Vorkurs Mathematik für Mathematiker

Universität Freiburg, WS 24/25

Nadine Große

Skript - Version vom 25. August 2024

Wenn Sie (Tipp-)Fehler finden, bin ich dankbar, wenn Sie mir diese mitteilen.

Inhaltsverzeichnis

1 Worum geht es hier?

Was ist eigentlich ein Vorkurs? Oder was soll dieser Vorkurs eigentlich sein? Dieser Vorkurs richtet sich an Studierende der Mathematik und am einfachsten ist es erst einmal zu sagen, was dieser Vorkurs nicht ist und auch nicht sein soll. Es wird keine Wiederholung oder Auffrischung des Schulstoffes der letzten Jahre sein und auch keine Nachhilfeveranstaltung. Sondern Ziel ist es mal an ein paar Beispielen zu sehen, wie Mathematik so funktioniert und wie der Mathematiker so denkt und tickt. Da denken Sie jetzt vielleicht – ist ja jetzt nicht so, dass ich noch nie Mathematik gesehen habe. Das kam schließlich in der Schule seit der ersten Klasse dran. Das ist richtig und Schulmathematik und Mathematik an der Uni ist erst einmal schon dieselbe Mathematik. Am Ende ist noch immer $2 + 2 = 4$. Der Unterschied liegt darin, wie Mathematik betrieben wird und worauf der Fokus liegt. **Tag 1**

In der Schule geht es vor allem darum, überhaupt erst einmal rechnen zu lernen, zu lernen was gilt und was nicht, mit den Rechenwerkzeugen zu arbeiten, Algorithmen zu üben, ... Das ist natürlich alles gut und auch an der Uni noch wichtig, aber an der Uni geht es größtenteils darum: Warum sind Aussagen richtig? Wie finde ich überhaupt heraus, was richtig sein könnte?

In dem Sinne ist ein Mathematiker eine seltsame Spezies: Wenn jemand sagt 'xy gilt', dann sagt der Mathematiker nicht, 'Wird schon stimmen, derjenige ist schließlich Experte' (wie immer man das feststellen will), sondern die natürliche Reaktion ist 'Warum?'. Und dann muss das begründet werden bis alle Zweifel ausgeräumt sind. Das nennt man beweisen.

In diesem Vorkurs wollen wir uns ein bisschen diese Art des Denkens an Beispielen anschauen und die Hoffnung ist, dass Ihnen das den Einstieg ins Mathematikstudium etwas erleichtert. Was genau der Inhalt dieses Kurses ist, ist dabei gar nicht so wichtig. Wissen über die konkreten Inhalte dieses Vorkurs wird prinzipiell nicht beeinflussen, ob Sie das Mathematikstudium erfolgreich abschließen. Die Auswahl der konkreten Inhalte erfolgte hier nicht nach Wichtigkeit und/oder Relevanz, sondern eher nach: Wofür brauche ich möglichst wenig Vorwissen und kann trotzdem daran einige grundlegende Techniken schon mal zeigen?

Was mit diesen Techniken dann genau gezeigt wird, ist für diese Woche erst einmal irrelevant. In Wirklichkeit liegt die Bedeutung der Mathematik aber natürlich nicht darin, dass sie besonders formal irgendwelche unwichtigen Aussagen ableiten kann – das wäre eher Kunst ohne Publikum. Sondern darin, dass Mathematik einen fundamentalen Beitrag in vielen technischen Errungenschaften der Menschheit hat. Z.B. stecken in Wetterberichten, Fahrplänen und Computern viel fortgeschrittene Mathematik und mehr als nur 'ein bisschen Rechnen'. In diesem Lichte ist Inhalt und die Auswahl der Fragestellungen, mit denen man sich in der Mathematik beschäftigt, natürlich hoch relevant. Aber für diese Woche soll es uns erst einmal nicht interessieren.

Was allerdings von dem, was Sie hier im Vorkurs sehen, immer wieder eine Rolle spielen wird, ist: Logisch Argumentieren zu können. Deshalb machen wir im ersten Kapitel erst einmal ein paar Grundlagen zur logischen Argumentation – Aussagenlogik. Sogar eher auf eher formaler Ebene, damit wir es ein bisschen systematischer analysieren können.

Ich hoffe, es wird Ihnen ein bisschen Spaß und Lust auf das Studium machen. Viel Erfolg!

2 Aussagenlogik

In der Mathematik studieren wir Aussagen. Damit meinen wir immer Sätze, die entweder falsch oder wahr sind, z.B.

- 4 ist eine gerade Zahl.
- 2 ist eine ungerade Zahl.

Das sind beides Aussagen. Die erste ist wahr, die zweite ist falsch. Statt wahr und falsch, sagen wir auch oft, die Aussage gilt bzw. sie gilt nicht.

Dahingegen sind 'Juchhu!' oder 'Bring den Müll runter!' keine Aussagen (sondern Ausrufe bzw. Aufforderungen'), da sie weder wahr noch falsch sind.

I.A. ist es nicht leicht, von einer Aussage zu bestimmen, ob Sie wahr oder falsch ist. Selbst bei unserem Beispiel '4 ist eine gerade Zahl.' muss man erst einmal wissen, was eine gerade Zahl ist und dann überprüfen, ob 4 eine ist.

A	w	w	f	f
B	w	f	w	f
$A \wedge B$	w	f	f	f

Abbildung 1: Die ersten zwei Zeilen zeigen alle möglichen Kombinationen von wahr und falsch für die Aussagen A und B.

2.1 Logische Grundoperationen

Abstrakte Aussagen bezeichnen wir immer mit Buchstaben. Z.B. Aussage A. Wir können nun Aussagen verknüpfen und so neue Aussagen herstellen, deren Wahrheitsgehalt, dann davon abhängen wird, ob die Ausgangsaussagen wahr oder falsch waren und was genau die Verknüpfung ist. Ein Beispiel:

'Aussage A und Aussage B' ist wahr, wenn A und B beide wahr sind, ansonsten falsch.

Z.B. ist Aussage A '4 ist eine gerade Zahl' und Aussage B 'Heute ist Montag'. Dann wäre A und B: '4 ist eine gerade Zahl und heute ist Montag'. Da A definitiv wahr ist, hängt es davon ab, ob 'heute Montag' ist, ob A und B auch wahr ist.
Oft stellt man, die verschiedenen Fälle in sogenannten Wahrheitstafeln dar. Für die Und-Operation 'A und B' (wir schreiben auch kurz $A \wedge B$) wäre diese wie in Tabelle 1.

Ähnlich gibt es

'Aussage 'Nicht-A' (Negation von A, $\neg A$) ist wahr, falls A falsch ist und falsch, falls A wahr ist.

'Aussage A oder Aussage B' ($A \vee B$) ist wahr, wenn (mindestens)* eine der Aussagen A und B wahr ist, und ansonsten falsch.

Auch Sätzen wie 'Falls 4 eine gerade Zahl ist, dann ist 6 eine gerade Zahl' ordnen wir einen Wahrheitsgehalt, also wahr oder falsch zu.

'Falls Aussage 'A' gilt, dann gilt Aussage B' ($A \implies B$) ist wahr, falls A falsch, auch wahr, falls A und B beide wahr sind, und ansonsten immer falsch.

Das ist übersichtlicher, wenn man in die zugehörige Wahrheitstafel schaut. Das Beispiel 'Falls 4 eine gerade Zahl ist, dann ist 6 eine gerade Zahl' ist also eine wahre Aussage, weil 6 eine gerade Zahl ist. Das irritiert jetzt vielleicht ein bisschen, da es überhaupt nicht davon abhängt, ob die Aussage nach 'Falls', also hier '4 ist eine gerade Zahl', wahr oder falsch ist. Vom normalen Sprachgebrauch sind wir eigentlich gewöhnt, dass 'Falls A, dann B.' einen kausalen Zusammenhang suggeriert. Aber dass muss es nicht, auch wenn wir es in der Mathematik oft so nutzen, weil alles andere eher unnötig und

*Das mindestens sagen wir hier nur dazu, um zu unterstreichen, dass auch beide wahr sein könnten. Das ist aber auch schon so, wenn wir nur 'wenn eine der Aussagen wahr ist' schreiben würden. Denn sind zwei wahr, ist insbesondere eine wahr.

irreführend wäre. So wäre z.B. 'Falls die Erde würfelförmig ist, scheint jeden Tag die Sonne.' eine wahre Aussage – einfach, weil die Erde nicht würfelförmig ist. Dass die Aussage wahr ist, hat also überhaupt nichts damit zu tun, ob jemals die Sonne scheinen wird.

Im nächsten Beispiel haben wir allerdings einen solchen kausalen Zusammenhang:

'Falls m eine gerade Zahl ist, dann ist $m + 1$ eine ungerade Zahl.'

Hier ist 'm eine gerade Zahl' der Grund, warum $m + 1$ eine ungerade Zahl ist. Hier gilt in Wirklichkeit sogar mehr, nämlich:

'm ist genau dann eine gerade Zahl, wenn $m + 1$ eine ungerade Zahl ist.'

