4 = 3(3m^2 + 4m + 1) + 1$ und hat damit die Form $3k + 1$ für die natürliche Zahl $k = 3m^2 + 4m + 1$.

Jetzt haben wir alle Fälle abgedeckt, denn jede natürliche Zahl hat eine dieser drei Formen. Damit ist die Behauptung bewiesen. □

**Zum Selberprobieren:** Beweisen Sie: Für jede natürliche Zahl $x$ ist $x(x + 1)$ gerade.

## 3.1 Teilbarkeitsregeln

Wir wollen nun zu Teilbarkeitsregeln kommen. Dazu erinnern wir uns erst einmal:

**Definition 3.2.** Sei $m$ eine ganze Zahl und $k$ eine natürliche Zahlen größer Null*. Dann heißt $m$ *durch* $k$ *teilbar*, wenn es eine ganze Zahl $\ell$ mit $m = k\ell$ gibt. Wir nennen $k$ dann *Teiler* von $m$.

Wir nehmen an, dass wir mit ganzen Zahlen rechnen können. Dann können wir über Teilbarkeit z.B. folgendes aussagen:

**Lemma 3.3.** *Seien $m$, $n$ ganze Zahlen und sei $k$ ein natürliche Zahl mit $k > 0$. Sei $m$ durch $k$ teilbar. Dann ist $n$ genau dann durch $k$ teilbar, wenn $m + n$ durch $k$ teilbar ist.*

*Beweis.* Wir sollen hier eine Genau-dann-wenn-Aussage zeigen. Da hatten wir uns im letzten Kapitel überlegt, dass man die beweisen kann, in dem man beide Richtungen zeigt. Wir zeigen hier nur eine Richtung, die andere ist **zum Selbstprobieren**. Wir zeigen nur: Seien $m$, $n$ und $k$ natürliche Zahlen. Sei $k > 0$, $m > n$ und sei $m$ durch $k$ teilbar. Sei $n$ durch $k$ teilbar. Dann ist auch $m - n$ durch $k$ teilbar.

Da $m$ durch $k$ teilbar ist, gibt es nach Definition eine ganze Zahl $\ell$, so dass $m = k\ell$ gilt. Da auch $n$ durch $k$ teilbar ist, gibt es eine ganze Zahl $a$, so dass $n = ka$ ist†. Dann ist $m + n = k\ell + ka = k(\ell + a)$. Da $\ell$, $a$, $m$ und $n$ jeweils ganze Zahlen sind, sind auch $\ell + a$ und $m + n$ ganz und damit $m - n$ durch $k$ teilbar. □

**Zum Selbstprobieren:**

- Zeigen Sie: Ist $k$ ein Teiler von $m$, dann ist $k$ auch ein Teiler von $-m$.
- Zeigen Sie: Ist $k$ ein Teiler von $m$ und $\ell$ ein Teiler von $k$, dann ist $\ell$ auch ein Teiler von $m$.

*Für die meisten Mathematiker fangen die natürlichen Zahlen bei Null an. Da wir aber nicht durch Null teilen können, fordern wir hier $k > 0$.

†Wenn man einfach stumpf die Definition wiedergibt, wäre man hier vielleicht versucht, statt $a$ das $\ell$ wie in der Definition zu schrieben. Aber $\ell$ ist schon vergeben. Es bezeichnet schon einen Faktor im letzten Produkt und der muss nicht der gleiche sein, wie das $a$ hier. Das wäre also eine 'Doppelbezeichnung' – da muss man aufpassen!

Nun aber zu Teilbarkeitsregeln: Ein paar Teilbarkeitsregeln kennt man wahrscheinlich aus der Schule, z.B.

- Eine natürliche Zahl ist genau dann durch 5 teilbar, wenn die letzte Zahl eine 5 oder 0 ist.
- Eine natürliche Zahl ist genau dann durch 3 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 3 teilbar ist.

Wir wollen uns nun mit der Frage beschäftigen, wie man solche Teilbarkeitsregeln finden kann. Dazu brauchen wir die Dezimaldarstellung natürlicher Zahlen.

**Lemma 3.4** (Dezimaldarstellung natürlicher Zahlen)**.** *Sei $x$ eine natürliche Zahl. Dann gibt es eine eindeutige natürliche Zahl $m$ und Ziffern** $a_0, a_1, \ldots, a_m$ mit $a_m \neq 0$ und*

$$x = a_m 10^m + a_{m-1}10^{m-1} + \ldots + a_1 10 + a_0.$$

Das beweisen wir hier nicht. Da wir uns sonst mehr direkt mit natürlichen Zahlen auseinander setzen müssten.

**Zum Selberdenken:** Warum steht im Lemma $a_m \neq 0$? Stimmt es sonst nicht?

**Satz 3.5.** *Sei $x$ eine natürliche Zahl mit Dezimaldarstellung $x = a_m 10^m + a_{m-1}10^{m-1} + \ldots + a_1 10 + a_0$. Dann ist $x$ genau dann durch 3 teilbar, wenn die Quersumme $a_m + a_{m-1} + \ldots + a_0$ von $x$ durch 3 teilbar ist.*

*Beweis.* Wir setzen $q(x) := a_m + a_{m-1} + \ldots + a_0$. Zuerst überlegen wir uns, dass es reicht zu zeigen, dass $x - q(x)$ durch 3 teilbar ist. Warum ist das so? Angenommen wir wissen, dass $x - q(x)$ durch 3 teilbar ist. Dann können wir die beiden Richtungen der Genau-dann-wenn-Aussage mittels Lemma 3.3 zeigen: Für die erste Richtung sei zunächst $x$ durch 3 teilbar. Dann ist auch $-x$ durch 3 teilbar und damit nach Lemma 3.3 auch $-x + (x - q(x)) = -q(x)$, also auch $q(x)$. Analog für die Rückrichtung sei $q(x)$ durch 3 teilbar, dann ist auch $q(x) + (x - q(x)) = x$ durch 3 teilbar.

Wir müssen also nur noch nachrechnen, dass $x - q(x)$ durch 3 teilbar ist. Dazu berechnen wir

$$\begin{aligned} x - q(x) =& a_m(10^m - 1) + a_{m-1}(10^{m-1} - 1) + \ldots + a_1(10 - 1) \\ =& 3\left(\underbrace{333\ldots3}_{(m-1)-\text{stellig}}\ a_m + \underbrace{333\ldots3}_{(m-2)-\text{stellig}}\ a_{m-1} + \ldots + 3a_1\right) \end{aligned}$$

$x - q(x)$ ist also durch 3 teilbar und damit ist nach Lemma 3.3 $x$ genau dann durch 3 teilbar, wenn $q(x)$ durch 3 teilbar ist. □

*Eine Ziffer ist eine der Zahlen 0, 1, …, 9.

**Zum Selberdenken:** Die analoge Teilbarkeitsregel gilt auch für Division durch 9. Warum?

Wenn wir jetzt für Division durch 7 finden wollen, können wir wie folgt vorgehen. Wir nehmen die Dezimaldarstellung von $x$ und ersetzen jede Zehnerpotenz $10^i$ durch eine Zahl $b_i$, die bei Division durch 7 den gleichen Rest lässt (d.h. $10^i - b_i$ muss durch 7 teilbar sein). Dann ist $x = a_m 10^m + a_{m-1}10^{m-1} + \ldots + a_1 10 + a_0$ genau dann durch 7 teilbar, wenn $r(x) = b_m a_m + b_{m-1}a_{m-1} + \ldots + b_1 a_1 + b_0 a_0$ durch 7 teilbar ist.

