
Übungsblatt 1

Aufgabe 1

Nehmen Sie an, dass Schweine niemals fliegen können. Zeigen Sie, dass die Aussage "Wenn Schweine fliegen könnten, dann wäre $2 + 2 = 5$." wahr ist.

Aufgabe 2

Der Wolf, der Fuchs und der Bär stritten darüber, wer der Klügste sei. Jeder von ihnen gab eine Erklärung ab:

- Fuchs: "Ich bin schlauer als Bär".
- Bär: "Der Fuchs ist nicht der schlauste".
- Wolf: "Der Fuchs ist schlauer als ich".

Es ist bekannt, dass genau eines der Tiere das schlauste ist und das schlauste Tier gelogen hat. Welches ist das schlauste Tier?

Aufgabe 3

A, B und C werden verdächtigt, ein Auto gestohlen zu haben. Bei der Vernehmung gaben sie Folgendes an:

- A: "B lügt."
- B: "C lügt."
- C: "A und B lügen beide."

Nehmen wir an, Schuldige lügen und Unschuldige sagen die Wahrheit. Welche der drei sind schuldig, das Auto gestohlen zu haben?

Aufgabe 4

B, J und S wurden angeklagt und geben unter Eid folgende Aussagen ab:

- B: "J ist schuldig und S ist unschuldig."
- J: "Wenn B schuldig ist, dann ist S schuldig."
- S: "Ich bin unschuldig, aber mindestens einer von den Anderen ist schuldig."

Beantworten Sie folgende Fragen:

1. Die Aussage eines Angeklagten folgt aus der Aussage eines anderen; Von wessen Zeugnis sprechen wir?
2. Unter der Annahme, dass die Aussagen aller Angeklagten korrekt sind, geben Sie an, wer schuldig ist und wer ist unschuldig,
3. Wenn der Unschuldige die Wahrheit sagt und der Schuldige lügt, wer ist dann schuldig, und wer ist unschuldig?

Aufgabe 5

An welchen Wochentagen ist die folgende Aussage wahr?

1. "Wenn heute Dienstag ist, dann ist morgen Montag."
2. "Wenn heute Montag ist, dann ist morgen Dienstag."

Aufgabe 6

Erstellen Sie Wahrheitstabellen für die folgenden Aussagen:

1. $\neg X \Rightarrow X$,
2. $(X \Rightarrow Y) \vee (Y \Rightarrow X)$,
3. $((X \wedge \neg Y) \Rightarrow Y) \Rightarrow (X \vee Y)$,
4. $((\neg X \iff Y) \Rightarrow X) \wedge Y$,
5. $(X \wedge Y \wedge Z) \vee (X \wedge \neg Y \wedge Z) \vee (X \wedge Y \wedge \neg Z)$.

Aufgabe 7

Finden Sie Funktionen f , g und h , so dass die folgende Tabelle stimmt. D.h. finden Sie logische Ausdrücke in den Aussagen X , Y nur unter Verwendung von \wedge , \vee , \neg , \implies und \iff . Formulieren Sie die von Ihnen gefunden Ausdrücke auch in 'normaler Sprache'.

X	Y	f(X,Y)	g(X,Y)	h(X,Y)
f	f	w	w	f
f	w	w	f	f
w	f	f	w	w
w	w	w	f	f

Aufgabe 8

Finden Sie Funktionen f und g , so dass gilt:

X	Y	Z	f(X,Y,Z)	g(X,Y,Z)
f	f	f	f	w
f	f	w	f	f
f	w	f	f	w
f	w	w	f	f
w	f	f	f	w
w	f	w	w	f
w	w	f	f	w
w	w	w	w	f

Aufgabe 9

Skizzieren Sie alle Punkte der xy -Ebene, für die gilt:

1. $x \geq 0$,
2. $(x \geq 0) \vee (y \geq 0)$,
3. $(x \geq 0) \wedge (y \geq 0)$
4. $(x \geq 0) \Rightarrow (y \geq 0)$,
5. $(x \geq 0) \iff (y \geq 0)$.

Aufgabe 10

Seien x und y reelle Zahlen. Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch?