Das ist eine 'Genau-dann-wenn-Aussage':

'Aussage A gilt genau dann, wenn Aussage B gilt' ($A \Leftrightarrow B$) ist wahr, falls A und B beide wahr sind oder beide falsch sind, und ansonsten immer falsch.

Wir sagen alternativ auch: 'A ist äquivalent zu B'.

Genau-dann-wenn-Aussagen sind etwas, was wir im normalen Sprachgebrauch eher selten benutzen. Oft meinen Leute mit 'Falls A, dann B'-Aussagen leider in Wirklichkeit, genau-dann-wenn-Aussagen, also eigentlich: 'Falls A und nur dann, dann B' oder sogar 'Nur falls A gilt, dann könnte B gelten' (also sogar die ganz andere Richtung). Z.B. 'Wenn du dein Zimmer aufräumst, dann darfst du länger aufbleiben.' gibt strenggenommen eigentlich mit dem Zimmeraufräumen nur eine Möglichkeit an, länger aufzubleiben. Dieser Satz sagt nicht, dass es nicht auch einen anderen Weg gibt, länger aufzubleiben. Natürlich ist es nur ungünstig formuliert, eigentlich wollte man wahrscheinlich sagen: 'Nur wenn du dein Zimmer aufräumst, kannst du länger aufbleiben.' Aber es macht einen Riesenunterschied in der Bedeutung. Darauf muss man aufpassen!

Die Aussage 'Falls m und n gerade Zahlen sind, dann ist $m + n$ auch gerade' ist z.B. auch wahr. Aber 'm und n sind genau dann gerade Zahlen, wenn $m + n$ gerade ist' ist falsch, da aus $m + n$ gerade nicht folgt, dass m und n beide gerade sind, denn es können beide auch ungerade sein, z.B. $m = 3$, $n = 5$ und $m + n = 8$.

Diese ganzen logischen Grundoperationen kann man dann auf verschiedene Weise wieder miteinander verknüpfen:

Z.B. ist 'Nicht-(Nicht-A) (also die doppelte Negation von A) ist äquivalent zu A'. Mit Hilfe der Notationen von oben wäre das: $(\neg(\neg A)) \Leftrightarrow A$ ist eine wahre Aussage (d.h. es ist wahr unabhängig davon, ob die Aussagen A wahr ist). Um zu überprüfen, ob das wirklich stimmt, gehen wir die einzelnen Fälle des Wahrheitsgehaltes von A durch. Am leichtesten geht das in einer Wahrheitstafel, siehe Tabelle 3. Die Klammern werden als Vorfahrtsregeln genutzt, damit man weiß, was man zu erst ausführen soll – wie bei $(3 + 2) \cdot 5$ vs. $3 + (2 \cdot 5)$.

A	w	w	f	f
B	w	f	w	f
$A \wedge B$	w	f	f	f
$A \vee B$	w	w	w	f
$A \implies B$	w	f	w	w
$A \iff B$	w	f	f	w
$\neg A$	f	f	w	w

Abbildung 2: Übersicht über die Definitionen der einzelnen logischen Operationen in Form einer Wahrheitstafel.

A	$\neg A$	$\neg(\neg A)$	$(\neg(\neg A)) \Leftrightarrow A$
w	f	w	**w**
f	w	f	**w**

Abbildung 3: Für jeden Wahrheitsgehalt von A (also wahr oder falsch) prüfen wir nach, dass $(\neg(\neg A)) \Leftrightarrow A$ immer wahr ist. Das machen wir, in dem wir diese Aussage schrittweise ausführen (beginnend bei der innersten).

Ähnlich kann man sich überlegen

- Es gilt A oder die Negation von A.
- $(\neg(A \wedge B)) \Leftrightarrow ((\neg A) \vee (\neg B))$ ist immer wahr. Das bedeutet: A und B sind genau dann nicht wahr, wenn mindestens eine der beiden Aussagen nicht wahr ist.

Dazu noch eine Bemerkung: Es ist 'A genau dann, wenn B' äquivalent zu: 'Falls A, dann B' und 'Falls B, dann A'. (Das erklärt aus, warum das Symbol für 'äquivalent sein' aus den beiden Pfeilen für Wenn-dann für die beiden Richtungen zusammengesetzt ist.) Mit Hilfe der Bezeichnungen von eben geschrieben, wäre das

$$(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow ((A \implies B) \wedge (B \implies A))$$

ist eine wahre Aussage (d.h. es ist wahr unabhängig davon, ob die Aussagen A und B wahr sind). Um das zu überprüfen, stellen wir auch wieder eine Wahrheitstafel auf, vgl. Tabelle 4.

Das heißt, wir haben uns gerade überlegt, dass man eine Genau-dann-wenn-Aussage $A \Leftrightarrow B$ beweisen kann, indem man die Aussagen $A \implies B$ und $B \implies A$ einzeln zeigt. Das ist auch genau die Art, wie genau-dann-wenn Aussagen im Allgemeinen bewiesen werden.

Es ist jetzt nicht so, dass wir in der Mathematik, alle unsere Aussagen, mit diesen Symbolen (und noch weiteren) schreiben. Im Gegenteil, Beweise in der Mathematik sind oft viel Fließtext, wie wir bald sehen werden. Aber dies soll uns hier erst mal helfen, die Strukturen in logischen Schlüssen zu erkennen.

A	w	w	f	f
B	w	f	w	f
$A \Leftrightarrow B$	w	f	f	w
$A \implies B$	w	f	w	w
$B \implies A$	w	w	f	w
$(A \implies B) \wedge (B \implies A)$	w	f	f	w
$(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow ((A \implies B) \wedge (B \implies A))$	**w**	**w**	**w**	**w**

Abbildung 4: Für jede Kombination von Wahrheitsgehalten von A und B prüfen wir analog zur letzten Tabelle schrittweise, die zu zeigende Aussage nach. Da dies für alle Fälle wahr ist, ist es insgesamt eine wahre Aussage.

Lemma 2.1. * *Sei m eine natürliche Zahl. Dann ist m genau dann gerade, wenn $m+1$ ungerade ist.*

Ein nicht kleiner Teil von Ihnen, wird jetzt sagen: Ist ja klar, oder? Offensichtlich richtig. Das ist aber kein Beweis†. Wenn Sie das sagen, frage ich 'Warum? Erklären Sie es mir.' Und was machen Sie dann? Das ist i.A. gar nicht zu sagen, denn die Erklärung hängt z.B. auch stark davon ab, was man schon weiß und was man in der Erklärung benutzen darf.

Die erste Frage sollte also sein: Was muss man eigentlich dazu wissen, um die Aussage überhaupt zu verstehen, geschweige denn zu beweisen?

- Was ist eine natürliche Zahl? – Wir nehmen hier mal an, dass wir das schon wissen (ist ja auch so) und natürliche Zahlen auch addieren und multiplizieren können.
- Wann heißt eine natürliche Zahl gerade? – Eine natürliche Zahl m ist *gerade*, wenn es eine natürliche Zahl n mit $m = 2n$ gibt.
- Wann heißt eine natürliche Zahl ungerade? – Eine natürliche Zahl m ist *ungerade*, wenn es eine natürliche Zahl n mit $m = 2n + 1$ gibt.

Das ist, was uns klar sein muss, damit wir die Aussage überhaupt verstehen können. Nun können wir diese 'Genau-dann-wenn-Aussage' auch beweisen:

Beweis von Lemma 2.1. Da es eine Genau-dann-wenn-Aussage ist, können wir diese beweisen, indem wir die zwei Richtungen:

(i) Ist m gerade, dann ist $m+1$ ungerade.

*Ein 'Lemma' ist zumeist ein Hilfssatz. Bis jetzt haben wir alle Begriffe, die wir definiert haben, und alle Überlegungen, die wir geführt haben. Doch es ist auch sehr üblich in der Mathematik, Definitionen, Lemmata, Sätze/Theoreme, abgesetzt zu schreiben und mit einer Nummer zu versehen. Damit gibt man dem ganzen mehr Struktur. Die Sachen sind leichter wieder findbar und man kann durch die Nummern besser auf Sachen verweisen, die man schon weiß und dann ggf. benutzen will.

†Ein Beweis ist eine Herleitung einer Aussage aus einer Menge von Annahmen, die als wahr vorausgesetzt werden, und anderen Aussagen, die schon zuvor bewiesen wurden.

(ii) Ist $m + 1$ ungerade, dann ist m gerade.

separat beweisen, siehe letzte Zeile von Tabelle 4.

Wir beginnen mit (i): Da m eine gerade Zahl ist, gibt es eine natürliche Zahl n mit $m = 2n$. Dann ist $m + 1 = 2n + 1$ und damit ist $m + 1$ nach Definition von oben ungerade.*

Nun zu (ii): Da $m + 1$ ungerade ist, gibt es eine natürliche Zahl n mit $m + 1 = 2n + 1$. Dann gilt $m = 2n$, also ist m gerade. □

(Wir machen am Ende eines Beweises oft □ oder *qed* o.ä. Das ist nicht vorgeschrieben, sondern soll nur anzeigen, dass der Beweis jetzt zu Ende ist und damit die Lesbarkeit verbessern. Das eben war auch gar nicht unser erster Beweis, nur der erste bei dem wir das dazu geschrieben haben.)