**Zum Selberprobieren:** Beweisen Sie diese letzte Aussage.

Also z.B. ist

$$\begin{aligned} x =& a_m 10^m + a_{m-1}10^{m-1} + \ldots + a_1 10 + a_0 \\ r(x) :=& \ldots - a_9 + 2a_8 + 3a_7 + a_6 - 2a_5 - 3a_4 - a_3 + 2a_2 + 3a_1 + a_0, \end{aligned}$$

denn 7 teilt $10-3$, $100-2$, $1000-(-1)$, $\ldots$. Wenden wir das mal konkret an: Sei $x = 8638$. Dann ist $r(x) = -8 + 2\cdot 6 + 3\cdot 3 + 4 = 21 = 3\cdot 7$. Also sollte nach der Teilbarkeitsregel 8638 durch 7 teilbar sein und das stimmt auch: $8638 = 7\cdot 1234$.

**Zum Selberprobieren:** Finden Sie so eine Teilbarkeitsregel für Division durch 11.

## 3.2 Primzahlen

Als ein weiteres Beispiel einer Beweistechnik wollen wir uns die Aussage anschauen.

**Lemma 3.6.** *Es gibt unendlich viele Primzahlen.*

Dazu muss man erst einmal wissen, was eine Primzahl ist:

**Definition 3.7.** Sei $p$ eine natürliche Zahl größer 1. Dann ist $p$ eine Primzahl, wenn 1 und $p$ die einzigen natürlichen Zahlen sind, die Teiler von $p$ sind.

Wir fordern hier 'größer eins', da sonst auch 1 eine Primzahl wäre und das wollen wir nicht.

Wir wollen nun das letzte Lemma mittels eines *Widerspruchbeweises* zeigen. Das bedeutet: Wenn wir zeigen wollen, dass Aussage $A$ wahr ist, indem wir zeigen, dass $\neg A$ falsch ist (Denn dann ist $A = \neg(\neg A)$ wahr). Dies machen wir wiederrum, indem wir erst einmal annehmen, dass $\neg A$ doch wahr ist und machen davon ausgehend solange (richtige) logische Schlussfolgerungen, bis wir auf etwas stoßen, von dem wir wissen, dass es falsch ist. Das darf nicht sein, deshalb musste unsere Annahme falsch sein und $\neg A$ ist doch falsch.

*Beweis von Lemma 3.6.* Um einen Widerspruchbeweis zu führen, nehmen wir an, dass die Negation der zu zeigenden Aussage wahr ist. Wir nehmen also an, dass es nur endlich viele Primzahlen gibt. Wenn es nur endlich viele gibt, können wir die aufzählen. Sagen wir $p_1, \ldots, p_k$ für eine natürliche Zahl $k$ seien alle Primzahlen, die es gibt. Dann

bilden wir die natürliche Zahl $m = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k + 1$. Nun ist $m$ größer als jede dieser Primzahlen $p_i$. Damit darf $m$ keine Primzahl sein, da wir mit den $p_i$ ja schon alle hatten. Allerdings teilt auch keines der $p_i$ für $i = 1, \ldots k$ die Zahl $m$, da $p_i$ schon $p_1 \cdot \ldots \cdot p_k$ teilt und damit nach Lemma 3.6 auch $m - p_1 \cdot \ldots \cdot p_k = 1$ durch $p_i$ teilbar sein müsste. 1 ist aber nur durch 1 teilbar.
Da aber $m$ keine Primzahl ist, muss es eine natürliche Zahl $\ell$ mit $1 < \ell < m$ geben, die $m$ teilt. Ist $\ell$ selbst eine Primzahl, haben wir einen Widerspruch gefunden, da $\ell$ keines der $p_i$ sein kann. Ist $\ell$ selbst keine Primzahl, hat $\ell$ wiederum einen Teiler $\ell_1$ mit $1 < \ell < \ell_1 < m$. Wie wir uns auf Seite 10 überlegen sollten, ist dann $\ell_1$ auch ein Teiler von $m$. Ist nun $\ell_1$ eine Primzahl, kriegen wir den gleichen Widerspruch wie eben. Ansonsten führen wir das fort und erhalten einen Teiler $\ell_2$ von $\ell_1$ und damit von $m$ mit $1 < \ell_2 < \ell_1 < m$. Da es nur endliche viele natürliche Zahlen zwischen 1 und $m$ gibt, kann das nicht unendlich oft so weitergehen, sondern irgendwann haben wir einen Teiler $\ell_j$ von $m$ gefunden, der eine neue Primzahl ist. Damit haben wir unseren Widerspruch. Die ursprüngliche Annahme war also falsch, und somit ist das Lemma gezeigt. □

# 4 Zwei-Personen-Spiele

**Tag 3**

Wir wollen uns einige einfache Beispiele von Zwei-Personen-Spielen. Allgemein sind Beispiele für Zwei-Personen-Spiele Go, Schach, Dame, Mühle, Halma und Nim.

Viele Spiele, darunter Mühle und Vier gewinnt, sind mittlerweile vollständig gelöst und die entsprechenden Strategien sind bekannt. D.h. es ist klar, ob ein Spieler bei 'richtigem Spiel' immer gewinnen oder zumindest immer ein unentschieden erreichen kann, egal was der Gegner tut. Im Prinzip sind das damit langweilige Spiele.

Man kann diese Spiele lösen, in dem man systematisch alle Möglichkeiten durchgeht und weiß in endlicher Zeit, was alles passieren kann. Das stimmt abstrakt auch für Go und Schach, nur ist das so komplex, dass es viel zu lange dauern würde und deshalb nicht praktikabel ist. Wir schauen uns hier nur Spiele an, die nicht so komplex sind.

Wenn man 'nur' systematisch durchprobieren muss und es als Problem an sich langweilig und irrelevant ist, warum machen wir es hier trotzdem und was hat das mit Mathematik zu tun?

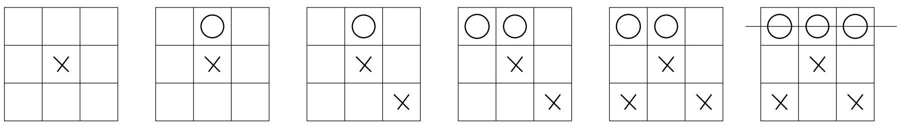
Der Punkt ist, man kann daran erst einmal überhaupt systematisches Analysieren lernen. Aber dann sollte nicht Schluss sein. Dann fängt der Spaß erst an. Man versucht Gesetzmäßigkeiten zu erkennen, die man dann auch hoffentlich nutzen kann, wenn sich die Ausgangssituation des Spieles ein wenig oder auch mehr ändert.

Das ist auch etwas, was wir allgemein in der Mathematik oft machen. Systematisch Probieren und Analysieren um Gesetzmäßigkeiten zu finden. Wenn das Ausgangsproblem zu groß ist, kleinere Teilprobleme/Beispiele untersuchen, ...