1. $\forall x \forall y : x = y^2$,
2. $\exists y \exists x : x = y^2$,
3. $\forall x \exists y : x = y^2$,
4. $\exists y \forall x : x = y^2$

Aufgabe 11

Seien x, b, p, q, a, c reelle Zahlen. Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch?

1. $\exists b \forall x : (x > 0) \vee (x < b)$,
2. $\forall p \exists q \forall x : x^2 + px + q \geq 0$,
3. $\forall a \exists b \forall z : (z > b) \Rightarrow (z^2 > a)$,
4. $\forall a \forall b \exists c \forall x : (x < c) \Rightarrow (x - a)(x - b) > 0$

Aufgabe 12

Schreiben Sie jede der folgenden Argumentationen in logischer Notation auf. D.h. identifizieren Sie die einzelnen Teilaussagen und die logischen Operationen. Ist die jeweilige Argumentation richtig (unabhängig von irgendwelchen Zusatzinfos oder sonstigem Wissen, wie z.B. Wahrheitsgehalten der einzelnen Teilaussagen).

1. Wenn ich zum Abendessen Schokolade esse, habe ich abends Bauchschmerzen. Ich hatte heute Abend Bauchschmerzen. Deshalb habe ich zum Abendessen Schokolade gegessen.
2. Ich kann nicht aufhören, von dieser Schokolade zu naschen. Entweder liebe ich Schokolade wirklich sehr, oder es fehlt mir ernstlich an Willenskraft. Ich weiß, dass ich Schokolade wirklich liebe; an Willenskraft kann es mir also nicht fehlen.
3. Die Löhne werden nur steigen, wenn es Inflation gibt. Bei Inflation steigen die Lebenshaltungskosten. Die Löhne steigen. Folglich steigen die Lebenshaltungskosten.
4. In jedem rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat der längsten Seite gleich der Summe der Quadrate der anderen beiden Seiten ist. Das Dreieck mit den Seiten 3, 4, 5 ist also rechtwinklig.
5. Sei $x + 3 = \sqrt{3 - x}$. Dann gilt

$$x^2 + 6x + 9 = 3 - x$$

genau dann, wenn $(x + 6)(x + 1) = 0$ ist. Daraus folgt, dass $x = -6$ oder $x = -1$ ist. Damit folgt aus $x = -6$, dass $x + 3 = \sqrt{3 - x}$ ist.

Aufgabe 13

Vor dem Probanden liegen vier Karten. Sie zeigen E, K, 4, 7. Jede Karte hat einen Buchstaben auf der einen und eine Zahl auf der anderen Seite. Der Versuchsleiter behauptet: "Wenn auf der einen Seite der Karte ein Vokal ist, dann ist auf der anderen Seite eine gerade Zahl." Welche zwei Karten¹ muss die Testperson umdrehen, um die Regel zu überprüfen?

¹Dies ist ein klassisches Problem, das als "Wason selection task" bekannt ist. Seien Sie beim Antworten vorsichtig – im ursprünglichen Experiment haben weniger als 10 % der Personen richtig geantwortet!

Aufgabe 14

Zwei Personen erhielten jeweils ein Blatt Papier. Auf jedem Blatt Papier steht eine natürliche Zahl. Die Zahlen unterscheiden sich um eins, und beide Personen wissen dies. Dann fand folgendes Gespräch statt:

1.
 - Erstens: "Ich kenne Ihre Nummer nicht."
 - Zweitens: "Ich kenne Ihre Nummer auch nicht."
 - Erstens: "Dann weiß ich, was Ihre Nummer ist."
 - Zweitens: "Dann weiß ich auch, was Ihre Nummer ist."

Welche Zahlen stehen auf jedem Blatt Papier?

Hinweis: Nach dem ersten Satz wissen beide Personen, dass die Zahl auf dem Blatt der ersten Person nicht 0 ist.

Hinweis: Es gibt zwei mögliche Antworten.

2.
 - Erstens: "Ich kenne Ihre Nummer nicht."
 - Zweitens: "Ich wusste (bevor Sie es gesagt haben), dass Sie meine Nummer nicht kannte."
 - Erstens: "Dann weiß ich, was Ihre Nummer ist."
 - Zweitens: "Dann weiß ich auch, was Ihre Nummer ist."

Welche Zahlen stehen auf jedem Blatt Papier?