2.2 Quantoren

Nur mit 'und', 'oder' etc. kommen wir nicht sehr weit. Was auch häufig vorkommen wird und implizit hier sogar schon vorgekommen ist, sind *Quantoren*. Das sind 'Für alle' ($\forall$) und 'es existiert' ($\exists$).

'Für alle' haben wir schon benutzt, auch wenn wir es da nicht so genannt haben: 'Ist m eine gerade natürliche Zahl, dann ist $m + 1$ ungerade.' ist ein Beispiel. Diese Aussage kann anders formuliert werden, als

Für alle geraden natürlichen Zahlen m gilt, dass $m + 1$ ungerade ist.
($\forall m$ gerade natürliche Zahl : $m + 1$ ist ungerade.).

Formal sehen 'für alle'-Aussagen i.A. aus, wie:

$$\forall x \text{ mit Eigenschaft } u : A(x)$$

D.h. Für alle x, die die Eigenschaft u erfüllen, gilt die Aussage $A(x)$. (wobei das (x) in $A(x)$ zeigen soll, dass der Wahrheitsgehalt von $A(x)$ von x abhängen wird. Für unser Beispiel 'Für alle geraden natürlichen Zahlen x gilt, dass $x + 1$ ungerade ist.' wäre die Eigenschaft u eine gerade natürliche Zahl zu sein und $A(x)$ die Aussage '$x + 1$ ist ungerade'.

Ein Beispiel für 'es existiert' ist:

Es existiert eine natürliche Zahl, deren Quadrat 4 ist.

Das ist richtig, 2 erfüllt das.

Formal sehen 'es existiert'-Aussagen i.A. aus, wie:

---

*Noch mal zu 'Falls, dann': (i) ist eigentlich eine 'Falls A, dann B'-Aussage: 'Falls m gerade ist, dann ist $m + 1$ ungerade.' Um zu zeigen, dass diese wahr ist, reicht es den Fall zu analysieren, dass A wahr ist. Denn ist A falsch, stimmt die Falls-dann-Aussage automatisch. Deshalb fangen wir immer direkt damit an, A als wahr anzunehmen, also hier 'Da m eine gerade Zahl ist ...'

$$\exists x \text{ mit Eigenschaft } u : A(x)$$

D.h. Es gibt ein x, das die Eigenschaft u erfüllt, und für das die Aussage $A(x)$ gilt. Für unser Beispiel von eben, wäre die Eigenschaft u eine natürliche Zahl zu sein und $A(x)$ die Aussage '$x^2 = 4$'. Hier ist gerade nicht zu sehen, warum man u nicht in die Aussage $A(x)$ steckt. Also in unserem Beispiel u weglässt und für $A(x)$ die Aussage 'x ist eine natürliche Zahl und $x^2 = 4$' nimmt. Aber diese Freiheit wird später bei Negationen nützlich sein.

Im normalen Sprachgebrauch gibt es da jeweils Synonyme, z.B. 'jede' statt 'für alle' und 'es gibt' statt 'es existiert'.

Worauf man etwas aufpassen muss: 'Für alle'-Aussagen sagen nichts darüber aus, ob es das Objekt über das eine 'für alle' Aussage gemacht wird überhaupt existiert. Sondern nur darüber, dass für jedes solche existente Objekt etwas bestimmtes gelten muss. Z.B.

'Jedes Einhorn ist rosarot und unsichtbar.'
oder anders gesagt: 'Für jedes Einhorn gilt, dass es rosarot und unsichtbar ist.'

ist wahr (wenn wir mal annehmen, dass wir wissen, dass es keine Einhörner gibt). Wogegen unter der Annahme, dass es keine Einhörner gibt, die Aussage

'Es gibt ein rosarotes, unsichtbares Einhorn'.

falsch ist, da es insbesondere keine Einhörner gibt.

Im letzten Abschnitt hatten wir die Negation von Aussagen. Wir wollen uns hier mal überlegen, was denn die Negation der Aussage 'Für alle geraden natürlichen Zahlen m gilt, dass $m + 1$ ungerade ist.' ist: Da wir schon wissen, dass die Aussage wahr ist, muss die Negation falsch sei. Aber wir wollen sie als Aussage trotzdem mal formulieren. Damit wir sehen, dass eine 'für alle'-Aussage nicht stimmt, müssen wir nur ein Gegenbeispiel finden, für den sie falsch ist, also für welches die Negation gilt. Die Negation von

$$\forall x \text{ mit Eigenschaft } u : A(x)$$

ist also

$$\exists x \text{ mit Eigenschaft } u : \neg A(x).$$

In unserem Beispiel:

Es gibt eine gerade natürliche Zahl m, für die $m + 1$ nicht ungerade ist.

Andererseits wäre die Negation einer 'es existiert'-Aussage eine 'Für alle'-Aussage: Die Negation von

$$\exists x \text{ mit Eigenschaft } u : A(x)$$

ist also

$$\forall x \text{ mit Eigenschaft } u : \neg A(x).$$

Z.B. Die Negation von 'Es gibt ein rosarotes, unsichtbares Einhorn' wäre 'Für alle Einhörner gilt, sie sind nicht rosarot und unsichtbar'. Das letzte ist eine wahre Aussage, da es nach unserer Annahme gar keine Einhörner gibt.

! Die Aussage 'Für jedes Einhorn gilt, es ist nicht rosarot oder unsichtbar' ist nicht die Negation von 'Es gibt ein rosarotes, unsichtbares Einhorn'. !

3 Teilbarkeit

Wir wollen nun ein paar weitere grundlegende Beweistechniken kennenlernen, am Beispiel der Teilbarkeit. Dazu beginnen wir mit **Tag 2**

Satz 3.1. *Das Quadrat einer natürlichen Zahl hat die Form $3k$ oder $3k+1$ für eine natürliche Zahl k.*

Hier nehmen wir an, dass wir schon wissen, dass jede natürliche Zahl, eine der Formen $3m$, $3m+1$ oder $3m+2$ für eine natürliche Zahl m hat, also bei Division durch 3 nur der Rest 0, 1 und 2 auftreten kann. Allgemeiner hat für $\ell > 0$ eine natürliche Zahl immer eine der Formen ℓm, $\ell m + 1$, $\dots$, $\ell m + \ell - 1$ für eine natürliche Zahl m. Das entspricht der Aussage: Jede natürliche Zahl lässt bei Division durch eine natürliche Zahl $\ell > 0$ einen Rest $0, 1, \dots$ oder $\ell - 1$.

Wir beweisen das mittels *Fallunterscheidung*, d.h. wir gehen eine endliche Anzahl von Fällen durch, die alle Möglichkeiten abdecken (hier die drei Darstellungen $3m$, $3m+1$ und $3m+2$), und zeigen die Behauptung für jeden Fall einzeln.

Beweis. Fall 1: Die natürliche Zahl hat die Form $3m$ für eine natürliche Zahl m. Dann ist das Quadrat $(3m)^2 = 9m^2 = 3(3m^2)$ und hat damit die Form $3k$ für die natürliche Zahl $k = 3m^2$.*

Fall 2: Die natürliche Zahl hat die Form $3m+1$ für eine natürliche Zahl m. Dann ist das Quadrat $(3m+1)^2 = 9m^2 + 6m + 1 = 3(3m^2 + 2m) + 1$ und hat damit die Form $3k+1$ für die natürliche Zahl $k = 3m^2 + 2m$.

Fall 3: Die natürliche Zahl hat die Form $3m+2$ für eine natürliche Zahl m. Dann ist das Quadrat $(3m+2)^2 = 9m^2 + 12m + 4 = 3(3m^2 + 4m + 1) + 1$ und hat damit die Form $3k+1$ für die natürliche Zahl $k = 3m^2 + 4m + 1$.

Jetzt haben wir alle Fälle abgedeckt, denn jede natürliche Zahl hat eine dieser drei Formen. Damit ist die Behauptung bewiesen. □

*Hier benutzen wir z.B., dass wir wissen, dass Produkte natürlicher Zahlen wieder natürliche Zahlen sind.

3.1 Teilbarkeitsregeln

Wir wollen nun zu Teilbarkeitsregeln kommen. Dazu erinnern wir uns erst einmal:

Definition 3.2. Sei m eine ganze Zahl und k eine natürliche Zahlen größer Null*. Dann heißt m *durch* k *teilbar*, wenn es eine ganze Zahl ℓ mit $m = k\ell$ gibt. Wir nennen k dann *Teiler* von m.

Wir nehmen an, dass wir mit ganzen Zahlen rechnen können. Dann können wir über Teilbarkeit z.B. folgendes aussagen:

Lemma 3.3. *Seien m, n ganze Zahlen und sei k eine natürliche Zahl mit $k > 0$. Sei m durch k teilbar. Dann ist n genau dann durch k teilbar, wenn $m - n$ durch k teilbar ist.*

Beweis. Wir sollen hier eine Genau-dann-wenn-Aussage zeigen. Da hatten wir uns im letzten Kapitel überlegt, dass man die beweisen kann, indem man beide Richtungen zeigt. Allgemein ist eine Voraussetzung, dass m durch k teilbar ist. Deshalb gibt es nach Definition eine ganze Zahl ℓ, so dass $m = k\ell$ gilt.

