Vorkurs

Ksenia Fedosova, Nadine Große
WS 21/22

Übungsblatt 2

Aufgabe 1

Cowboy Bill ging in eine Bar und bat den Barkeeper um eine 6-Euro-Flasche Whisky und drei Schachteln wasserfeste Streichhölzer, deren Preis er nicht kannte. Der Barkeeper verlangte von ihm 11.50 Euro, woraufhin Bill einen Revolver herauszog. Eillig berechnete der Barkeeper den Kaufpreis neu und korrigierte den Fehler. Woher aber wusste Bill, dass der Barkeeper ihn betrügen wollte?

Aufgabe 2

Ist die Zahl 123456789 eine Primzahl? Wird sich die Antwort ändern, wenn wir die Ziffernreihenfolge ändern?

Aufgabe 3

Beweisen Sie, dass das Produkt von fünf aufeinanderfolgenden Zahlen durch 120 teilbar ist.
Hinweis: Sie dürfen folgendes benutzen: Seien a, b, c natürliche Zahlen. Außerdem haben a und b nur die 1 als gemeinsamen Teiler. Sei a ein Teiler von c und auch b ein Teiler von c. Dann ist ab ein Teiler von c ist.*

Aufgabe 4

1. Seien p und q natürliche Zahlen, die als einzigen gemeinsamen Teiler 1 haben. Beweisen Sie, dass $p^2 = 2q^2$ nicht gelten kann.
2. Beweisen Sie, dass $\sqrt{2}$ keine rationale Zahl ist.

*Stimmt diese Aussage auch, wenn a und b nicht nur die 1 als gemeinsamen Teiler haben dürfen?

Aufgabe 5

Gilt für drei teilerfremde* natürliche Zahlen a, b, c der Satz für Pythagoras ($a^2 + b^2 = c^2$), so nennt man a, b, c ein *pythagoreisches Zahlentripel*. Wir wollen uns in dieser Aufgabe in kleinen Schritten der Frage nähern, wie man alle pythagoreischen Zahlentripel finden kann.

1. Rechnen Sie nach, dass
   a) $3, 4, 5$,
   b) $5, 12, 13$,
   c) $8, 15, 17$
   d) und $7, 24, 25$

   pythagoreische Zahltripel sind.

2. Sei a, b, c ein pythagoreisches Zahlentripel. Um pythagoreische Zahlentripel zu berechnen, muss zunächst eine Möglichkeit gefunden werden, um a, b, c auszudrücken.
   (i) Zeigen Sie zuerst, dass für $a = r^2 - s^2$, $b = 2rs$ und $c = r^2 + s^2$ mit $r > s$, r und s natürliche Zahlen , das Tripel a, b, c ein pythagoreisches Zahlentripel ist.

   Die nächsten Schritte sollen zeigen, dass bis auf gemeinsamte Teiler von a und b und Vertauschen von a und b alle pythagoreischen Zahlentripel diese Form haben:

   Sei also nun a, b, c ein pythagoreisches Zahlentripel. Seien x und y zwei teilerfremde natürliche Zahlen mit $x > y$, für die gilt
   $$a = x - y, \quad c = x + y, \quad c^2 - a^2 = b^2.$$
   (ii) Gibt es solche x und y immer? Wenn ja, warum?.
   (iii) Rechnen Sie nach, dass dann $xy = (b/2)^2$ ist.
   (iv) Müssen x und y Quadratzahlen sein, d.h. existieren natürliche Zahlen r und s, so dass $x = r^2$ und $y = s^2$ ist?
   (v) Ersetzen Sie x durch r^2 und y durch s^2 und beweisen Sie, dass
   $$a = r^2 - s^2, \quad b = 2rs, \quad c = r^2 + s^2$$
   gilt.

Sind wir nun fertig? Was haben wir eigentlich insgesamt gezeigt?

*d.h. die Zahlen haben als einzigen gemeinsamen Teiler 1.

Aufgabe *

(Zusatz: also eher, für die, die den Rest schon können)

Eine Perfekte Zahl ist eine natürliche Zahl n, die gleich der Summe ihrer Teiler (ohne n selbst) ist. Im folgenden werden wir die Geraden Perfekten Zahlen charakterisieren.

(i) Beweisen Sie, dass für natürliche Zahlen a, b, k, gilt:

$$a^k - b^k = (a-b) \cdot \left(\sum_{j=0}^{k-1} a^j b^{k-1-j} \right).^*$$

(ii) Beweisen Sie: Wenn $2^p - 1$ Primzahl ist, so muss p Primzahl sein. (Hinweis benutzen Sie a) für $b = 1$ und a eine geeignete Zweierpotenz.)

Sei p eine Primzahl, so dass $2^p - 1$ auch eine Primzahl ist. Sei $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$. Dann hat n nur die Teiler

$$2^0, 2^1, 2^2, \ldots, 2^{p-1}$$

und

$$2^p - 1, 2(2^p - 1), \ldots, 2^{p-1}(2^p - 1).$$

(iii) Zeigen, dass n eine Perfekte Zahl ist.

Sei $\sigma(n)$ die Summe aller Teiler von n (das heißt einschließlich 1 und n selbst).

(iv) Zeigen Sie, dass n genau dann eine Perfekte Zahl ist, wenn $\sigma(n) = 2n$.

(v) Zeigen Sie, dass p genau dann eine Primzahl ist, wenn $\sigma(p) = p + 1$.

(vi) Sei n eine Gerade Perfekte Zahl und sei $n = 2^q m$, wobei m und q natürliche Zahlen sind und m gerade ist. Zeigen Sie, dass $\sigma(n) = \sigma(m)(2^{q+1} - 1) = 2^{q+1} m$ ist und daraus folgtm dass $2^{q+1} - 1$ dann m teilt.

(vii) Sei jetzt $m = d(2^{q+1} - 1)$ mit $d > 1$. Zeigen Sie, dass

$$\sigma(m) \geq m + d + 1$$

und

$$\sigma(n) \geq (m + d + 1)(2^{q+1} - 1).$$

Folgern Sie daraus, dass

$$2^{q+1} d(2^{q+1} - 1) \geq (d(2^{q+1} - 1) + d + 1)(2^{q+1} - 1) \iff 0 \leq 1.$$

Setzen Sie alles zusammen, um zu sehen, dass alle Geraden Perfekten Zahlen sich in der Form $2^{p-1}(2^p - 1)$ darstellen lassen.

*Es ist $\sum_{j=0}^{k-1} a^j b^{k-1-j} = b^{k-1} + ab^{k-2} + a^2 b^{k-3} + \ldots + a^{k-3} b^2 + a^{k-2} b + a^{k-1}$.