Vorkurs Ksenia Fedosova, Nadine Große
WS 21/22

Übungsblatt 1

Aufgabe 1

Nehmen Sie an, dass Schweine niemals fliegen können. Zeigen Sie, dass die Aussage "Wenn Schweine fliegen könnten, dann wäre $2 + 2 = 5$." wahr ist.

Aufgabe 2

Der Wolf, der Fuchs und der Bär stritten darüber, wer der Klügste sei. Jeder von ihnen gab eine Erklärung ab:

- Fuchs: "Ich bin schlauer als Bär".
- Bär: "Der Fuchs ist nicht der schlauste".
- Wolf: "Der Fuchs ist schlauer als ich".

Es ist bekannt, dass genau eines der Tiere das schlauste ist und das schlauste Tier gelogen hat. Welches ist das schlauste Tier?

Aufgabe 3

A, B und C werden verdächtigt, ein Auto gestohlen zu haben. Bei der Vernehmung gaben sie Folgendes an:

- A: "B lügt."
- B: "C lügt."
- C: "A und B lügen beide."

Nehmen wir an, Schuldige lügen und Unschuldige sagen die Wahrheit. Welche der drei sind schuldig, das Auto gestohlen zu haben?

Aufgabe 4

B, J und S wurden angeklagt und geben unter Eid folgende Aussagen ab:

- B: "J ist schuldig und S ist unschuldig."
- J: "Wenn B schuldig ist, dann ist S schuldig."
- S: "Ich bin unschuldig, aber mindestens einer von den Anderen ist schuldig."

Beantworten Sie folgende Fragen:

1. Die Aussage eines Angeklagten folgt aus der Aussage eines anderen; Von wessen Zeugnis sprechen wir?
2. Unter der Annahme, dass die Aussagen aller Angeklagten korrekt sind, geben Sie an, wer schuldig ist und wer ist unschuldig,
3. Wenn der Unschuldige die Wahrheit sagt und der Schuldige lügt, wer ist dann schuldig, und wer ist unschuldig?

Aufgabe 5

An welchen Wochentagen ist die folgende Aussage wahr?

1. "Wenn heute Dienstag ist, dann ist morgen Montag."
2. "Wenn heute Montag ist, dann ist morgen Dienstag."

Aufgabe 6

Erstellen Sie Wahrheitstabellen für die folgenden Aussagen:

1. $\neg X \Rightarrow X$,
2. $(X \Rightarrow Y) \vee (Y \Rightarrow X)$,
3. $((X \wedge \neg Y) \Rightarrow Y) \Rightarrow (X \vee Y)$,
4. $((\neg X \iff Y) \Rightarrow X) \wedge Y$,
5. $(X \wedge Y \wedge Z) \vee (X \wedge \neg Y \wedge Z) \vee (X \wedge Y \wedge \neg Z)$.

Aufgabe 7

Finden Sie Funktionen f, g und h, so dass die folgende Tabelle stimmt. D.h. finden Sie logische Ausdrücke in den Aussagen X, Y nur unter Verwendung von $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\implies$ und $\Leftrightarrow$. Formulieren Sie die von Ihnen gefunden Ausdrücke auch in 'normaler Sprache'.

X	Y	f(X,Y)	g(X,Y)	h(X,Y)
f	f	w	w	f
f	w	w	f	f
w	f	f	w	w
w	w	w	f	f

Aufgabe 8

Finden Sie Funktionen f und g, so dass gilt:

X	Y	Z	f(X,Y, Z)	g(X,Y, Z)
f	f	f	f	w
f	f	w	f	f
f	w	f	f	w
f	w	w	f	f
w	f	f	f	w
w	f	w	w	f
w	w	f	f	w
w	w	w	w	f

Aufgabe 9

Skizzieren Sie alle Punkte der xy-Ebene, für die gilt:

1. $x \geq 0$,
2. $(x \geq 0) \vee (y \geq 0)$,
3. $(x \geq 0) \wedge (y \geq 0)$
4. $(x \geq 0) \Rightarrow (y \geq 0)$,
5. $(x \geq 0) \iff (y \geq 0)$.

Aufgabe 10

Seien x und y reelle Zahlen. Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch?

1. $\forall x\ \forall y:\ x = y^2$,
2. $\exists y\ \exists x:\ x = y^2$,
3. $\forall x\ \exists y:\ x = y^2$,
4. $\exists y\ \forall x:\ x = y^2$

Aufgabe 11

Seien x, b, p, q, a, c reelle Zahlen. Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch?