Wir wollen einiges davon mal an zwei Beispielen sehen. Wir beginnen mit einem einfachen sehr bekannten Beispiel:

## 4.1 Tic-Tac-Toe

Tic-Tac-Toe ist ein kleines Spiel für zwei Personen. Auf einem $3 \times 3$ Felder großen Spielfeld machen die beiden Spieler abwechselnd ihre Zeichen (ein Spieler Kreuze, der andere Kreise) in ein noch freies Quadrat. Der Spieler, der als erstes drei seiner Zeichen in eine Reihe, Spalte oder eine der beiden Diagonalen setzen kann, gewinnt. Sind alle Quadrate besetzt, ohne dass ein Spieler gewonnen hat, endet das Spiel unentschieden. Ein mögliches Spiel wäre z.B.



In dem Beispiel hat der zweite Spieler gewonnen.

Ist das immer so, kann der zweite den Sieg immer erzwingen? Oder der erste? Die Lösung wird sein, dass der erste Spieler immer mindestens ein Unentschieden erwingen kann. Doch wie kann der erste Spieler spielen, damit (egal was der zweite Spieler macht) er nie verliert, er also immer ein Unentschieden oder einen Sieg erreicht. Wir brauchen eine Strategie.

**Was ist eine Strategie?** Wenn die Aufgabe darin besteht, eine Strategie für einen Spieler in einem Zwei-Personen-Spiel anzugeben, muss man einen Plan angeben, wie der Spieler in jeder denkbaren Spielsituation reagieren soll. Also egal, was der andere Spieler macht, soll die Strategie, also der Plan, eine Handlungsanweisung geben.

Man kann sich das so vorstellen, als ob der Spieler ein Roboter wäre, dem man detailliert erklären muss, was er in welcher Situation zu tun hat. Aussagen wie: „Falls der Gegner ... macht, dann antworte so, dass der Gegner nicht gewinnen kann.“ wären da nur wenig hilfreich, da der Roboter ja nur stumpfsinnig das ausführen kann, was der Plan/ die Strategie ihm vorschreibt. Man muss da schon konkret werden, z.B.: „Falls der Gegner ... macht, dann bewege dich einen Schritt vor.“

**Was, wenn es mehrere Wege zum Ziel gibt?** Im Allgemeinen gibt es nicht nur eine mögliche Strategie – also in unserem Fall nicht nur eine Strategie ein Unentschieden zu erreichen. Aber es reicht, eine anzugeben. Das ist, als wenn uns einmal jemand nach dem Weg zum Bahnhof fragt. Da geben wir ja auch nicht alle möglichen Wege an, einer reicht ja. Prinzipiell wäre es dann auch richtig den Fragenden einen Weg zu beschreiben, der über den Nordpol führt (auch wenn das in der Praxis nicht zu empfehlen ist!).

Natürlich ist es nicht falsch, mehrere mögliche Strategien anzugeben. Dabei muss aber sehr gut aufgepasst werden. Schreibt man nämlich z.B. Setze links oder rechts vom Gegner. Dann heißt das, dass jede der beiden Möglichkeiten richtig sein muss. Der Roboter hat ja keine Zusatzinformationen, um zu entscheiden, welche dieser beiden Möglichkeiten er wann zu wählen hat. Er wählt zufällig eine aus. Es ist also komplizierter eine Strategie so anzugeben, da man mehr überprüfen muss und dann auch wirklich zeigen muss, dass egal welche Möglichkeit der Roboter zufällig auswählt, die Strategie immer zum Ziel führt. Das ist im Zweifel aufwändiger und fehleranfälliger. Kann aber natürlich trotzdem richtig werden.

**Lösung zum Tic Tac Toe:** (Wie oben erwähnt, ist das nur eine mögliche Lösung. Sie können eine andere richtige Lösung gefunden haben.) Das soll erst einmal ein Beispiel dafür sein, wie man eine Strategie angeben kann. Wir verraten hier gerade noch nicht, wie wir darauf gekommen sind.

1.Zug: Setze ein Kreuz in das mittlere Feld.
Jetzt hat der Gegner noch 8 Möglichkeiten zu setzen. Aber für die Strategie sind z.B. alle Eckfelder gleich, da man das Brett ja immer drehen kann und dann mit der Strategie für ein anderes Eckfeld fortfahren kann[1]. Es reicht also eine Strategie für ein bestimmtes Eckfeld anzugeben, sagen wir das Eckfeld links oben. Genauso können die anderen 4 Nicht-Eckfelder gleich behandelt werden.

- Fall 1 Der Gegner setzt in das obere linke Eckfeld. Dann setzen wir ins untere linke Eckfeld.
  - 1-1 Der Gegner setzt seinen zweiten Zug nicht ins obere rechte Eckfeld. Dann setzen wir ins obere rechte Eckfeld. Sieg!
  - 1-2 Der Gegner setzt seinen zweiten Zug ins obere rechte Eckfeld. Setze ins mittlere Feld der oberen Zeile.
    - 1-2-1 Der Gegner setzt seinen dritten Zug nicht ins untere mittlere Feld. Dann setzen wir dorthin. Sieg!
    - 1-2-2 Der Gegner setzt seinen dritten Zug ins untere mittlere Feld. Wir setzen ins untere rechte Feld. Nun ist in jeder Zeile oder Spalte oder Diagonale mindestens ein Kreuz. Damit kann der Gegner nicht mehr gewinnen und es gibt mindestens ein Unentschieden.[2]
- Fall 2 Der Gegner setzt in das obere mittlere Feld. Dann setzen wir ins obere linke Eckfeld.
  - 2-1 Der Gegner setzt seinen zweiten Zug nicht ins untere rechte Eckfeld. Dann setzen wir dorthin. Sieg!
  - 2-2 Der Gegner setzt seinen zweiten Zug ins untere rechte Eckfeld. Wir setzen ins untere linke Eckfeld.
    - 2-1-1 Der Gegner setzt seinen dritten Zug nicht ins linke mittlere Feld. Dann setzen wir dorthin. Sieg!
    - 2-1-2 Der Gegner setzt seinen dritten Zug ins linke mittlere Feld. Wir setzen in das obere rechte Eckfeld. Sieg!

Damit haben wir für jeden möglichen Zug des Gegners eine Antwort parat und egal, welche Züge der Gegner macht, erreichen wir immer mindestens ein Unentschieden.

Schauen wir uns noch einmal an zwei der vorkommenden Argumente/Techniken, neben dem 'Systematischen Probieren', genauer an (Sie gehören zu den kleinen blauen Zahlen in der Strategie):

- 1 - 'Symmetrieargumente': Das Tic-Tac-Toe Brett hat einige Symmetrien. Z.B. überführt eine Drehung um 90° das Brett in sich selbst. Wir haben ausgenutzt, dass wenn wir eine Strategie für 'der Gegner setzt auf oben links', damit auch eine Strategie haben, wenn der Gegner rechts oben setzt.

  Natürlich wären hier Symmetrieargumente nicht nötig gewesen, wir hätten einfach jeden Fall einzeln diskutieren und viermal so viel schreiben können.