Aufgabe 15

Eine Schachtel enthält Stifte unterschiedlicher Länge und sie enthält Bleistifte in verschiedenen Farben. Beweisen Sie, dass es Stifte gibt, die sich *gleichzeitig* in der Länge und nach Farbe unterscheiden.

Übungsblatt 2

Aufgabe 1

Cowboy Bill ging in eine Bar und bat den Barkeeper um eine 6-Euro-Flasche Whisky und drei Schachteln wasserfeste Streichhölzer, deren Preis er nicht kannte. Der Barkeeper verlangte von ihm 11.50 Euro, woraufhin Bill einen Revolver herauszog. Eillig berechnete der Barkeeper den Kaufpreis neu und korrigierte den Fehler. Woher aber wusste Bill, dass der Barkeeper ihn betrügen wollte?

Aufgabe 2

Ist die Zahl 123456789 eine Primzahl? Wird sich die Antwort ändern, wenn wir die Ziffernreihenfolge ändern?

Aufgabe 3

Beweisen Sie, dass das Produkt von fünf aufeinanderfolgenden Zahlen durch 120 teilbar ist.

Hinweis: Sie dürfen folgendes benutzen: Seien a, b, c natürliche Zahlen. Außerdem haben a und b nur die 1 als gemeinsamen Teiler. Sei a ein Teiler von c und auch b ein Teiler von c . Dann ist ab ein Teiler von c ist.*

Aufgabe 4

1. Seien p und q natürliche Zahlen, die als einzigen gemeinsamen Teiler 1 haben. Beweisen Sie, dass $p^2 = 2q^2$ nicht gelten kann.
2. Beweisen Sie, dass $\sqrt{2}$ keine rationale Zahl ist.

*Stimmt diese Aussage auch, wenn a und b nicht nur die 1 als gemeinsamen Teiler haben dürfen?

Aufgabe 5

Gilt für drei teilerfremde* natürliche Zahlen a, b, c der Satz für Pythagoras ($a^2 + b^2 = c^2$), so nennt man a, b, c ein *pythagoreisches Zahlentripel*. Wir wollen uns in dieser Aufgabe in kleinen Schritten der Frage nähern, wie man alle pythagoreischen Zahlentripel finden kann.

1. Rechnen Sie nach, dass

- a) 3, 4, 5,
- b) 5, 12, 13,
- c) 8, 15, 17
- d) und 7, 24, 25

pythagoreische Zahltripel sind.

2. Sei a, b, c ein pythagoreisches Zahlentripel. Um pythagoreische Zahlentripel zu berechnen, muss zunächst eine Möglichkeit gefunden werden, um a, b, c auszudrücken.

- (i) Zeigen Sie zuerst, dass für $a = r^2 - s^2$, $b = 2rs$ und $c = r^2 + s^2$ mit $r > s$, r und s natürliche Zahlen, das Tripel a, b, c ein pythagoreisches Zahlentripel ist.

Die nächsten Schritte sollen zeigen, dass bis auf gemeinsame Teiler von a und b und Vertauschen von a und b alle pythagoreischen Zahlentripel diese Form haben:

Sei also nun a, b, c ein pythagoreisches Zahlentripel. Seien x und y zwei teilerfremde natürliche Zahlen mit $x > y$, für die gilt

$$a = x - y, \quad c = x + y, \quad c^2 - a^2 = b^2.$$

- (ii) Gibt es solche x und y immer? Wenn ja, warum?.
- (iii) Rechnen Sie nach, dass dann $xy = (b/2)^2$ ist.
- (iv) Müssen x und y Quadratzahlen sein, d.h. existieren natürliche Zahlen r und s , so dass $x = r^2$ und $y = s^2$ ist?
- (v) Ersetzen Sie x durch r^2 und y durch s^2 und beweisen Sie, dass

$$a = r^2 - s^2, \quad b = 2rs, \quad c = r^2 + s^2$$

gilt.

Sind wir nun fertig? Was haben wir eigentlich insgesamt gezeigt?

*d.h. die Zahlen haben als einzigen gemeinsamen Teiler 1.

Aufgabe *

(Zusatz: also eher, für die, die den Rest schon können)

Eine Perfekte Zahl ist eine natürliche Zahl n , die gleich der Summe ihrer Teiler (ohne n selbst) ist. Im folgenden werden wir die Geraden Perfekten Zahlen charakterisieren.