1. $\exists b\ \forall x:\ (x > 0) \vee (x < b)$,
2. $\forall p\ \exists q\ \forall x:\ x^2 + px + q \geq 0$,
3. $\forall a\ \exists b\ \forall z:\ (z > b) \Rightarrow (z^2 > a)$,
4. $\forall a\ \forall b\ \exists c\ \forall x:\ (x < c) \Rightarrow (x - a)(x - b) > 0$

Aufgabe 12

Schreiben Sie jede der folgenden Argumentationen in logischer Notation auf. D.h. identifizieren Sie die einzelnen Teilaussagen und die logischen Operationen. Ist die jeweilige Argumentation richtig (unabhängig von irgendwelchen Zusatzinfos oder sonstigem Wissen, wie z.B. Wahrheitsgehalten der einzelnen Teilaussagen).

1. Wenn ich zum Abendessen Schokolade esse, habe ich abends Bauchschmerzen. Ich hatte heute Abend Bauchschmerzen. Deshalb habe ich zum Abendessen Schokolade gegessen.
2. Ich kann nicht aufhören, von dieser Schokolade zu naschen. Entweder liebe ich Schokolade wirklich sehr, oder es fehlt mir ernstlich an Willenskraft. Ich weiß, dass ich Schokolade wirklich liebe; an Willenskraft kann es mir also nicht fehlen.
3. Die Löhne werden nur steigen, wenn es Inflation gibt. Bei Inflation steigen die Lebenshaltungskosten. Die Löhne steigen. Folglich steigen die Lebenshaltungskosten.
4. In jedem rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat der längsten Seite gleich der Summe der Quadrate der anderen beiden Seiten ist. Das Dreieck mit den Seiten $3, 4, 5$ ist also rechtwinklig.
5. Sei $x + 3 = \sqrt{3 - x}$. Dann gilt
$$x^2 + 6x + 9 = 3 - x$$
genau dann, wenn $(x + 6)(x + 1) = 0$ ist. Daraus folgt, dass $x = -6$ oder $x = -1$ ist. Damit folgt aus $x = -6$, dass $x + 3 = \sqrt{3 - x}$ ist.

Aufgabe 13

Vor dem Probanden liegen vier Karten. Sie zeigen E, K, 4, 7. Jede Karte hat einen Buchstaben auf der einen und eine Zahl auf der anderen Seite. Der Versuchsleiter behauptet: "Wenn auf der einen Seite der Karte ein Vokal ist, dann ist auf der anderen Seite eine gerade Zahl." Welche zwei Karten[1] muss die Testperson umdrehen, um die Regel zu überprüfen?

[1] Dies ist ein klassisches Problem, das als "Wason selection task" bekannt ist. Seien Sie beim Antworten vorsichtig – im ursprünglichen Experiment haben weniger als 10 % der Personen richtig geantwortet!

Aufgabe 14

Zwei Personen erhielten jeweils ein Blatt Papier. Auf jedem Blatt Papier steht eine natürliche Zahl. Die Zahlen unterscheiden sich um eins, und beide Personen wissen dies. Dann fand folgendes Gespräch statt:

1. - Erstens: "Ich kenne Ihre Nummer nicht."
   - Zweitens: "Ich kenne Ihre Nummer auch nicht."
   - Erstens: "Dann weiß ich, was Ihre Nummer ist."
   - Zweitens: "Dann weiß ich auch, was Ihre Nummer ist."

   Welche Zahlen stehen auf jedem Blatt Papier?

   Hinweis: Nach dem ersten Satz wissen beide Personen, dass die Zahl auf dem Blatt der ersten Person nicht 0 ist.

   Hinweis: Es gibt zwei mögliche Antworten.

2. - Erstens: "Ich kenne Ihre Nummer nicht."
   - Zweitens: "Ich wusste (bevor Sie es gesagt haben), dass Sie meine Nummer nicht kannte."
   - Erstens: "Dann weiß ich, was Ihre Nummer ist."
   - Zweitens: "Dann weiß ich auch, was Ihre Nummer ist."

   Welche Zahlen stehen auf jedem Blatt Papier?

Aufgabe 15

Eine Schachtel enthält Stifte unterschiedlicher Länge und sie enthält Bleistifte in verschiedenen Farben. Beweisen Sie, dass es Stifte gibt, die sich *gleichzeitig* in der Länge und nach Farbe unterscheiden.