- 2 - 'Rückwärtsarbeiten': Auch hier hätten wir jede einzelne Möglichkeit bis zum bitteren Ende (Unentschieden oder Sieg) aufzählen können. Doch hier wird abgekürzt, indem man sich überlegt, wo man eigentlich hin will. Ziel ist Unentschieden oder Sieg, also insbesondere der Gegner gewinnt nicht. Man überlegt sich also, was sind Situationen, wo klar ist, dass man dieses Ziel erreicht hat und versucht im nächsten Schritt ein solche Situation zu erzwingen. Hier ist es: Wenn in jeder Reihe, Spalte und Diagonale min. ein Kreuz ist, kann der Gegner nicht mehr gewinnen.

  Rückwärtsarbeiten wird oft in Kombination mit anderen Techniken genutzt und kann z.B. dabei helfen überhaupt erst einmal eine Idee zur Lösungsfinden zu bekommen.

**Wie kann man auf diese Strategie kommen?** Ehrlich gesagt, ist es bei Tic-Tac-Toe relativ schwierig, keine Strategie zu finden, solange man die Fälle systematisch durchprobiert, den zweiten (blauen) Punkt von oben erkannt hat und nicht grob was übersieht. Das liegt hier aber nur daran, dass bei diesem Spiel 'fast alles funktioniert'. Zum Beispiel ist es egal, welchen Zug der erste Spieler macht. Er kann danach, unabhängig davon, was der zweite Spieler macht noch immer ein unentschieden erreichen.

Warum habe ich mit der Mitte als ersten Zug angefangen? Einfach aus Faulheit. Wenn der erste Spieler die Mitte wählt, sind es für den zweiten Spieler (unter Beachtung des obigen Symmetrieargumentes nur noch zwei mögliche Züge). Bei allen anderen ersten Züges sind es mehr Möglichkeiten für den zweiten Spieler.

**Zum Selberdenken:** Wäre der erste Zug oben links, wie viele Möglichkeiten für den Gegner gibt es dann (unter Berücksichtigung von Symmetrien wie oben in 1)?

Im Allgemeinen muss man sich natürlich mehr anstrengen um eine Strategie zu finden:

## 4.2 Nim-Spiele

Nim-Spiele sind Zwei-Personen-Spiele mit einer Menge von Stäbchen, oft angeordnet auf verschiedenen Haufen, wo jeder Spieler nach gewissen Regeln einige Stäbchen entfernen darf. Gewonnen hat i.A. der Spieler, der das letzte Stäbchen nimmt.

Wir schauen uns eine einfache Variante mit nur einem Haufen an (für andere Varianten s. Übung):

Gustav und Helga spielen ein kleines Spiel. Sie haben 20 Stäbchen auf dem Tisch liegen. Ist ein Spieler am Zug, so kann er wählen, ob er 1, 2, 3 oder 4 Stäbchen vom Tisch nimmt. Gezogen wird abwechselnd. Gewonnen hat der Spieler, der die letzten Stäbchen vom Tisch nimmt. Gustav beginnt. Kann Helga durch cleveres Spiel immer einen Sieg erreichen? Wenn ja, wie? Wie sieht es bei 21, 22 Stäbchen aus?

Auch hier stellt sich die gleichen Frage wie beim Tic-Tac-Toe: Hat einer der Spiele eine Strategie, seinen Sieg oder zumindest ein Unentschieden* zu erwingen?

Auch hier könnte man alle möglichen Züge systematisch durchprobieren und würde nach ein bisschen Arbeit zum Ziel kommen. Das funktioniert, ist aber nicht unbedingt die beste Idee. Dann müssten wir für die zweite Frage mit den 21 Stäbchen noch mal genau gleiche machen. Spätestens beim dritten Mal sollte man sich dann fragen, ob man sich einen anderen Weg zur Lösung finden kann, der uns noch auch bei der nächsten Änderung der Stäbchenzahl noch hilft. Allgemein gilt: Systematisches Durchprobieren ist eine valide Technik mit der man zumindest in endlichen nicht zu komplexen Situationen erst einmal durchkommt, aber dabei sollte man die Augen offen halten, ob man allgemeine Gesetzmäßigkeiten erkennt. Diese muss es nicht unbedingt geben. Aber es ist oft so, dass man an vielen Beispielen, Eigenschaften eines Problems errät/erkennt und dann durch einen Beweis zeigt, dass diese wirklich allgemein gelten.

Eine oft vorkommende Technik ist es, erst einmal ein einfacheres/kleineres Problem zu betrachten und zu beobachten, ob man daran schon was sieht. Hier würde ich mit weniger Stäbchen beginnen, denn dann gibt es weniger Fälle zu testen.

Der einfachste Fall wäre hier: Es gibt nur 1-4 Stäbchen. Dann kann der Spieler einfach alle nehmen und gewinnt. So etwas nennen wir eine Gewinnposition – egal was der andere Spieler macht (hier kommt gar nicht erst dran), hat der Spieler eine Strategie auf alle Fälle zu gewinnen (nämlich einfach alle Stäbchen nehmen). Nächster Fall wären 5 Stäbchen. Da sehen wir, egal ob der Spieler 1, 2, 3 oder 4 Stäbchen, lässt er dem zweiten Spieler eine der vorherigen Gewinnpositionen übrig. D.h. (wenn der Gegner) richtig spielt, verliert man bei 5 Stäbchen. Was heißt das für 6 Stäbchen? Um hier zu gewinnen, müssen wir dafür sorgen, dass nach unserem Zug, der Gegner in keiner Gewinnposition ist. Wir wollen also nur ein Stäbchen wegnehmen. Dann verliert der Gegner, d.h. wir gewinnen (bei richtigem Spiel). Gleiches funktioniert bei $7, 8, 9$ Stäbchen. Auch hier kann man so ziehen, dass der Gegner bei 5 landet.

Allgemein nennen wir eine Anzahl von Stäbchen, bei der der Spieler der am Zug ist, gewinnen kann, *Gewinnposition*. Eine Zahl, bei der er bei richtigem Spiel des Gegners nicht gewinnen kann, als *Verlustposition*. Eine Zahl ist eine Gewinnposition, wenn es einen Zug gibt, der den Gegner auf eine Verlustposition führt.

**Zum Selberdenken:** Wie kann man auf ähnliche Weise eine Verlustposition charakterisieren?

Bis jetzt haben wir also gesehen, dass $1 - 4, 6 - 9$ Gewinnpositionen sind, 5 jedoch eine Verlustposition ist. Machen wir genau so weiter, sehen wir, dass auch 10 und später 15 Verlustpositionen sind und die Zahlen dazwischen Gewinnpositionen. Es scheint so, dass jede Zahl, die durch 5 teilbar ist, eine Verlustposition ist und die anderen

*Unentschieden gibt es hier nicht. Irgendeiner muss mal das letzte Stäbchen nehmen und gewinnen.

Gewinnpositionen sind. Doch ist das wirklich so? Dazu müssen wir für ein allgemeine Anzahl von Stäbchen eine Strategie angeben.

**Lösung:** Seien $n$ Stäbchen auf dem Haufen und sei $n$ durch 5 teilbar. Der zweite Spieler (hier Helga) kann mit folgender Strategie gewinnen: Zieht Gustav $x$ Stäbchen, zieht sie $5 - x$ Stäbchen. Dann wurden in diesen zwei Zügen insgesamt 5 Stäbchen gezogen. Damit liegt vor Gustav nun ein kleinerer Haufen, aber die Stäbchenanzahl ist noch immer durch 5 teilbar. Das machen wir so lange, bis nur noch 5 Stäbchen vor Gustav liegen und mit dem gleichen Plan nimmt nun Helga die letzten Stäbchen.