Wir beginnen mit der Richtung: Sei n durch k teilbar. Dann ist auch $m - n$ durch k teilbar:

Da auch n durch k teilbar ist, gibt es eine ganze Zahl a, so dass $n = ka$ ist†. Dann ist $m + n = k\ell + ka = k(\ell + a)$. Da ℓ, a, m und n jeweils ganze Zahlen sind, sind auch $\ell + a$ und $m - n$ ganz und damit $m - n$ durch k teilbar.

Es bleibt die andere Richtung: Sei also $m - n$ durch k teilbar. Dann gibt es eine ganze Zahl a mit $m - n = ka$. Damit gilt $k\ell - n = ka$ und somit $n = k(\ell - a)$. Da $\ell - a$ wieder ganz ist, ist somit n durch k teilbar. □

Es gilt auch, vgl. Übung:

- Ist k ein Teiler von m, dann ist k auch ein Teiler von $-m$.
- Ist k ein Teiler von m und ℓ ein Teiler von k, dann ist ℓ auch ein Teiler von m.

Nun aber zu Teilbarkeitsregeln: Ein paar Teilbarkeitsregeln kennen Sie wahrscheinlich aus der Schule, z.B.

- Eine natürliche Zahl ist genau dann durch 5 teilbar, wenn die letzte Zahl eine 5 oder 0 ist.
- Eine natürliche Zahl ist genau dann durch 3 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 3 teilbar ist.

*Für die meisten Mathematiker fangen die natürlichen Zahlen bei Null an. Da wir aber nicht durch Null teilen können, fordern wir hier $k > 0$.

†Wenn man einfach stumpf die Definition wiedergibt, wäre man hier vielleicht versucht, statt a das ℓ wie in der Definition zu schrieben. Aber ℓ ist schon vergeben. Es bezeichnet schon einen Faktor im letzten Produkt und der muss nicht der gleiche sein, wie das a hier. Das wäre also eine 'Doppelbezeichnung' – da muss man aufpassen!

Wir wollen uns nun mit der Frage beschäftigen, wie man solche Teilbarkeitsregeln finden kann. Dazu brauchen wir die Dezimaldarstellung natürlicher Zahlen.

Lemma 3.4 (Dezimaldarstellung natürlicher Zahlen)**.** *Sei x eine natürliche Zahl. Dann gibt es eine eindeutige natürliche Zahl m und Ziffern*[*] a_0, a_1, ..., a_m *mit* $a_m \neq 0$ *und*

$$x = a_m 10^m + a_{m-1} 10^{m-1} + \ldots + a_1 10 + a_0.$$

Das beweisen wir hier nicht. Da wir uns sonst mehr direkt mit natürlichen Zahlen auseinander setzen müssten.

Warum steht im Lemma $a_m \neq 0$? Um die Eindeutigkeit der Darstellung zu garantieren. Sonst könnte man vor die Zahl noch viele weitere Nullen setzen.

Satz 3.5. *Sei x eine natürliche Zahl mit Dezimaldarstellung $x = a_m 10^m + a_{m-1} 10^{m-1} + \ldots + a_1 10 + a_0$. Dann ist x genau dann durch 3 teilbar, wenn die Quersumme $a_m + a_{m-1} + \ldots + a_0$ von x durch 3 teilbar ist.*

Beweis. Wir setzen $q(x) := a_m + a_{m-1} + \ldots + a_0$. Zuerst überlegen wir uns, dass es reicht zu zeigen, dass $x - q(x)$ durch 3 teilbar ist. Warum ist das so? Angenommen wir wissen, dass $x - q(x)$ durch 3 teilbar ist. Dann können wir die beiden Richtungen der Genau-dann-wenn-Aussage mittels Lemma 3.3 zeigen: Für die erste Richtung sei zunächst x durch 3 teilbar. Dann ist auch $-x$ durch 3 teilbar und damit nach Lemma 3.3 auch $-x + (x - q(x)) = -q(x)$, also auch $q(x)$. Analog für die Rückrichtung sei $q(x)$ durch 3 teilbar, dann ist auch $q(x) + (x - q(x)) = x$ nach Lemma 3.3 durch 3 teilbar.

Wir müssen also nur noch nachrechnen, dass $x - q(x)$ durch 3 teilbar ist. Dazu berechnen wir

$$\begin{aligned} x - q(x) =& a_m(10^m - 1) + a_{m-1}(10^{m-1} - 1) + \ldots + a_1(10 - 1) \\ =& 3 \left(\underbrace{333\ldots3}_{(m-1)-\text{stellig}} a_m + \underbrace{333\ldots3}_{(m-2)-\text{stellig}} a_{m-1} + \ldots + 3a_1 \right) \end{aligned}$$

$x - q(x)$ ist also durch 3 teilbar und damit ist x genau dann durch 3 teilbar, wenn $q(x)$ durch 3 teilbar ist. □

Die analoge Teilbarkeitsregel gilt auch für Division durch 9. Der Beweis geht dann ganz analog.

Wenn wir jetzt z.B. für Division durch 7 eine Teilbarkeitsregel finden wollen, können wir wie folgt vorgehen: Wir nehmen die Dezimaldarstellung von x und ersetzen jede Zehnerpotenz 10^i durch eine Zahl b_i, die bei Division durch 7 den gleichen Rest lässt (d.h. $10^i - b_i$ muss durch 7 teilbar sein). Dann ist $x = a_m 10^m + a_{m-1} 10^{m-1} + \ldots + a_1 10 + a_0$ genau dann durch 7 teilbar, wenn $r(x) = b_m a_m + b_{m-1} a_{m-1} + \ldots + b_1 a_1 + b_0 a_0$ durch 7 teilbar ist.

[*] Eine Ziffer ist eine der Zahlen 0, 1, ..., 9.

Beweis dieser letzte Aussage: Es ist $x - r(x) = a_m(10^m - b_m) + a_{m-1}(10^{m-1} - b_{m-1}) + \ldots + a_0(10^0 - b_0)$. Alle Ausdrücke in Klammern sind durch 7 teilbar und damit auch die Summe auf der rechten Seite nach Lemma 3.3. Ebenfalls nach Lemma 3.3 folgt somit dann die Behauptung.

Also z.B. ist

$$\begin{aligned} x =& a_m 10^m + a_{m-1}10^{m-1} + \ldots + a_1 10 + a_0 \\ r(x) :=& \ldots - a_9 + 2a_8 + 3a_7 + a_6 - 2a_5 - 3a_4 - a_3 + 2a_2 + 3a_1 + a_0, \end{aligned}$$

denn 7 teilt $10 - 3$, $100 - 2$, $1000 - (-1)$, $\ldots$. Wenden wir das mal konkret an: Sei $x = 8638$. Dann ist $r(x) = -8 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 3 + 4 = 21 = 3 \cdot 7$. Also sollte nach der Teilbarkeitsregel 8638 durch 7 teilbar sein und das stimmt auch: $8638 = 7 \cdot 1234$.

Ähnlich kann man so auch Teilbarkeitsregeln für andere Zahlen finden, z.B. für Division durch 11.

3.2 Primzahlen

Als ein weiteres Beispiel einer Beweistechnik wollen wir uns die Aussage anschauen.

Lemma 3.6. *Es gibt unendlich viele Primzahlen.*

Dazu muss man erst einmal wissen, was eine Primzahl ist:

Definition 3.7. Sei p eine natürliche Zahl größer 1. Dann ist p eine Primzahl, wenn 1 und p die einzigen natürlichen Zahlen sind, die Teiler von p sind.

Man fordert hier 'größer eins', da sonst auch 1 eine Primzahl wäre und das will man aus verschiedenen Gründen nicht. Ist erst einmal nur eine Konvention/Wahl.*

Wir wollen nun das letzte Lemma mittels eines *Widerspruchsbeweises* zeigen. Das bedeutet: Wir zeigen, dass Aussage A wahr ist, indem wir zeigen, dass $\neg A$ falsch ist (Denn dann ist $A = \neg(\neg A)$ wahr). Dies machen wir wiederum, indem wir erst einmal annehmen, dass $\neg A$ doch wahr ist und machen davon ausgehend solange (richtige) logische Schlussfolgerungen, bis wir auf etwas stoßen, von dem wir wissen, dass es falsch ist. Das darf nicht sein, deshalb musste unsere Annahme falsch sein und $\neg A$ ist doch falsch.

