**Vorkurs** Ksenia Fedosova, Nadine Große
WS 21/22

# Übungsblatt 3

## Aufgabe 1

Nina und Olaf spielen folgendes Spiel. Sie starten mit einer Zahl und in jedem Zug muss einer der Spieler eine Quadratzahl von der Zahl subtrahieren. Gezogen wird abwechseld, Nina beginnt und gewonnen hat der Spieler, der die letzte Subtraktion durchführt. Ein Beispiel wäre: Wenn sie mit der Zahl 5 starten, kann Nina entweder 1 oder 4 subtrahieren und erhält dann entweder 4 oder 1. In beiden Fällen wäre es eine Quadratzahl, so dass Olaf durch deren Subtraktion einen Sieg erzielen könnte.
Für welche Startzahlen zwischen 1 und 20 kann Nina durch eine geeignete Strategie immer einen Sieg erzielen und für welche Startzahlen hat sie diese Möglichkeit nicht? Begründen Sie!

## Aufgabe 2

Paula und Quentin spielen folgendes Spiel: Vor ihnen liegen 3 Haufen, einer mit 2 Stäbchen, einer mit 3 Stäbchen und einer mit 4 Stäbchen. Die Spieler ziehen abwechselnd, Paula beginnt. In jedem Zug darf ein Spieler von <u>einem</u> Haufen eine beliebige Anzahl von Stäbchen nehmen (aber immer mindestens eines). Der Spieler, der das letzte Stäbchen nehmen muss, verliert.
Paula kann dieses Spiel immer gewinnen. Was muss dann ihr erster Zug sein? Begründen Sie.

## Aufgabe 3

Uwe und Verena spielen ein Spiel. Vor Ihnen liegen wieder mehrere Haufen mit Stäbchen. In jedem Zug darf man von <u>einem</u> Haufen beliebig viele Stäbchen (jedoch mindestens eins) nehmen oder einen anderen Haufen in zwei neue Haufen (mit mindestens jeweils einem Stäbchen) zerteilen. Gewonnen hat der Spieler, der das letzte Stäbchen nimmt. Uwe beginnt. Gezogen wird abwechselnd.

a) Wer kann immer gewinnen, wenn nur ein Haufen da ist?

b) Es liegen jetzt zwei Haufen auf dem Tisch mit jeweils einer Stäbchenanzahl von maximal 5. Überlegen Sie sich, bei welchen Ausgangsstellungen, Uwe immer gewinnen kann. Begründen Sie.

c) Angenommen wir haben zwei Ausgangsstellungen, die Verluststellungen sind, das heißt wenn Verena die richtige Strategie hat, kann Uwe keinesfalls gewinnen. Dann können wir beide zusammen auf den Tisch legen und erhalten eine neue Ausgangsstellung (z.B. erste Ausgangsstellung sind zwei Haufen mit jeweils einem Stäbchen und die zweite sind zwei Haufen mit jeweils zwei Stäbchen. Dann bestünde die neue Ausgangsstellung aus 4 Haufen, von denen zwei ein Stäbchen enthalten und die beiden anderen Haufen jeweils zwei Stäbchen.) Überlegen Sie sich und begründen Sie, dass die neue Ausgangsstellung dann auch eine Verluststellung ist.

d) Wie sollte der erste Zug von Uwe aussehen (um sicher gewinnen zu können), wenn vor ihm drei Haufen mit 2, 5 und 7 Stäbchen liegen? Begründen Sie!

## Aufgabe 4

Wendelin und Xanthia spielen ein Spiel. Auf einem karierten Blatt Papier haben sie ein $(n, m)$-Rechteck (das ist ein Rechteck mit $n$ Zeilen und $m$ Spalten gezeichnet. Die Spieler streichen wie folgt abwechselnd Felder ab: Der Spieler, der am Zug ist, wählt eines der noch nicht abgestrichenen Felder. Er muss dann alle Felder abstreichen, die in dem Rechteck liegen, welches von seinem gewählten Feld als obere Ecke und dem rechten unteren Feld des Ausgangsrechteck gebildet wird. Der Spieler, der das linke obere Feld abstreichen muss, verliert. Wendelin beginnt. Kann Wendelin bei folgenden Ausgangsrechtecken immer einen Sieg erreichen: (1, n), (2, 2), (2, 3) und (3, 3)? Begründen Sie!

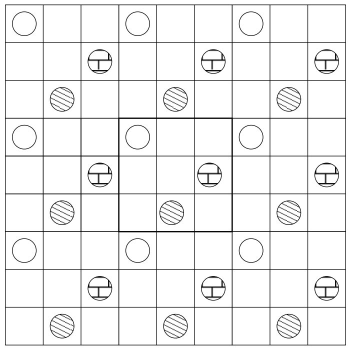
## Aufgabe 5

Wir spielen noch einmal Tic-Tac-Toe, aber mit veränderten Regeln: Die Spieler setzen noch immer abwechselnd (1.Spieler Kreuze, 2.Spieler Kreise) in ein $3 \times 3$-Quadrat. Gewonnen hat wieder der Spieler, der als erstes drei Felder in einer Reihe gesetzt hat. Doch dieses Mal verändern wir das Spielbrett noch ein bisschen:

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 |
| 4 | 5 | 6 |
| 7 | 8 | 9 |

Wir kleben den oberen Rand so an den unteren Rand, dass das Feld 1 nun Nachbar von Feld 7 ist, Feld 2 von Feld 8 und auch Feld 3 von Feld 9. Danach kleben wir auch noch den linken Rand an den rechten, so dass Feld 1 Nachbar von Feld 3 ist usw.

Anstatt sich das Spielbrett so zusammengeklebt vorzustellen, ist es vielleicht einfacher, sich dass Brett in der Ebene einfach mehrfach aneinander geklebt vorzustellen. Dann sieht man nun auch leicht, dass die im Bild durch die verschiedenen Kreise markierten Felder im Gegensatz zum normalen Tic-Tac-Toe (dem mitteleren $3 \times 3$-Quadrat) nun auf dem neuen (zusammengeklebten) Spielfeld in einer Reihe liegen.



Kann jetzt einer der Spieler einen Sieg erzwingen? Begründen Sie!

## Aufgabe *

Beim klassischen Nim-Spiel gibt es $k$ Haufen mit $n_1, n_2, \ldots, n_k$ Stäbchen. Zwei Spieler dürfen abwechselnd bei einem Haufen ein, zwei oder drei Stäbchen wegnehmen. Der Spieler, der das letzte Stäbchen wegnimmt, gewinnt.

Betrachten Sie zunächst $k = 4$, $n_1 = 1$, $n_2 = 3$, $n_3 = 5$ und $n_4 = 7$. Gibt es hier eine Gewinnstrategie für einen der Spieler?

Was ist im allgemeinen Fall?