War das $n$ am Anfang nicht durch 5 teilbar, dann kann Gustav den Sieg immer erzwingen: Bei Division durch 5 lasse $n$ den Rest $k$. Der muss nun 1, 2, 3 oder 4 sein. Indem Gustav im ersten Schritt $k$ Stäbchen entfernt, ist nun Helga in der Situation, dass die Anzahl der Stäbchen durch 5 teilbar ist und somit auf einer Verlustposition ist.

**Zum Selberdenken:** Was ändert sich, wenn es erlaubt wäre, $1, 2, \ldots, 6$ Stäbchen in jedem Zug wegzunehmen?

## 5 Lösen, Aufschreiben und Fehler machen...

Wenn man dann zu den ersten Vorlesungen (und auch später), dann Übungsaufgaben lösen soll, wird man oft froh sein, wenn man überhaupt was 'herausbekommt'. Dann freut man sich erst einmal und das ist auch gut so. Allerdings darf man die Arbeit danach nicht unterschätzen. Dann soll man die Lösung/den Beweis aufschreiben und zwar derart, dass a) es richtig ist und b) es verständlich ist. Im Idealfall muss jemand den Beweis und die Lösung verstehen können ohne das er/sie vorher schon musste, wie es geht. **Tag 4**

Das ist gar nicht so einfach, wenn man es das erste Mal macht. Dabei soll Ihnen im Studium helfen, dass die Tutoren ihre Lösungen korrigieren und viele Anmerkungen machen, woran Sie sehen können, was bei nächsten Mal besser geht. Aber es hilft auch sich mal gerne auch falsche Lösungen und Beweise anderer anzusehen. Sich dann daran zu überlegen, was richtig ist, was verständlich ist, was anders besser wäre etc. und dann zu versuchen, bei der nächsten eigenen Lösung umzusetzen.

Ganz typische und sehr einfach zu behebende 'Fehler' sind:

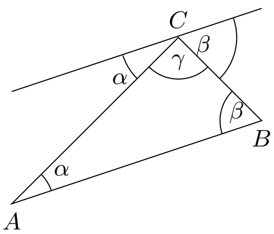
- Man führt die Abkürzungen/Formelzeichen nicht ein, die man benutzt. Also sagt nicht, wofür diese stehen.
- Doppelbezeichnungen (siehe zweite Fußnote auf Seite 10)
- Man schreibt generell zu wenig Text/Erklärungen. Keine vollständigen Sätze (fordert Missverständnisse)
- Man benutzt, dass was man eigentlich zeigen soll (Das ist gravierend falsch, während man bei den Punkten noch auf Ungenauigkeit plädieren kann).

Da der Mensch zum Glück vergesslich ist, reicht es oft auch, sich die eigenen Lösungen von vor zwei Wochen noch mal anzuschauen und zu sehen, ob man noch versteht, was man damals meinte. Wenn nicht, hätte man vielleicht doch mehr erklären sollen...

Wir wollen uns nun mal hier und in den Übungen ein paar Beispiellösungen/-beweise anschauen und sehen, ob sie stimmen und/oder was man ggf. besser machen könnte.

Als erstes schauen wir uns einen Beweis der Aussage an: Die Innenwinkelsumme in einem Dreieck ist 180°.

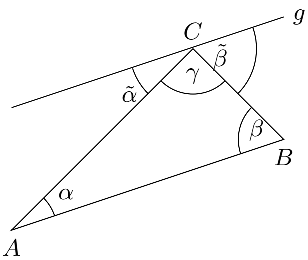
**'Beispielbeweis':**




$\alpha + \beta + \gamma = 180°$

Wenn man versteht, was mit der Autor damit sagen will, kommt man wahrscheinlich darauf, dass das richtig ist. Ist aber als Leser gar nicht meine Aufgabe - ist hier schließlich keine Kunstinterpretation! Der Autor muss das so darlegen, dass ich das möglichst problemlos verstehen kann. D.h. er/sie muss mir sagen, was gemacht wird und warum das richtig ist. Hier könnte das wie folgt aussehen:

*Beweis.* Das Dreieck sei $ABC$ und $\alpha, \beta$ bzw. $\gamma$ seien dessen Innenwinkel in $A$, $B$ bzw. $C$. Sei $g$ die Parallele zur Geraden durch $A$ und $B$, welche durch $C$ geht. Außerdem seien $\tilde{\alpha}$ und $\tilde{\beta}$ die Winkel wie im Bild.




Dann ist $\alpha = \tilde{\alpha}$, da es sich um Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen handelt. Genauso ist $\beta = \tilde{\beta}$. Da $\tilde{\alpha}$, $\gamma$ und $\tilde{\beta}$ zusammen den gestreckten Winkel bei $C$ bilden, gilt damit

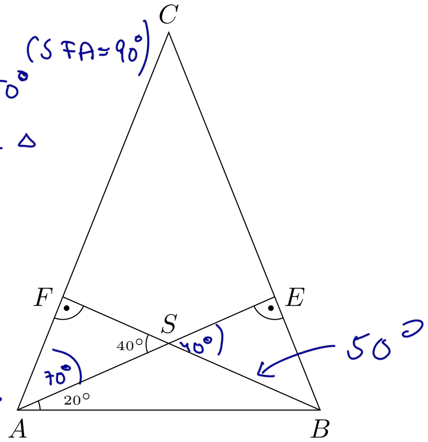
$$180° = \tilde{\alpha} + \gamma + \tilde{\beta} = \alpha + \gamma + \beta. \qquad \square$$

Als ein anderes Beispiel schauen wir uns die folgende Aufgabe an:

Im Dreieck $ABC$ schneiden sich die Höhen $AE$ und $BF$ im Punkt $S$. Es ist $\sphericalangle FSA = 40°$ und $\sphericalangle SAB = 20°$. Beweisen Sie, dass das Dreieck $ABC$ gleichschenklig ist.

Sie war eine Aufgabe in der TIMSS-Studie, und die folgenden drei Lösungen sollen wohl wirklich von Schüler erbracht worden seien:

**Beispiel – Schülerlösung 1**




- Da ∢ FSA = 40° ist ∢ FAS = 50°
  (⇒ Winkelsumme in einem Δ = 180°)
- Dies gilt auf Grund der Symmetrie auch für das Δ SEB.
- Hieraus ist zu folgen, dass ∢ FAB = 70° und ∢ ABE = 70°.
- Da diese Winkel gleich sind, muss es sich hier um ein gleichschenklig ist.

- Generell ein *falscher Beweis*: Im dritten Schritt wird schon, dass was zu zeigen ist, angenommen. Wahrscheinlich bezieht sich das 'Hieraus ist zu folgen', darauf, dass angenommen wird, dass das Dreieck symmetrisch bzgl. einer Achse durch $C$ ist. Wir daber nicht klar. Doch dann wäre es ein klassischer Zirkelschluss.

Zu den einzelnen Schritten:

- $\sphericalangle FAS = 50°$ ist richtig. Argumentation ist nicht gut: $\Longrightarrow$ wird in die falsche Richtung benutzt. Es sollte heißen: Da die Winkelsumme in einem Dreieck 180° ist und $\sphericalangle FSA = 40°$ ist und der Winkel $\sphericalangle SFA$ ein rechter ist, ist $\sphericalangle FAS = 50°$.