Beweis von Lemma 3.6. Um einen Widerspruchsbeweis zu führen, nehmen wir an, dass die Negation der zu zeigenden Aussage wahr ist. Wir nehmen also an, dass es nur endlich viele Primzahlen gibt. Wenn es nur endlich viele gibt, können wir die aufzählen. Sagen wir $p_1, \ldots, p_k$ für eine natürliche Zahl k seien alle Primzahlen, die es gibt. Dann

*Definitionen sind Wahlen. Was man definiert, kann einem niemand verbieten. Aber es gibt gute und schlechte Wahlen. Eine schlechte Wahl ist z.B. wenn viele Leute den Begriff ganz anders verwenden. Aber auch, wenn es gar nicht die wichtigen Merkmale, dessen wofür man ein Wort einführen will, umfasst.

bilden wir die natürliche Zahl $m = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k + 1$. Nun ist m größer als jede dieser Primzahlen p_i. Damit darf m keine Primzahl sein, da wir mit den p_i ja schon alle hatten. Allerdings teilt auch keines der p_i für $i = 1, \ldots k$ die Zahl m, da p_i schon $p_1 \cdot \ldots \cdot p_k$ teilt und damit nach Lemma 3.6 auch $m - p_1 \cdot \ldots \cdot p_k = 1$ durch p_i teilbar sein müsste. 1 ist aber nur durch 1 teilbar.
Da aber m keine Primzahl ist, muss es eine natürliche Zahl ℓ mit $1 < \ell < m$ geben, die m teilt. Ist ℓ selbst eine Primzahl, haben wir einen Widerspruch gefunden, da ℓ keines der p_i sein kann. Ist ℓ selbst keine Primzahl, hat ℓ wiederum einen Teiler ℓ_1 mit $1 < \ell < \ell_1 < m$. Wie wir uns auf Seite 11 überlegen sollten, ist dann ℓ_1 auch ein Teiler von m. Ist nun ℓ_1 eine Primzahl, kriegen wir den gleichen Widerspruch wie eben. Ansonsten führen wir das fort und erhalten einen Teiler ℓ_2 von ℓ_1 und damit von m mit $1 < \ell_1 < \ell_2 < m$. Da es nur endliche viele natürliche Zahlen zwischen 1 und m gibt, kann das nicht unendlich oft so weitergehen, sondern irgendwann haben wir einen Teiler ℓ_j von m gefunden, der eine neue Primzahl ist. Damit haben wir unseren Widerspruch. Die ursprüngliche Annahme war also falsch, und somit ist das Lemma gezeigt. □

4 Zwei-Personen-Spiele

Wir wollen uns einige einfache Beispiele von Zwei-Personen-Spielen. Allgemein sind Beispiele für Zwei-Personen-Spiele Go, Schach, Dame, Mühle, Halma und Nim. **Tag 3**

Viele Spiele, darunter Mühle und Vier gewinnt, sind mittlerweile vollständig gelöst und die entsprechenden Strategien sind bekannt. D.h. es ist klar, ob ein Spieler bei 'richtigem Spiel' immer gewinnen oder zumindest immer ein Unentschieden erreichen kann, egal was der Gegner tut. Im Prinzip sind das damit langweilige Spiele.

Man kann diese Spiele lösen, indem man systematisch alle Möglichkeiten durchgeht und weiß in endlicher Zeit, was alles passieren kann. Das stimmt abstrakt auch für Go und Schach, nur ist das so komplex, dass es viel zu lange dauern würde und deshalb nicht praktikabel ist. Wir schauen uns hier nur Spiele an, die nicht so komplex sind.

Wenn man 'nur' systematisch durchprobieren muss und es als Problem an sich langweilig und irrelevant ist, warum machen wir es hier trotzdem und was hat das mit Mathematik zu tun?

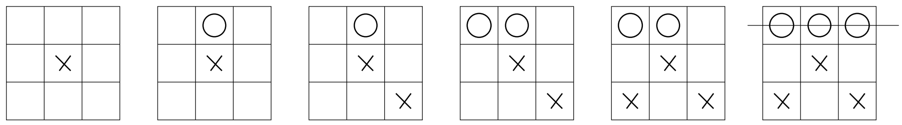
Der Punkt ist, man kann daran erst einmal überhaupt systematisches Analysieren lernen. Aber dann sollte nicht Schluss sein. Dann fängt der Spaß erst an. Man versucht Gesetzmäßigkeiten zu erkennen, die man dann auch hoffentlich nutzen kann, wenn sich die Ausgangssituation des Spieles ein wenig oder auch mehr ändert.

Das ist auch etwas, was wir allgemein in der Mathematik oft machen. Systematisch Probieren und Analysieren um Gesetzmäßigkeiten zu finden. Wenn das Ausgangsproblem zu groß ist, kleinere Teilprobleme/Beispiele untersuchen, …

Wir wollen einiges davon mal an zwei Beispielen sehen. Wir beginnen mit einem einfachen sehr bekannten Beispiel:

4.1 Tic-Tac-Toe

Tic-Tac-Toe ist ein kleines Spiel für zwei Personen. Auf einem 3×3 Felder großen Spielfeld machen die beiden Spieler abwechselnd ihre Zeichen (ein Spieler Kreuze, der andere Kreise) in ein noch freies Quadrat. Der Spieler, der als erstes drei seiner Zeichen in eine Reihe, Spalte oder eine der beiden Diagonalen setzen kann, gewinnt. Sind alle Quadrate besetzt, ohne dass ein Spieler gewonnen hat, endet das Spiel unentschieden. Ein mögliches Spiel wäre z.B.



In dem Beispiel hat der zweite Spieler gewonnen.

Ist das immer so, kann der zweite den Sieg immer erzwingen? Oder der erste? Die Lösung wird sein, dass der erste Spieler immer mindestens ein Unentschieden erzwingen kann. Doch wie kann der erste Spieler spielen, damit (egal was der zweite Spieler macht) er nie verliert, er also immer ein Unentschieden oder einen Sieg erreicht. Wir brauchen eine Strategie.

Was ist eine Strategie? Wenn die Aufgabe darin besteht, eine Strategie für einen Spieler in einem Zwei-Personen-Spiel anzugeben, muss man einen Plan angeben, wie der Spieler in jeder denkbaren Spielsituation reagieren soll. Also egal, was der andere Spieler macht, soll die Strategie, also der Plan, eine Handlungsanweisung geben.

Man kann sich das so vorstellen, als ob der Spieler ein Roboter wäre, dem man detailliert erklären muss, was er in welcher Situation zu tun hat – ein Algorithmus*. Aussagen wie: „Falls der Gegner ... macht, dann antworte so, dass der Gegner nicht gewinnen kann.“ wären da nur wenig hilfreich, da der Roboter ja nur stumpfsinnig das ausführen kann, was der Plan/die Strategie/der Algorithmus ihm vorschreibt. Man muss da schon konkret werden, z.B.: „Falls der Gegner ... macht, dann bewege dich einen Schritt vor.“

Was, wenn es mehrere Wege zum Ziel gibt? Im Allgemeinen gibt es nicht nur eine mögliche Strategie – also in unserem Fall nicht nur eine Strategie ein Unentschieden zu erreichen. Aber es reicht, eine anzugeben. Das ist, als wenn uns einmal jemand nach dem Weg zum Bahnhof fragt. Da geben wir ja auch nicht alle möglichen Wege an, einer reicht ja. Prinzipiell wäre es dann auch richtig den Fragenden einen Weg zu beschreiben, der über den Nordpol führt (auch wenn das in der Praxis nicht zu empfehlen ist!).

Natürlich ist es nicht falsch, mehrere mögliche Strategien anzugeben. Dabei muss aber sehr gut aufgepasst werden. Schreibt man nämlich z.B. Setze links oder rechts vom Gegner. Dann heißt das, dass jede der beiden Möglichkeiten richtig sein muss. Der Roboter hat ja keine Zusatzinformationen, um zu entscheiden, welche dieser beiden Möglichkeiten er wann zu wählen hat. Er wählt zufällig eine aus. Es ist also komplizierter eine Strategie so anzugeben, da man mehr überprüfen muss und dann auch wirklich

*https://de.wikipedia.org/wiki/Algorithmus zeigen muss, dass egal welche Möglichkeit der Roboter zufällig auswählt, die Strategie immer zum Ziel führt. Das ist im Zweifel aufwändiger und fehleranfälliger. Kann aber natürlich trotzdem richtig werden.

Lösung zum Tic-Tac-Toe: (Wie oben erwähnt, ist das nur eine mögliche Lösung. Sie können eine andere richtige Lösung gefunden haben.) Das soll erst einmal ein Beispiel dafür sein, wie man eine Strategie angeben kann. Wir verraten hier gerade noch nicht, wie wir darauf gekommen sind.

1.Zug: Setze ein Kreuz in das mittlere Feld.
Jetzt hat der Gegner noch 8 Möglichkeiten zu setzen. Aber für die Strategie sind z.B. alle Eckfelder gleich, da man das Brett ja immer drehen kann und dann mit der Strategie für ein anderes Eckfeld fortfahren kann[1]. Es reicht also eine Strategie für ein bestimmtes Eckfeld anzugeben, sagen wir das Eckfeld links oben. Jede Strategie für ein anderes Eckfeld, kann dann durch Drehung des Brettes aus der Strategie fürs links obere Eckfeld erhalten werden. In Beweisen schreibt man dann oft, um nicht jeden Fall einzeln auszuführen, i.A. dann 'Ohne Beschränkung der Allgemeinheit' – abgekürzt o.B.d.A.* Genauso können die anderen 4 Nicht-Eckfelder gleich behandelt werden.

