Übungsblatt 2

Aufgabe 10. Beweisen Sie, dass das Produkt von fünf aufeinanderfolgenden Zahlen durch 120 teilbar ist.

Aufgabe 11.

(i) Seien p und q natürliche Zahlen, die als einzigen gemeinsamen Teiler 1 haben. Beweisen Sie, dass $p^2 = 2q^2$ nicht gelten kann.

(ii) Beweisen Sie, dass $\sqrt{2}$ keine rationale Zahl ist.

Aufgabe 12. Gilt für drei teilerfremde[1] natürliche Zahlen a, b, c der Satz für Pythagoras ($a^2 + b^2 = c^2$), so nennt man a, b, c ein *pythagoreisches Zahlentripel*. Wir wollen uns in dieser Aufgabe in kleinen Schritten der Frage nähern, wie man alle pythagoreischen Zahlentripel finden kann.

(i) Rechnen Sie nach, dass

a) $3, 4, 5$,

b) $5, 12, 13$,

c) $8, 15, 17$

d) und $7, 24, 25$

pythagoreische Zahltripel sind.

(ii) Sei a, b, c ein pythagoreisches Zahlentripel. Um pythagoreische Zahlentripel zu berechnen, muss zunächst eine Möglichkeit gefunden werden, um a, b, c auszudrücken.

(a) Zeigen Sie zuerst, dass für $a = r^2 - s^2$, $b = 2rs$ und $c = r^2 + s^2$ mit $r > s$, r und s natürliche Zahlen, das Tripel $a^2 + b^2 = c^2$ erfüllt. Ist es damit automatisch ein pythagoreisches Zahlentripel?

Die nächsten Schritte sollen zeigen, dass bis auf gemeinsame Teiler von a und b und Vertauschen von a und b alle pythagoreischen Zahlentripel diese Form haben:

Sei also nun a, b, c ein pythagoreisches Zahlentripel. Seien x und y zwei teilerfremde natürliche Zahlen mit $x > y$, für die gilt:

$$a = x - y \text{ und } c = x + y \tag{1}$$

[1] d.h. die Zahlen haben als einzigen gemeinsamen Teiler 1.

oder

$$b = x - y \text{ und } c = x + y$$

(b) Gibt es solche x und y immer? Wenn ja, warum?

Im Folgenden gelte (1).

(c) Rechnen Sie nach, dass dann $xy = (b/2)^2$ ist.

(d) Müssen x und y Quadratzahlen sein, d.h. existieren natürliche Zahlen r und s, so dass $x = r^2$ und $y = s^2$ ist?

(e) Ersetzen Sie x durch r^2 und y durch s^2 und beweisen Sie, dass

$$a = r^2 - s^2, \quad b = 2rs, \quad c = r^2 + s^2$$

gilt.

Sind wir nun fertig? Was haben wir eigentlich insgesamt gezeigt? Was könnte man sich dazu noch fragen?