- Hier ist nicht klar, welche Symmetrie hier vorliegen soll. Verwendet man vielleicht schon, dass das Dreieck gleichschenklig ist. Besser: $\sphericalangle ESB = 40°$, da er Scheitelwinkel von $\sphericalangle FSA$ ist. Damit haben wir in Dreieck ESB die gleiche Situation wie in Dreieck SEB und erhalten $\sphericalangle SEB = 50°$.

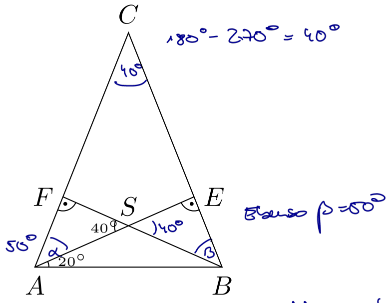
- Zum dritten Schritt s. oben.

- Hätte man gezeigt, dass $\sphericalangle FAB = \sphericalangle ABE$ ist, stimmt der vierte Schritt.

Ansonsten ist de 70° Winkel bei A schlecht/falsch eingezeichnet.

**Beispiel – Schülerlösung 2**

Die Winkelsumme
· Winkel in einem $\Delta$
+ 180°
= 180° − 90° − 40°
= 50°




Da behauptet wird, dass das $\Delta$ ABC gleichschenklig ist, benutzen wir diese Behauptung als Voraussetzung.
$\Rightarrow$ Der Winkel $S\overline{E}B$ = 40°
Da der Winkel in A (= 70°) gleich ist mit dem Winkel in B (= 70°), ist der Abstand von $\overline{AC}$ gleich dem Abstand von $\overline{BC}$. Das Dreieck ist gleichschenklig.

Generell ein *falscher Beweis*: 'Da behauptet wird, dass das $\Delta ABC$ gleichschenklig ist, benutzen wir diese Behauptung als Voraussetzung.' geht natürlich nicht. Man kann nicht mit der zu beweisenden Aussage anfangen. Aber vielleicht ist das hier nur falsch formuliert und der Schüler benutzt das gar nicht? Der nächste Satz fängt zwar mit ' $\Longrightarrow$ ' an, ist aber gar keine Folgerung aus dem vorhergehenden. Die richtige Begründung wäre Scheitelwinkel zu $\sphericalangle FSA$.

Aber im nächsten Satz wird die Voraussetzung benutzt, um zu sagen, dass der Winkel bei $A$ gleich dem Winkel bei $B$ ist. Das heißt, es ist wirklich ein falscher Beweis.

Das der Winkel bei A wirklich 70° wird prinzipiell oben links gezeigt – auch wenn es nicht gut aufgeschrieben ist. Das erste Gleichheitszeichen bedeutet eigentlich, dass das hinter dem Gleichheitszeichen gleich dem darüber sein müsste, also 180°. Das ist nicht richtig. Was hier einfach fehlt ist das $\alpha$ (s. Skizze) vor dem Gleichheitszeichen, damit man weiss, was hier eigentlich ausgerechnet wird.

**Beispiel – Schülerlösung 3**

$\overline{AC} = \overline{CB}$

$\sphericalangle CBA = \sphericalangle BAC$ ✓ (70°)

Da die beiden Winkel der Grundseite $\overline{AB}$ gleich sind, müssen auch die Strecken $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$ gleich sein.

Pythagoras:

$\overline{AD}^2 + \overline{DC}^2 = \overline{AC}^2$

$\overline{BD}^2 + \overline{DC}^2 = \overline{AB}^2$

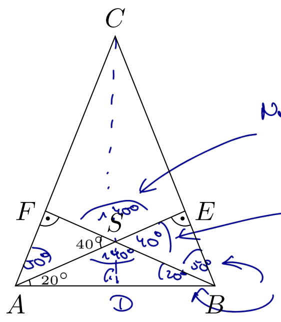
da $AD^2 = BD^2$ (Seitenhalbierende)

ist $AC^2 = BC^2$

da Länge positiv sind

$AC = BC$

⇒ gleichschenklig




Nebenwinkel zusammen 180°

Scheitelwinkel sind gleich.

Winkelsumme im Dreieck 180°

Wenn man sich das richtige rauspickt und den Rest ignoriert, ist es richtig.

Schauen wir genauer hin. Die ersten vier Zeilen, sehen eigentlich erst einmal nicht gut aus. Es sieht so aus, als ob hier wieder das verwendet wird, was in Wirklichkeit gezeigt werden soll. Das wäre schlecht. Wenn man das wohlwollend interpretiert, kann man sagen, dass das eigentlich bedeuten soll:

*Es ist $\overline{AC} = \overline{CB}$ zu zeigen. Dazu zeigen wir, dass $\sphericalangle CBA = \sphericalangle BAC$ gilt. Denn wenn diese beiden Winkel gleich sind, müssen die Strecken $\overline{AC}$ und $\overline{CB}$ gleich sein und wir wären fertig.*

Dann wäre das eine Einstimmung des Lesers darauf, was gleich passieren soll. Steht da aber nicht.

Schauen wir nun links vom Dreieck. Da steht was von Pythagoras. Der Punkt $D$ taucht nur im Bild auf und mit dem rechte Winkel zeichen, suggeriert das, dass $\overline{CD}$ wahrscheinlich die Höhe sein soll. Dann sollte man das einfach auch hinschreiben. Dann stimmt die Anwendung des Pythagoras auf die beiden entstandenen rechtwinkligen Dreiecke. (Wird am Ende nicht helfen, wäre aber als einzelnes Argument aber richtig. Die nächste Zeile 'Da $AD^2 = BD^2$ (Seitenhalbierende), ist...' scheint sagen zu wollen, dass $AD^2 = BD^2$ ist, weil $\overline{CD}$ Seitenhalbierende ist. Aber wir hatten $\overline{CD}$ als Höhe eingeführt und die ist nur dann gleich der Seitenhalbierenden, wenn das Dreieck schon gleichschenklig ist. D.h. hier benutzt man (versteckt) schon die Behauptung. Ist also falsch! Der Teil links vom Dreieck ist also falsch, da schon benutzt wird, was zu zeigen ist.

Bleiben die Stichpunkte rechts vom Bild. Das ist richtig, wenn man es in der richtigen Reihenfolge liest und mehr Text schreibt:

*Der Winkel* $\sphericalangle ESB$ *ist Scheitelwinkel zu* $\sphericalangle FSA$ *und damit auch* $40°$*. Der Winkel* $\sphericalangle ASB$ *ist Nebenwinkel zu* $\sphericalangle FSA$*. Da sich Nebenwinkel zu* $180°$ *addieren, ist* $\sphericalangle ASB = 140°$*. Benutzen wir in den Dreiecken* $FSA$*,* $ESB$ *und* $ASB$ *jeweils, dass die Innenwinkelsumme* $180°$ *sein muss, erhalten wir* $\sphericalangle FAS = 50°$*,* $\sphericalangle ESB = 50°$ *und* $\sphericalangle ABS = 20°$*. Damit ist* $\sphericalangle FAB = 50° + 20° = \sphericalangle CBA$*.*

Die schräggedruckten Passagen ergeben insgesamt den richtigen (und ausformulierten) Teil dieser Lösung.