Fall 1 Der Gegner setzt in ein Eckfeld, o.B.d.A. das obere linke Eckfeld. Dann setzen wir ins untere linke Eckfeld.

- 1-1 Der Gegner setzt seinen zweiten Zug nicht ins obere rechte Eckfeld. Dann setzen wir ins obere rechte Eckfeld. Gewonnen!
- 1-2 Der Gegner setzt seinen zweiten Zug ins obere rechte Eckfeld. Setze ins mittlere Feld der oberen Zeile.
  - 1-2-1 Der Gegner setzt seinen dritten Zug nicht ins untere mittlere Feld. Dann setzen wir dorthin. Gewonnen!
  - 1-2-2 Der Gegner setzt seinen dritten Zug ins untere mittlere Feld. Wir setzen ins untere rechte Feld. Nun ist in jeder Zeile oder Spalte oder Diagonale mindestens ein Kreuz. Damit kann der Gegner nicht mehr gewinnen und es gibt mindestens ein Unentschieden.[2]

Fall 2 Der Gegner setzt in das obere mittlere Feld. Dann setzen wir ins obere linke Eckfeld.

- 2-1 Der Gegner setzt seinen zweiten Zug nicht ins untere rechte Eckfeld. Dann setzen wir dorthin. Gewonnen!
- 2-2 Der Gegner setzt seinen zweiten Zug ins untere rechte Eckfeld. Wir setzen ins untere linke Eckfeld.
  - 2-1-1 Der Gegner setzt seinen dritten Zug nicht ins linke mittlere Feld. Dann setzen wir dorthin. Gewonnen!
  - 2-1-2 Der Gegner setzt seinen dritten Zug ins linke mittlere Feld. Wir setzen in das obere rechte Eckfeld. Gewonnen!

*https://de.wikipedia.org/wiki/Ohne_Beschr%C3%A4nkung_der_Allgemeinheit

Damit haben wir für jeden möglichen Zug des Gegners eine Antwort parat und egal, welche Züge der Gegner macht, erreichen wir immer mindestens ein Unentschieden.

Schauen wir uns noch einmal an zwei der vorkommenden Argumente/Techniken, neben dem 'Systematischen Probieren/Fallunterscheiden', genauer an (Sie gehören zu den kleinen blauen Zahlen in der Strategie):

- 1 - 'Symmetrieargumente': Das Tic-Tac-Toe Brett hat einige Symmetrien. Z.B. überführt eine Drehung um 90° das Brett in sich selbst. Wir haben ausgenutzt, dass wenn wir eine Strategie für 'der Gegner setzt auf oben links', damit auch eine Strategie haben, wenn der Gegner rechts oben setzt (sofern bis dahin auch alle schon gesetzten Zeichen diese Symmetrie haben).

  Natürlich wären hier Symmetrieargumente nicht nötig gewesen, wir hätten einfach jeden Fall einzeln diskutieren und viermal so viel schreiben können.

- 2 - 'Rückwärtsarbeiten': Auch hier hätten wir jede einzelne Möglichkeit bis zum bitteren Ende (Unentschieden oder Sieg) aufzählen können. Doch hier wird abgekürzt, indem man sich überlegt, wo man eigentlich hin will. Ziel ist Unentschieden oder Sieg, also insbesondere der Gegner gewinnt nicht. Man überlegt sich also, was sind Situationen, wo klar ist, dass man dieses Ziel erreicht hat und versucht im nächsten Schritt ein solche Situation zu erzwingen. Hier ist es: Wenn in jeder Reihe, Spalte und Diagonale min. ein Kreuz ist, kann der Gegner nicht mehr gewinnen.

  Rückwärtsarbeiten wird oft in Kombination mit anderen Techniken genutzt und kann z.B. dabei helfen überhaupt erst einmal eine Idee zur Lösungsfinden zu bekommen, weil man so besser weiß, wo man hin will...

Wie kann man auf diese Strategie kommen? Ehrlich gesagt, ist es bei Tic-Tac-Toe relativ schwierig, keine Strategie zu finden, solange man die Fälle systematisch durchprobiert, den zweiten (blauen) Punkt von oben erkannt hat und nicht grob was übersieht. Das liegt hier aber nur daran, dass bei diesem Spiel 'fast alles funktioniert'. Zum Beispiel ist es egal, welchen Zug der erste Spieler macht. Er kann danach, unabhängig davon, was der zweite Spieler macht noch immer ein unentschieden erreichen.

Warum habe ich mit der Mitte als ersten Zug angefangen? Einfach aus Faulheit. Wenn der erste Spieler die Mitte wählt, sind es für den zweiten Spieler (unter Beachtung des obigen Symmetrieargumentes nur noch zwei mögliche Züge). Bei allen anderen ersten Zügen sind es mehr Möglichkeiten für den zweiten Spieler.

Im Allgemeinen muss man sich natürlich mehr anstrengen, um eine Strategie zu finden:

4.2 Nim-Spiele

Nim-Spiele sind Zwei-Personen-Spiele mit einer Menge von Stäbchen, oft angeordnet auf verschiedenen Haufen, wo jeder Spieler nach gewissen Regeln einige Stäbchen entfernen darf. Gewonnen hat i.A. der Spieler, der das letzte Stäbchen nimmt.

Wir schauen uns eine einfache Variante mit nur einem Haufen an (für andere Varianten s. Übung):

Gustav und Helga spielen ein kleines Spiel. Sie haben 20 *Stäbchen auf dem Tisch liegen. Ist ein Spieler am Zug, so kann er wählen, ob er* 1*,* 2*,* 3 *oder* 4 *Stäbchen vom Tisch nimmt. Gezogen wird abwechselnd. Gewonnen hat der Spieler, der die letzten Stäbchen vom Tisch nimmt. Gustav beginnt. Kann Helga durch cleveres Spiel immer einen Sieg erreichen? Wenn ja, wie? Wie sieht es bei* 21*,* 22 *Stäbchen aus?*

Auch hier stellt sich die gleichen Frage wie beim Tic-Tac-Toe: Hat einer der Spieler eine Strategie, seinen Sieg oder zumindest ein Unentschieden* zu erzwingen?

Auch hier könnte man alle möglichen Züge systematisch durchprobieren und würde nach ein bisschen Arbeit zum Ziel kommen. Das funktioniert, ist aber nicht unbedingt die beste Idee. Dann müssten wir für die zweite Frage mit den 21 Stäbchen noch mal genau gleiche machen. Spätestens beim dritten Mal sollte man sich dann fragen, ob man sich einen anderen Weg zur Lösung finden kann, der uns auch bei der nächsten Änderung der Stäbchenzahl noch hilft. Allgemein gilt: Systematisches Durchprobieren ist eine valide Technik mit der man zumindest in endlichen nicht zu komplexen Situationen erst einmal durchkommt, aber dabei sollte man die Augen offen halten, ob man allgemeine Gesetzmäßigkeiten erkennt. Diese muss es nicht unbedingt geben. Aber es ist oft so, dass man an vielen Beispielen, Eigenschaften eines Problems errät/erkennt und dann durch einen Beweis zeigt, dass diese wirklich allgemein gelten.

Eine oft vorkommende Technik ist es, erst einmal ein einfacheres/kleineres Problem zu betrachten und zu beobachten, ob man daran schon was sieht. Hier würde ich mit weniger Stäbchen beginnen, denn dann gibt es weniger Fälle zu testen und es wird übersichtlicher.

Der einfachste Fall wäre hier: Es gibt nur 1-4 Stäbchen. Dann kann der Spieler einfach alle nehmen und gewinnt. So etwas nennen wir eine Gewinnposition – egal was der andere Spieler macht (hier kommt er gar nicht erst dran), hat der Spieler eine Strategie auf alle Fälle zu gewinnen (nämlich einfach alle Stäbchen nehmen). Nächster Fall wären 5 Stäbchen. Da sehen wir, egal ob der Spieler 1, 2, 3 oder 4 Stäbchen, lässt er dem zweiten Spieler eine der vorherigen Gewinnpositionen übrig. D.h. (wenn der Gegner) richtig spielt, verliert man bei 5 Stäbchen. Was heißt das für 6 Stäbchen? Um hier zu gewinnen, müssen wir dafür sorgen, dass nach unserem Zug, der Gegner in keiner Gewinnposition ist. Wir wollen also nur ein Stäbchen wegnehmen. Dann verliert der Gegner, d.h. wir gewinnen (bei richtigem Spiel). Gleiches funktioniert bei $7, 8, 9$ Stäbchen. Auch hier kann man so ziehen, dass der Gegner bei 5 landet.