(i) Beweisen Sie, dass für natürliche Zahlen a, b, k , gilt:

$$a^k - b^k = (a - b) \cdot \left(\sum_{j=0}^{k-1} a^j b^{k-1-j} \right). *$$

(ii) Beweisen Sie: Wenn $2^p - 1$ Primzahl ist, so muss p Primzahl sein. (Hinweis benutzen Sie a) für $b = 1$ und a eine geeignete Zweierpotenz.)

Sei p eine Primzahl, so dass $2^p - 1$ auch eine Primzahl ist. Sei $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$. Dann hat n nur die Teiler

$$2^0, 2^1, 2^2, \dots, 2^{p-1}$$

und

$$2^p - 1, 2(2^p - 1), \dots, 2^{p-1}(2^p - 1).$$

(iii) Zeigen, dass n eine Perfekte Zahl ist.

Sei $\sigma(n)$ die Summe aller Teiler von n (das heißt einschließlich 1 und n selbst).

(iv) Zeigen Sie, dass n genau dann eine Perfekte Zahl ist, wenn $\sigma(n) = 2n$.

(v) Zeigen Sie, dass p genau dann eine Primzahl ist, wenn $\sigma(p) = p + 1$.

(vi) Sei n eine Gerade Perfekte Zahl und sei $n = 2^q m$, wobei m und q natürliche Zahlen sind und m gerade ist. Zeigen Sie, dass $\sigma(n) = \sigma(m)(2^{q+1} - 1) = 2^{q+1} m$ ist und daraus folgten dass $2^{q+1} - 1$ dann m teilt.

(vii) Sei jetzt $m = d(2^{q+1} - 1)$ mit $d > 1$. Zeigen Sie, dass

$$\sigma(m) \geq m + d + 1$$

und

$$\sigma(n) \geq (m + d + 1)(2^{q+1} - 1).$$

Folgern Sie daraus, dass

$$2^{q+1} d(2^{q+1} - 1) \geq (d(2^{q+1} - 1) + d + 1)(2^{q+1} - 1) \iff 0 \leq 1.$$

Setzen Sie alles zusammen, um zu sehen, dass alle Geraden Perfekten Zahlen sich in der Form $2^{p-1}(2^p - 1)$ darstellen lassen.

*Es ist $\sum_{j=0}^{k-1} a^j b^{k-1-j} = b^{k-1} + ab^{k-2} + a^2 b^{k-3} + \dots + a^{k-3} b^2 + a^{k-2} b + a^{k-1}$.

Übungsblatt 3

Aufgabe 1

Nina und Olaf spielen folgendes Spiel. Sie starten mit einer Zahl und in jedem Zug muss einer der Spieler eine Quadratzahl von der Zahl subtrahieren. Gezogen wird abwechselnd, Nina beginnt und gewonnen hat der Spieler, der die letzte Subtraktion durchführt. Ein Beispiel wäre: Wenn sie mit der Zahl 5 starten, kann Nina entweder 1 oder 4 subtrahieren und erhält dann entweder 4 oder 1. In beiden Fällen wäre es eine Quadratzahl, so dass Olaf durch deren Subtraktion einen Sieg erzielen könnte.

Für welche Startzahlen zwischen 1 und 20 kann Nina durch eine geeignete Strategie immer einen Sieg erzielen und für welche Startzahlen hat sie diese Möglichkeit nicht? Begründen Sie!

Aufgabe 2

Paula und Quentin spielen folgendes Spiel: Vor ihnen liegen 3 Haufen, einer mit 2 Stäbchen, einer mit 3 Stäbchen und einer mit 4 Stäbchen. Die Spieler ziehen abwechselnd, Paula beginnt. In jedem Zug darf ein Spieler von einem Haufen eine beliebige Anzahl von Stäbchen nehmen (aber immer mindestens eines). Der Spieler, der das letzte Stäbchen nehmen muss, verliert.

Paula kann dieses Spiel immer gewinnen. Was muss dann ihr erster Zug sein? Begründen Sie.

