# Übungsblatt 4

Was stimmt hier, was stimmt nicht? Wo liegen die Fehler? Was ist einfach nur unglücklich geschrieben? Was stimmt zwar, aber mehr Details wären hilfreich....? Wie kann man die Sachen ggf. korrigieren?

**Aufgabe 16.**

$$\begin{aligned} & a = b \\ \Longrightarrow\ & a^2 = ab \\ \Longrightarrow\ & 2a^2 = a^2 + ab \\ \Longrightarrow\ & 2a^2 - 2ab = a^2 - ab \\ \Longrightarrow\ & 2(a^2 - ab) = a^2 - ab \\ \Longrightarrow\ & 2 = 1 \end{aligned}$$

**Aufgabe 17.**

$$\begin{aligned} & -2 = -2 \\ \Longrightarrow\ & 4 - 6 = 1 - 3 \\ \Longrightarrow\ & 4 - 6 + \frac{9}{4} = 1 - 3 + \frac{9}{4} \\ \Longrightarrow\ & \left(2 - \frac{3}{2}\right)^2 = \left(1 - \frac{3}{2}\right)^2 \\ \Longrightarrow\ & 2 - \frac{3}{2} = 1 - \frac{3}{2} \\ \Longrightarrow\ & 2 = 1 \end{aligned}$$

**Aufgabe 18.** Zeige, dass $\sqrt{2} + \sqrt{6} < \sqrt{15}$.

*Beweis.*

$$\begin{aligned} & \sqrt{2} + \sqrt{6} < \sqrt{15} \\ \Longrightarrow\ & \left(\sqrt{2} + \sqrt{6}\right)^2 < 15 \\ \Longrightarrow\ & 8 + 2\sqrt{12} < 15 \\ \Longrightarrow\ & 2\sqrt{12} < 7 \\ \Longrightarrow\ & 48 < 49 \end{aligned}$$ $\square$

**Aufgabe 19.** Ein Paar reeller Zahlen $(x, y)$ nennen wir *erlaubt*, wenn $x - y$ eine ganze Zahl ist. Zeigen Sie: Sind $(x, y)$ und $(y, z)$ erlaubt, dann auch $(x, z)$.

*Beweis.* Sind $(x, y)$ und $(y, z)$ erlaubt, dann auch $(x, z)$. Seien $x, y, z$ ganze Zahlen und seien $(x, y)$ und $(y, z)$ erlaubt. Dann wissen wir, dass $x - y$ und $y - z$ ganze Zahlen sind. Seien $k, c$ ganze Zahlen
$x - y = k$
$y - z = c$
$y = c + z$
$x - (c + z) = k$
$x - z = k + c.$
Da $k + c$ eine ganze Zahl ist, ist $(x, z)$ erlaubt. □

**Aufgabe 20.** Wir wollen alle Lösungen von $\sqrt{2x + 12} - 2 = x$.

Addition mit zwei ergibt $\sqrt{2x + 12} = x + 2$ und quadrieren $2x + 12 = x^2 + 4x + 4$. Also ist $x^2 + 2x - 8$. Anwenden der Lösungsformel für quadratische Gleichungen gibt als Lösungen $x = 2$ und $x = -4$.

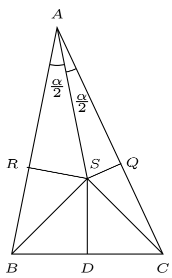
**Aufgabe 21.** Seien $a$ und $b$ natürliche Zahlen, so dass $a$ bei Division durch 3 den Rest 1 lässt und $b$ bei Division durch 3 den Rest 2 lässt. Dann ist $a + b$ durch 3 teilbar.

*Beweis.* Da $a$ bei Division durch 3 den Rest 1 lässt, gibt es eine natürliche Zahl $k$ mit $a = 3k + 1$. Da $b$ bei Division durch 3 den Rest 2 lässt, gibt es eine natürliche Zahl $k$ mit $b = 3k + 2$. Also ist $a + b = 6k + 3 = 3(2k + 1)$ und damit durch 3 teilbar. □

**Aufgabe 22.** Sei ein Kreis gegeben und ein Punkt $P$, der nicht auf dem Kreis und nicht in seinem Mittelpunkt liegt. Unter allen Punkten auf dem Kreis gibt es keinen, der unter diesen zu $P$ den kleinsten Abstand hat.

*Beweis.* Der Kreis habe den Mittelpunkt $M$ und den Radius $b$. Sei $P$ der Punkt, zu dem der nächste Punkt auf dem Kreis gesucht wird. In den Punkt $P$ wird der Ursprung eines kartesischen Koordinatensystems gelegt, dessen $x$-Achse durch den Mittelpunkt $M$ geht. Die $x$-Koordinate von $M$ sei $a$. Für einen Punkt $R = (x, y)$ auf dem Kreis gilt nach dem Satz von Pythagoras: $(x-a)^2 + y^2 = b^2$ und damit $x^2 + y^2 - 2ax + a^2 - b^2 = 0$. Das Abstandsquadrat zwischen $P$ und $R$ ist nach Pythagoras $r^2 = x^2 + y^2$. Eingesetzt wird daraus: $r^2 - 2ax + a^2 - b^2 = 0$. Der Abstand $PR$ ist extremal, wenn die Ableitung $r'(x) = 0$ ist. Ableitung nach $x$ gibt $2rr' - 2a = 0$ , also $r' = a/r$, weil $P$ nach Voraussetzung nicht auf dem Kreis liegt und daher $r \neq 0$ ist. Die Bedingung $r' = 0$ ist also erfüllt, wenn $a = 0$ ist, also $P = M$ gilt. Für alle Punkte, die nicht auf dem Kreis aber außerhalb des Mittelpunkts des Kreises liegen, gibt es keinen nächsten Punkt auf dem Kreis. □

**Aufgabe 23.** Alle Dreiecke sind gleichschenklig.




*Beweis.* Gegeben sei ein beliebiges Dreieck $ABC$ wie im Bild oben. Sei $m$ die Winkelhalbierende des Innenwinkels bei A. Die Mittelsenkrechte der Seite $BC$ schneide diese im Punkt $D$ und die Winkelhalbierende $m$ im Punkt $O$. Die Dreiecke $BDO$ und $COD$ sind kongruent, weil die Seitenlängen $DO$ und $BD$ bzw. $CD$ gleich sind und die Innenwinkel in $D$ übereinstimmen. Deshalb gilt $BO = CO$. Sei $R$ der Fußpunkt des Lotes von $O$ auf die Seite $AB$ und $Q$ der Fußpunkt des Lotes von $O$ auf die Seite $AC$. Die Dreiecke $ARO$ und $AOQ$ sind nach dem SWW-Kongruenzsatz deckungsgleich, weil die Hypotenuse $AO$, ein anliegender Winkel in $A$ und der gegenüberliegende Winkel in $R$ bzw. $Q$ als rechte Winkel übereinstimmen. Deshalb ist $AR = AQ$ und $OR = OQ$. Die Dreiecke $BOR$ und $CQO$ sind kongruent, weil $BO = CO$ sowie $OR = OQ$ und sie in jenem Winkel übereinstimmen, der der längeren Seite gegenüberliegt. Denn der rechte Winkel in $R$ bzw.$Q$ liegt der Hypotenuse der betrachteten Dreiecke $BOR$ und $CQO$ gegenüber. Also ist auch $BR = CQ$. Insgesamt haben wir also $AB = AR + BR = AQ + CQ = AC$. □