Allgemein nennen wir eine Anzahl von Stäbchen, bei der der Spieler der am Zug ist, gewinnen kann, *Gewinnposition*. Eine Zahl, bei der er bei richtigem Spiel des Gegners nicht gewinnen kann, als *Verlustposition*. Eine Zahl ist also insbesondere eine Gewinnposition, wenn es einen Zug gibt, der den Gegner auf eine Verlustposition

*Unentschieden gibt es hier aber gar nicht. Irgendeiner muss mal das letzte Stäbchen nehmen und gewinnen.

führt. Eine Zahl ist eine Verlustposition, wenn es jeder Zug den Gegner auf eine Gewinnposition führt.

Bis jetzt haben wir also gesehen, dass $1-4, 6-9$ Gewinnpositionen sind, 5 jedoch eine Verlustposition ist. Machen wir genau so weiter, sehen wir, dass auch 10 und später 15 Verlustpositionen sind und die Zahlen dazwischen Gewinnpositionen. Es scheint so, dass jede Zahl, die durch 5 teilbar ist, eine Verlustposition ist und die anderen Gewinnpositionen sind. Doch ist das wirklich so? Dazu müssen wir für ein allgemeine Anzahl von Stäbchen eine Strategie angeben.

Lösung: Seien n Stäbchen auf dem Haufen und sei n durch 5 teilbar. Der zweite Spieler (hier Helga) kann mit folgender Strategie gewinnen: Zieht Gustav x Stäbchen, zieht sie $5-x$ Stäbchen. Dann wurden in diesen zwei Zügen insgesamt 5 Stäbchen gezogen. Damit liegt vor Gustav nun ein kleinerer Haufen, aber die Stäbchenzahl ist noch immer durch 5 teilbar. Das machen wir so lange, bis nur noch 5 Stäbchen vor Gustav liegen und mit dem gleichen Plan nimmt nun Helga die letzten Stäbchen.

War die Stäbchenzahl n am Anfang nicht durch 5 teilbar, dann kann Gustav den Sieg immer erzwingen: Bei Division durch 5 lasse n den Rest k. Der muss nun 1, 2, 3 oder 4 sein. Indem Gustav im ersten Schritt k Stäbchen entfernt, ist nun Helga in der Situation, dass die Anzahl der Stäbchen durch 5 teilbar ist und somit auf einer Verlustposition ist.

Man kann sich jetzt weiterführende Fragen stellen, z.B: Was ändert sich, wenn es erlaubt wäre, $1, 2, \ldots, 6$ Stäbchen in jedem Zug wegzunehmen?

5 Lösen, Aufschreiben und Fehler machen...

Wenn man dann zu den ersten Vorlesungen (und auch später), dann Übungsaufgaben lösen soll, wird man oft froh sein, wenn man überhaupt was 'herausbekommt'. Dann freut man sich erst einmal und das ist auch gut so. Allerdings darf man die Arbeit danach nicht unterschätzen. Dann soll man die Lösung/den Beweis aufschreiben und zwar derart, dass a) es richtig ist und b) es verständlich ist. Im Idealfall muss jemand den Beweis und die Lösung verstehen können, ohne dass er/sie vorher schon musste, wie es geht. **Tag 4**

Das ist gar nicht so einfach, wenn man es das erste Mal macht. Dabei soll Ihnen im Studium helfen, dass die Tutoren Ihre Lösungen korrigieren und viele Anmerkungen machen, woran Sie sehen können, was bei nächsten Mal besser geht. Aber es hilft auch sich mal gerne auch falsche Lösungen und Beweise anderer anzusehen. Sich dann daran zu überlegen, was richtig ist, was verständlich ist, was anders besser wäre etc. und dann zu versuchen, bei der nächsten eigenen Lösung umzusetzen.

Ganz typische und sehr einfach zu behebende 'Fehler' sind:

- Man führt die Abkürzungen/Formelzeichen nicht ein, die man benutzt. Also sagt nicht, wofür diese stehen.

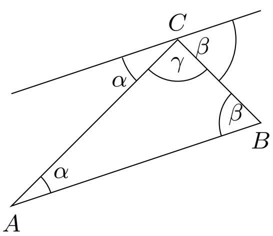
- Doppelbezeichnungen (siehe zweite Fußnote auf Seite 11)
- Man schreibt generell zu wenig Text/Erklärungen oder keine vollständigen Sätze (das fördert Missverständnisse).
- Man benutzt, dass was man eigentlich zeigen soll (Das ist gravierend falsch, während man bei den Punkten davor noch auf Ungenauigkeit plädieren kann).

Da der Mensch zum Glück vergesslich ist, reicht es oft auch, sich die eigenen Lösungen von vor zwei Wochen noch mal anzuschauen und zu sehen, ob man noch versteht, was man damals meinte. Wenn nicht, hätte man vielleicht doch mehr erklären sollen...

Wir wollen uns nun mal hier und in den Übungen ein paar Beispiellösungen/-beweise anschauen und sehen, ob sie stimmen und/oder was man ggf. besser machen könnte.

Als erstes schauen wir uns einen Beweis der Aussage an: Die Innenwinkelsumme in einem Dreieck ist 180°.

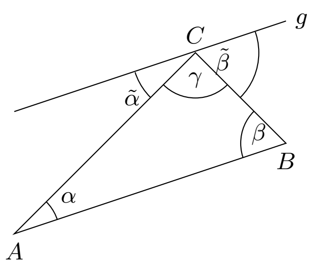
'Beispielbeweis':



$\alpha + \beta + \gamma = 180°$

Wenn man versteht, was der Autor damit sagen will, kommt man wahrscheinlich darauf, dass das richtig ist. Ist aber als Leser gar nicht meine Aufgabe - ist hier schließlich keine Kunstinterpretation! Der Autor muss das so darlegen, dass ich das möglichst problemlos verstehen kann. D.h. er/sie muss mir sagen, was gemacht wird und warum das richtig ist. Hier könnte das wie folgt aussehen:

Beweis. Das Dreieck sei ABC und α, β bzw. γ seien dessen Innenwinkel in A, B bzw. C. Sei g die Parallele zur Geraden durch A und B, welche durch C geht. Außerdem seien $\tilde{\alpha}$ und $\tilde{\beta}$ die Winkel wie im Bild.



Dann ist $\alpha = \tilde{\alpha}$, da es sich um Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen handelt. Genauso ist $\beta = \tilde{\beta}$. Da $\tilde{\alpha}$, γ und $\tilde{\beta}$ zusammen den gestreckten Winkel bei C bilden, gilt damit

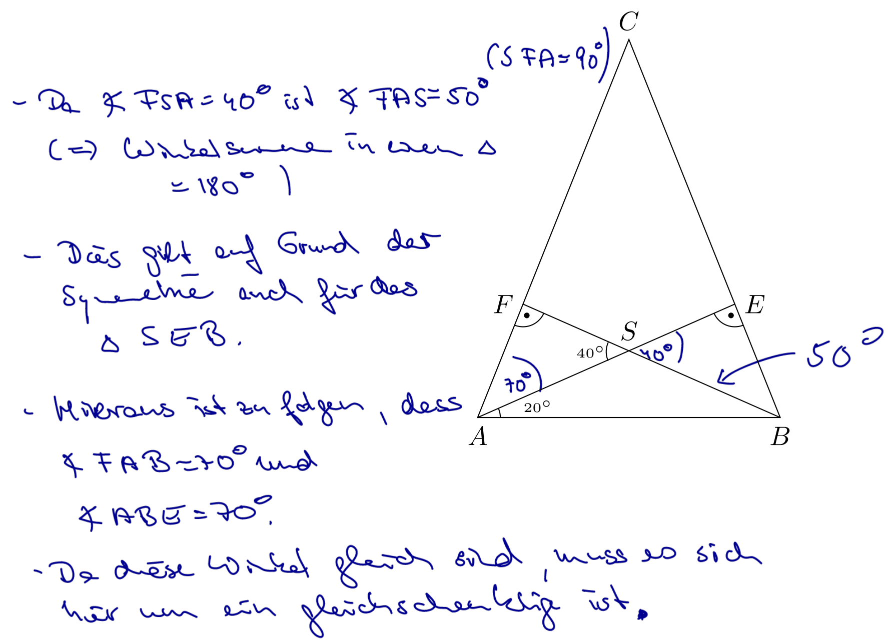
$$180° = \tilde{\alpha} + \gamma + \tilde{\beta} = \alpha + \gamma + \beta. \qquad \square$$

Als ein anderes Beispiel schauen wir uns die folgende Aufgabe an:

Im Dreieck ABC schneiden sich die Höhen AE und BF im Punkt S. Es ist $\sphericalangle FSA = 40°$ und $\sphericalangle SAB = 20°$. Beweisen Sie, dass das Dreieck ABC gleichschenklig ist.

Sie war eine Aufgabe in der TIMSS-Studie, und die folgenden drei Lösungen sollen wohl wirklich von Schüler erbracht worden seien:

Beispiel – Schülerlösung 1



- Generell ein *falscher Beweis*: Im dritten Schritt wird schon, dass was zu zeigen ist, angenommen. Wahrscheinlich bezieht sich das 'Hieraus ist zu folgen', darauf, dass angenommen wird, dass das Dreieck symmetrisch bzgl. einer Achse durch C ist. Wird aber nicht klar. Doch dann wäre es ein klassischer Zirkelschluss.*

Zu den einzelnen Schritten:

- $\sphericalangle FAS = 50°$ ist richtig. Argumentation ist nicht gut: $\Longrightarrow$ wird in die falsche Richtung benutzt. Es sollte heißen: Da die Winkelsumme in einem Dreieck 180° ist und $\sphericalangle FSA = 40°$ ist und der Winkel $\sphericalangle SFA$ ein rechter ist, ist $\sphericalangle FAS = 50°$.