Strenggenommen haben wir also drei falsche Lösungen gesehen, wobei man aus der dritten aber 'noch was machen konnte'.

An sich ist 'Fehler machen' kein Problem. Es ist sogar wichtig und hilfreich, so lange man die Fehler erkennt, sich überlegt was falsch gelaufen ist, es beim nächsten Mal besser macht und somit insgesamt weniger Fehler macht.

Die einzige Möglichkeit nie Fehler zu machen, ist es, einfach nie irgendwas zu machen. Aber in Wirklichkeit ist das der größte Fehler.

Das Wichtigste ist dran bleiben! Mit der Zeit wird es besser.

# 6 Vorgeschmack auf die kommenden Wochen...

Als letztes wollen wir in diesem Vorkurs schon mal ein paar erste neue Begriffe und Konzepte sehen, die in den nächsten Wochen noch detaillierter auf Sie zukommen werden. **Tag 5**

## 6.1 Ein paar Notationen

Wir haben schon einige Male in diesem Kurs in Summen ... geschrieben. Z.B. bei der Dezimaldarstellung natürlicher Zahlen

$$x = a_m 10^m + a_{m-1} 10^{m-1} + \ldots + a_1 10 + a_0$$

Prinzipiell können aber bei so etwas Missverständnisse auftreten, und es ist besser jeden Summanden konkret anzugeben. Das ist aber schwierig, wenn nicht sofort klar ist, wie viele Summanden es sind (hier sind es $m + 1$ mit $m$ beliebig) oder wenn es sehr sehr viele Summanden sind. Dafür gibt es das *Summenzeichen*:

$$\sum_{k=i}^{j} b_k := b_i + b_{i+1} + \ldots + b_{j-1} + b_j.$$

Hierbei sind $i$ und $j$ natürliche Zahlen mit $i \leq j$ und $b_k$ reelle Zahlen.

Also z.B.

$$\sum_{k=1}^{5} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2$$

oder

$$\sum_{k=0}^{2} k^2(k+1) = 0^2(0+1) + 1^2(1+1) + 2^2(2+1).$$

Die Dezimaldarstellung von oben wäre dann

$$x = \sum_{k=0}^{m} a_k 10^k.$$

**Zum Selberdenken:**

- Berechnen Sie $\sum_{k=m}^{n} 2$ für $n \geq m$.
- Seien $a_0, \ldots, a_n$ relle Zahlen. Gilt $\sum_{i=0}^{n} a_i = \sum_{i=0}^{n} a_{n-i}$?

Ähnlich gibt es auch ein *Produktzeichen*:

$$\prod_{k=i}^{j} b_k := b_i \cdot b_{i+1} \cdot \ldots \cdot b_{j-1} \cdot b_j.$$

Hierbei sind $i$ und $j$ natürliche Zahlen mit $i \leq j$ und $b_k$ reelle Zahlen.

## 6.2 Induktionsbeweise

Wir schauen uns noch eine Beweistechnik an und das ist *vollständige Induktion.*

Prinzipiell soll man bei vollständiger Induktion normalerweise eine Aussage für alle natürliche Zahlen beweisen. Typisches Beispiel wäre:

Für alle natürlichen Zahlen $n$ gilt $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

Vollständige Induktion kommt von dem Aufbau der natürlichen Zahlen. Diese beginnen bei Null, jede natürliche Zahl außer Null hat einen Nachfolger und man kann jede natürliche Zahl erreichen, indem man nur oft genug Nachfolger bildet.

Z.B. ist 3 der Nachfolger vom Nachfolger vom Nachfolger von Null.

Das Verfahren der vollständigen Induktion geht nun wie folgt:

**Satz 6.1.** *Gegeben sei für jede natürliche Zahl $n$ eine Aussage $A(n)$. Es möge gelten:*

*1 (Induktionsanfang) $A(0)$ ist wahr.*

*2 (Induktionsschritt) Falls $A(n)$ wahr ist, ist auch $A(n+1)$ wahr.*

*Dann ist $A(n)$ für alle natürlichen Zahlen wahr.*

In unserem Beispiel von oben wäre $A(n)$ die Aussage $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$. Beweisen wir dies nun mittels vollständiger Induktion:

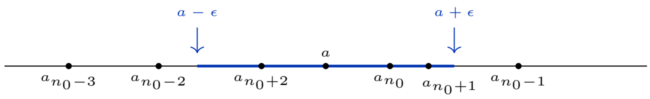



Abbildung 5: Wir sagen $a_n$ konvergiert gegen $a$ für $n$ gegen $\infty$, falls es für jedes $\epsilon > 0$ ein $n_0$ gibt (welches von $\epsilon$ abhängen wird), so dass ab $n_0$ alle Folgenglieder im blauen Intervall von $a - \epsilon$ bis $a + \epsilon$ liegen.

*Beweis.* Induktionsanfang: Für $n = 0$ ist die rechte Seite der zu zeigenden Gleichung gleich 0 und die linke ist $\sum_{i=0}^{0} i = 0$. Sie stimmen also überein und ist der Induktionsanfang gezeigt.

Induktionsschritt: Wir nehmen an, dass die Gleichung für $n = m$ stimmt und wollen nun die analoge Gleichung für $n = m + 1$ zeigen:

$$\sum_{i=0}^{m+1} i = \sum_{i=0}^{m} i + (m+1) = \frac{m(m+1)}{2} + (m+1) = \frac{(m+1)(m+2)}{2}.$$

Hier haben wir für das zweite Gleichheitszeichen die Voraussetzung des Induktionsschrittes verwendet (die Aussage für $n = m$). Das ist nun genau die Aussage für $n = m + 1$. Damit ist der Induktionsschritt bewiesen und nach dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt die Behauptung. $\square$

## 6.3 Grenzwerte

Wir wollen nun eine Idee davon bekommen, was Grenzwerte sind. Wir werden das nicht formal definieren, das kommt in Analysis 1 dann sowieso alles vor.

In der Schule macht man oft Kurvendiskussionen. Z.B. schaut man sich die Funktion $f(x) = \frac{1}{1+x}$ an. Dabei kommen oft Argumentate wie folgt vor: 'Wenn $x$ immer größer wird, wird $f(x)$ immer kleiner. Deshalb strebt die Funktion für $x$ gegen unendlich gegen 0.'

Das ist eigentlich schon ein Beispiel für einen Grenzwert (auch Limes genannt). Und ohne es hier genau zu definieren, geht es bei Grenzwerten immer um Folgendes: Irgendeine Variable (hier $x$) nähert sich einer Zahl oder $\pm\infty$ an nud wir untersuchen, was das für das Verhalten einer Funktion $f(x)$ bedeutet. Nähert sich $f(x)$ dann auch immer besser einer Zahl an, so nennen wir diese Zahl dann Grenzwert.

Im Bild sieht das z.B. wie in Abbildung 5 aus. Dort hat $n$ die Rolle von $x$ und ist keine beliebige reelle Zahl, sondern eine natürliche Zahl, und es wird $n$ gegen unendlich gehen. Eine Funktion $f$ auf den natürlichen Zahlen bezeichnen wir in der Mathematik oft als *Folge* und schreiben statt $f(n)$ oft $a_n$. Wir sagen $(a_n)_n$ ist eine Folge.