Aufgabe 3

Uwe und Verena spielen ein Spiel. Vor Ihnen liegen wieder mehrere Haufen mit Stäbchen. In jedem Zug darf man von einem Haufen beliebig viele Stäbchen (jedoch mindestens eins) nehmen oder einen anderen Haufen in zwei neue Haufen (mit mindestens jeweils einem Stäbchen) zerteilen. Gewonnen hat der Spieler, der das letzte Stäbchen nimmt. Uwe beginnt. Gezogen wird abwechselnd.

- Wer kann immer gewinnen, wenn nur ein Haufen da ist?
- Es liegen jetzt zwei Haufen auf dem Tisch mit jeweils einer Stäbchenanzahl von maximal 5. Überlegen Sie sich, bei welchen Ausgangsstellungen, Uwe immer gewinnen kann. Begründen Sie.
- Angenommen wir haben zwei Ausgangsstellungen, die Verluststellungen sind, das heißt wenn Verena die richtige Strategie hat, kann Uwe keinesfalls gewinnen. Dann können wir beide zusammen auf den Tisch legen und erhalten eine neue Ausgangsstellung (z.B. erste Ausgangsstellung sind zwei Haufen mit jeweils einem Stäbchen und die zweite sind zwei Haufen mit jeweils zwei Stäbchen. Dann bestünde die neue Ausgangsstellung aus 4 Haufen, von denen zwei ein Stäbchen enthalten und die beiden anderen Haufen jeweils zwei Stäbchen.) Überlegen Sie sich und begründen Sie, dass die neue Ausgangsstellung dann auch eine Verluststellung ist.
- Wie sollte der erste Zug von Uwe aussehen (um sicher gewinnen zu können), wenn vor ihm drei Haufen mit 2, 5 und 7 Stäbchen liegen? Begründen Sie!

Aufgabe 4

Wendelin und Xanthia spielen ein Spiel. Auf einem karierten Blatt Papier haben sie ein (n, m) -Rechteck (das ist ein Rechteck mit n Zeilen und m Spalten gezeichnet). Die Spieler streichen wie folgt abwechselnd Felder ab: Der Spieler, der am Zug ist, wählt eines der noch nicht abgestrichenen Felder. Er muss dann alle Felder abstreichen, die in dem Rechteck liegen, welches von seinem gewählten Feld als obere Ecke und dem rechten unteren Feld des Ausgangsrechteck gebildet wird. Der Spieler, der das linke obere Feld abstreichen muss, verliert. Wendelin beginnt. Kann Wendelin bei folgenden Ausgangsrechtecken immer einen Sieg erreichen: $(1, n)$, $(2, 2)$, $(2, 3)$ und $(3, 3)$? Begründen Sie!

Aufgabe 5

Wir spielen noch einmal Tic-Tac-Toe, aber mit veränderten Regeln: Die Spieler setzen noch immer abwechselnd (1.Spieler Kreuze, 2.Spieler Kreise) in ein 3×3 -Quadrat. Gewonnen hat wieder der Spieler, der als erstes drei Felder in einer Reihe gesetzt hat. Doch dieses Mal verändern wir das Spielbrett noch ein bisschen:

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Anstatt sich das Spielbrett so zusammengeklebt vorzustellen, ist es vielleicht einfacher, sich das Brett in der Ebene einfach mehrfach aneinander geklebt vorzustellen. Dann sieht man nun auch leicht, dass die im Bild durch die verschiedenen Kreise markierten Felder im Gegensatz zum normalen Tic-Tac-Toe (dem mittleren 3×3 -Quadrat) nun auf dem neuen (zusammengeklebten) Spielfeld in einer Reihe liegen.

Kann jetzt einer der Spieler einen Sieg erzwingen? Begründen Sie!

Wir kleben den oberen Rand so an den unteren Rand, dass das Feld 1 nun Nachbar von Feld 7 ist, Feld 2 von Feld 8 und auch Feld 3 von Feld 9. Danach kleben wir auch noch den linken Rand an den rechten, so dass Feld 1 Nachbar von Feld 3 ist usw.