*So nennt man es, wenn man, dass was man zeigen will, in Wirklichkeit schon als wahr benutzt. Das ist dann kein Beweis mehr.

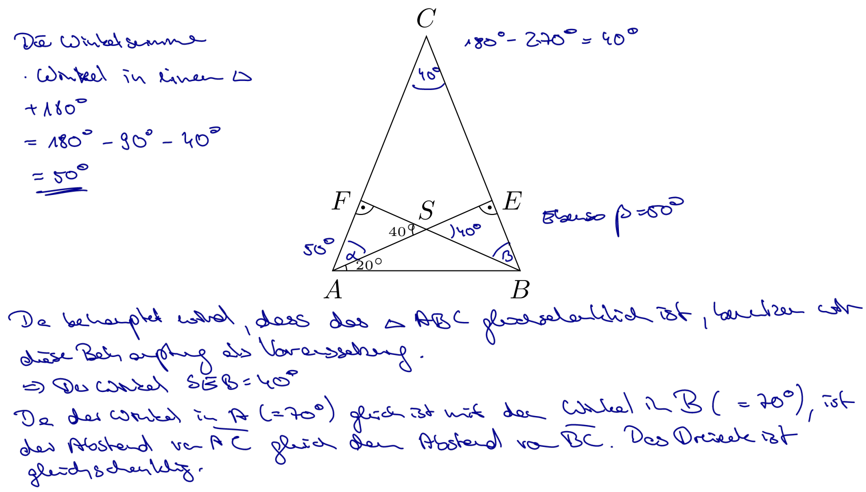
- Hier ist nicht klar, welche Symmetrie hier vorliegen soll. Verwendet man vielleicht schon, dass das Dreieck gleichschenklig ist. Besser: $\sphericalangle ESB = 40°$, da er Scheitelwinkel von $\sphericalangle FSA$ ist. Damit haben wir in Dreieck ESB die gleiche Situation wie in Dreieck SEB und erhalten $\sphericalangle SEB = 50°$.

- Zum dritten Schritt s. oben.

- Hätte man gezeigt, dass $\sphericalangle FAB = \sphericalangle ABE$ ist, stimmt der vierte Schritt.

Ansonsten ist de 70° Winkel bei A schlecht/falsch eingezeichnet.

Beispiel – Schülerlösung 2



Generell ein *falscher Beweis*: 'Da behauptet wird, dass das ΔABC gleichschenklig ist, benutzen wir diese Behauptung als Voraussetzung.' geht natürlich nicht. Man kann nicht mit der zu beweisenden Aussage anfangen. Aber vielleicht ist das hier nur falsch formuliert und der Schüler benutzt das gar nicht? Der nächste Satz fängt zwar mit ' $\Longrightarrow$ ' an, ist aber gar keine Folgerung aus dem vorhergehenden. Die richtige Begründung wäre Scheitelwinkel zu $\sphericalangle FSA$.

Aber im nächsten Satz wird die Voraussetzung benutzt, um zu sagen, dass der Winkel bei A gleich dem Winkel bei B ist. Das heißt, es ist wirklich ein falscher Beweis.

Das der Winkel bei A wirklich 70° wird prinzipiell oben links gezeigt – auch wenn es nicht gut aufgeschrieben ist. Das erste Gleichheitszeichen bedeutet eigentlich, dass das hinter dem Gleichheitszeichen gleich dem darüber sein müsste, also 180°. Das ist nicht richtig. Was hier einfach fehlt ist das α (s. Skizze) vor dem Gleichheitszeichen, damit man weiß, was hier eigentlich ausgerechnet wird.

Beispiel – Schülerlösung 3

$\overline{AC} = \overline{CB}$

$\sphericalangle CBA = \sphericalangle BAC$ ✓ $(70°)$

Da die beiden Winkel der Grundseite $\overline{AB}$ gleich sind, müssen auch die Strecken $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$ gleich sein.

Pythagoras:

$\overline{AD}^2 + \overline{DC}^2 = \overline{AC}^2$

$\overline{BD}^2 + \overline{DC}^2 = \overline{AB}^2$

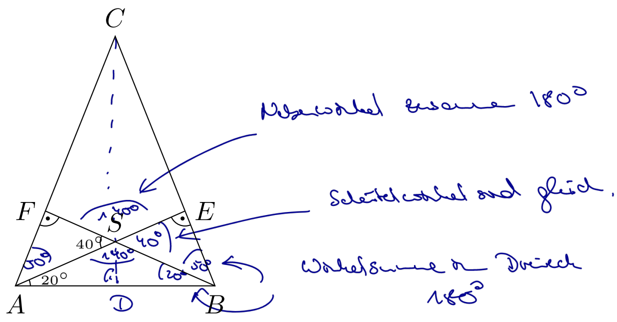
da $AD^2 = BD^2$ (Seitenhalbierende)

ist $AC^2 = BC^2$

da Längen positiv sind

$AC = BC$

↪ gleichschenklig



Wenn man sich das richtige herauspickt und den Rest ignoriert, ist es richtig.

Schauen wir genauer hin. Die ersten vier Zeilen, sehen eigentlich erst einmal nicht gut aus. Es sieht so aus, als ob hier wieder das verwendet wird, was in Wirklichkeit gezeigt werden soll. Das wäre schlecht. Wenn man das wohlwollend interpretiert, kann man sagen, dass das eigentlich bedeuten soll:

Es ist $\overline{AC} = \overline{CB}$ zu zeigen. Dazu zeigen wir, dass $\sphericalangle CBA = \sphericalangle BAC$ gilt. Denn wenn diese beiden Winkel gleich sind, ist das Dreieck gleichschenklig und die Strecken $\overline{AC}$ und $\overline{CB}$ müssen gleich sein und wir wären fertig.

Dann wäre das eine Einstimmung des Lesers darauf, was gleich passieren soll. Steht da aber nicht.

Schauen wir nun links vom Dreieck. Da steht was von Pythagoras. Der Punkt D taucht nur im Bild auf und mit dem rechte Winkel zeichnen, suggeriert das, dass $\overline{CD}$ wahrscheinlich die Höhe sein soll. Dann sollte man das einfach auch hinschreiben. Dann stimmt die Anwendung des Pythagoras auf die beiden entstandenen rechtwinkligen Dreiecke. (Wird am Ende nicht helfen, wäre aber als einzelnes Argument aber richtig. Die nächste Zeile 'Da $AD^2 = BD^2$ (Seitenhalbierende), ist...' scheint sagen zu wollen, dass $AD^2 = BD^2$ ist, weil $\overline{CD}$ Seitenhalbierende ist. Aber wir hatten $\overline{CD}$ als Höhe eingeführt und die ist nur dann gleich der Seitenhalbierenden, wenn das Dreieck schon gleichschenklig ist. D.h. hier benutzt man (versteckt) schon die Behauptung. Ist also falsch! Der Teil links vom Dreieck ist also falsch, da schon benutzt wird, was zu zeigen ist.

Bleiben die Stichpunkte rechts vom Bild. Das ist richtig, wenn man es in der richtigen Reihenfolge liest und mehr Text schreibt:

Der Winkel $\sphericalangle ESB$ *ist Scheitelwinkel zu* $\sphericalangle FSA$ *und damit auch* $40°$*. Der Winkel* $\sphericalangle ASB$ *ist Nebenwinkel zu* $\sphericalangle FSA$*. Da sich Nebenwinkel zu* $180°$ *addieren, ist* $\sphericalangle ASB = 140°$*. Benutzen wir in den Dreiecken* FSA*,* ESB *und* ASB *jeweils, dass die Innenwinkelsumme* $180°$ *sein muss, erhalten wir* $\sphericalangle FAS = 50°$*,* $\sphericalangle ESB = 50°$ *und* $\sphericalangle ABS = 20°$*. Damit ist* $\sphericalangle FAB = 50° + 20° = \sphericalangle CBA$*.*

Die schräg gedruckten Passagen ergeben insgesamt den richtigen (und ausformulierten) Teil dieser Lösung.

Strenggenommen haben wir also drei falsche Lösungen gesehen, wobei man aus der dritten aber 'noch was machen konnte'.

An sich ist 'Fehler machen' kein Problem. Es ist sogar wichtig und hilfreich, so lange man die Fehler erkennt, sich überlegt, was falsch gelaufen ist, es beim nächsten Mal besser macht und somit insgesamt weniger Fehler macht.

Die einzige Möglichkeit nie Fehler zu machen, ist es, einfach nie irgendwas zu machen. Aber in Wirklichkeit ist das der größte Fehler.

Das Wichtigste ist dran bleiben! Mit der Zeit wird es besser.