Zum Beispiel ist $a_n = \frac{1}{1+n}$ eine Folge und für $n$ gegen $\infty$ wird $a_n$ immer kleiner und nähert sich der Null an. Der Grenzwert wird hier Null sein. Das haben wir jetzt

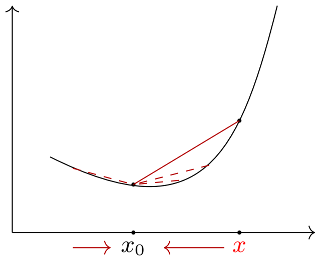



Abbildung 6: Die rote Gerade hat Anstieg $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

nicht formal bewiesen. Dazu müssten wir die Definition unter Abbildung 5 wirklich nachprüfen. Machen wir erst in Analysis 1.

Grenzwerte werden sehr sehr häufig vorkommen und implizit kamen sie in der Schule wahrscheinlich schon vor:

- Die Definition der Ableitung einer Funktion in einem Punkt ist die Frage ob ein Grenzwert existiert.

  In Abbildung 6 sieht man die Grundidee der Definition der Ableitung einer Funktion im Punkt $x_0$. Man betrachtet zu einem $x$, die durch $(x, f(x))$ und $(x_0, f(x_0))$ verlaufende Sekante. Diese hat den Anstieg $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Nennen wir diesen Ausdruck $h(x)$. Dann ist die Frage, ob die Funktion $f$ in $x_0$ eine Ableitung hat und wenn ja, wie große diese ist, gleich der Frage, ob der Grenzwert von $h(x)$ für $x$ gegen $x_0$ existiert und wie groß der ist.

  Anschaulich wird aus der Sekante in diesem Grenzwertprozess die Tangente an den Funktionsgraph im Punkt $(x_0, f(x_0))$. Die Frage, ob die Funktion eine Ableitung in $x_0$ hat, ist also gleichbedeutend mit der Frage, ob es eine (eindeutige) Tangente an den Funktionsgraph im Punkt $(x_0, f(x_0))$ gibt.

  Schauen wir uns das mal an zwei einfachen Beispielen an. Wir haben zwar den Grenzwert für $x$ gegen $x_0$ noch nicht genau definiert, aber hier kann man erraten, was der wohl im jeweiligen Fall sein wird, wenn alles richtig läuft.

  (i) Die Funktion $f(x) = x$ hat in $x_0$ die Ableitung $f'(x_0) = 1$, da

  $$h(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1$$

  und dann $h(x)$ für $x$ gegen $x_0$ sowieso konstant hat und damit sich insbesondere selbst als Grenzwert hat.

  (ii) Die Funktion $f(x) = x^2$ hat in $x_0$ die Ableitung $f'(x_0) = 2x_0$: Es ist

  $$h(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = x + x_0$$

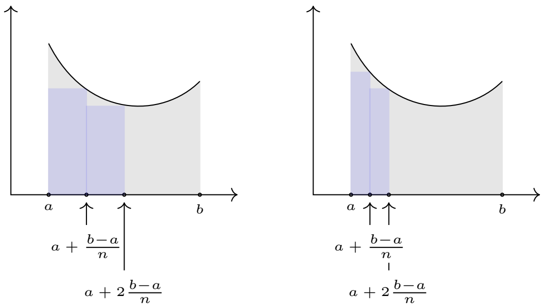



Abbildung 7: Hier sind die ersten Teilrechtecke für verschiedene $n$ gezeichnet.

und für $x$ gegen $x_0$ sollte $x+x_0$ gegen $2x_0$ streben (Wenn sich der Grenzwert so verhält, wie wir das erwarten würden. Das zeigen wir in der Analysis Vorlesung.).

(iii) Die Funktion $f(x) = |x|$ hat in $x_0 = 0$ keine Ableitung: Es ist

$$h(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0 \\ -1 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

Wenn wir uns hier der Null von 'rechts annähern', also durch positive $x$, dann würden wir erwarten, dass der Grenzwert 1 ist. Wenn wir uns der Null durch negative $x$ annähern, sollte der Grenzwert $-1$ eins. Es geht aber nicht beides, deshalb existiert hier die Ableitung in Null nicht. Anschaulich sieht man auch im Bild, dass es im Ursprung keine Tangente an die Funktion gibt.

- Die Definition des Integrals als Flächeninhalt unter einem Funktionsgraph (einer positiven Funktion) ist am Ende auch ein Grenzwert, weil man erst einmal definieren muss, was die Fläche unter dem Funktionsgraphen sein soll. Dazu nähert man die Fläche an, in dem man sie mit einer Menge immer kleineren Rechtecken pflastert, siehe Abbildung 7. Denn von Rechtecken wissen wir, was die Fläche ist.

  Nehmen wir man an, wir haben eine Funktion $f$ auf dem Intervall $[a, b]$ mit $f \geq 0$ und der Flächeninhalt unter der Funktion existiert (das muss nicht sein, führt hier aber zu weit), dann wäre dieser Flächeninhalt der Grenzwert der Folge

$$A_n := \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)\frac{b-a}{n}.$$

  Was macht diese Formel? Das Intervall $[a, b]$ wird in $n$ gleich große Teilintervalle zerlegt. Damit hat jedes Teilintervall die Länge $\frac{b-a}{n}$ und das 1 Teilintervall geht dann von $a$ bis $a + \frac{b-a}{n}$, das zweite von $a + \frac{b-a}{n}$ bis $a + 2\frac{b-a}{n}$ usw. Über jedem dieser Intervalle setzen wir nun ein Rechteck dessen Höhe dem Funktionswert von $f$ an der jeweiligen rechten Intervallgrenze entspricht . Damit hat das Rechteck über dem $k$.ten Teilintervall den Flächeninhalt $f(a+k\frac{b-a}{n})\frac{b-a}{n}$ und $A_n$ entspricht der Summe dieser Flächeninhalte.

Lassen wir nun $n$ gegen unendlich gehen, nähert sich die Fläche, die durch diese Rechtecke ausgefüllt wird (also $A_n$), immer mehr dem gesuchten Flächeninhalt an.

Schauen wir uns als Beispiel mal die Funktion $f(x) = x$ auf dem Intervall $[0, 1]$ an. Die Fläche, die der Funktionsgraph mit der $x$-Achse einschliesst, ist ein gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck mit Kathetenlänge 1. In der Schule haben wir gelernt, dass dies den Flächeninhalt $\frac{1}{2}$ hat. Wir wollen nun einmal schauen, ob wir darauf auch mit obigem Annäherungsprozess kommen:

Es ist hier $a = 0$ und $b = 1$ und $f(x) = x$, also

$$\begin{aligned} A_n &= \sum_{k=1}^{n} k\frac{1}{n}\frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k \\ &= \frac{n(n+1)}{2n^2} = .\frac{n^2+2n}{2n^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Hier haben wir im dritten Schritt die Formel aus dem Induktionsbeweis des letzten Abschnitts benutzt.

Geht nun $n$ gegen unendlich, geht $\frac{1}{n}$ gegen Null und damit $\frac{1}{2} + \frac{1}{n}$ gegen $\frac{1}{2}$. Der Flächeninhalt wäre also $\frac{1}{2}$, also genau das, was wir erwartet haben.