○			○			○		
		⊕			⊕			⊕
	⊗			⊗			⊗	
○			○			○		
		⊕			⊕			⊕
	⊗			⊗			⊗	
○			○			○		
		⊕			⊕			⊕
	⊗			⊗			⊗	

Aufgabe *

Beim klassischen Nim-Spiel gibt es k Haufen mit n_1, n_2, \dots, n_k Stäbchen. Zwei Spieler dürfen abwechselnd bei einem Haufen ein, zwei oder drei Stäbchen wegnehmen. Der Spieler, der das letzte Stäbchen wegnimmt, gewinnt.

Betrachten Sie zunächst $k = 4$, $n_1 = 1$, $n_2 = 3$, $n_3 = 5$ und $n_4 = 7$. Gibt es hier eine Gewinnstrategie für einen der Spieler?

Was ist im allgemeinen Fall?

Übungsblatt 4

Was stimmt hier, was stimmt nicht? Wo liegen die Fehler? Was ist einfach nur unglücklich geschrieben? Was stimmt zwar, aber mehr Details wären hilfreich....? Wie kann man die Sachen ggf. korrigieren?

Aufgabe 1

$$\begin{aligned} a &= b \\ \implies a^2 &= ab \\ \implies 2a^2 &= a^2 + ab \\ \implies 2a^2 - 2ab &= a^2 - ab \\ \implies 2(a^2 - ab) &= a^2 - ab \\ \implies 2 &= 1 \end{aligned}$$

Aufgabe 2

$$\begin{aligned} -2 &= -2 \\ \implies 4 - 6 &= 1 - 3 \\ \implies 4 - 6 + \frac{9}{4} &= 1 - 3 + \frac{9}{4} \\ \implies \left(2 - \frac{3}{2}\right)^2 &= \left(1 - \frac{3}{2}\right)^2 \\ \implies 2 - \frac{3}{2} &= 1 - \frac{3}{2} \\ \implies 2 &= 1 \end{aligned}$$

Aufgabe 3

Zeige, dass $\sqrt{2} + \sqrt{6} < \sqrt{15}$.

Beweis.

$$\begin{aligned} \sqrt{2} + \sqrt{6} &< \sqrt{15} \\ \implies \left(\sqrt{2} + \sqrt{6}\right)^2 &< 15 \\ \implies 8 + 2\sqrt{12} &< 15 \\ \implies 2\sqrt{12} &< 7 \\ \implies 48 &< 49 \end{aligned}$$

□

Aufgabe 4

Wir wollen alle Lösungen von $\sqrt{2x+12} - 2 = x$.

Addition mit zwei ergibt $\sqrt{2x+12} = x+2$ und quadrieren $2x+12 = x^2+4x+4$. Also ist x^2+2x-8 . Anwenden der Lösungsformal für quadratische Gleichungen gibt als Lösungen $x=2$ und $x=-4$.

Aufgabe 5

Seien a , b und c natürliche Zahlen, so dass a das Produkt bc teilt. Dann ist a ein Teiler von b oder ein Teiler von c .

Beweis. Sei $a = 5$, $b = 3$ und $c = 10$. Dann teilt 5 das Produkt $3 \cdot 10 = 30$ und 5 teilt c , also ist die Behauptung richtig. \square

Aufgabe 6

Seien a und b natürliche Zahlen, so dass a bei Division durch 3 den Rest 1 lässt und b bei Division durch 3 den Rest 2 lässt. Dann ist $a + b$ durch 3 teilbar.

Beweis. Da a bei Division durch 3 den Rest 1 lässt, gibt es eine natürliche Zahl k mit $a = 3k + 1$. Da b bei Division durch 3 den Rest 2 lässt, gibt es eine natürliche Zahl k mit $b = 3k + 2$. Also ist $a + b = 6k + 3 = 3(2k + 1)$ und damit durch 3 teilbar. \square

Aufgabe 7

Sei a eine rationale Zahl und b eine irrationale Zahl.* Dann ist $a + b$ irrational.

Beweis. $a + b = \frac{k}{\ell}$ und $a = \frac{p}{q}$

Dann ist $b = \frac{k}{\ell} - \frac{p}{q} = \frac{kq - p\ell}{\ell q}$ und damit rational. \square

Aufgabe 8

Ein paar reeller Zahlen (x, y) nennen wir *erlaubt*, wenn $x - y$ eine ganze Zahl ist. Zeigen Sie: Sind (x, y) und (y, z) erlaubt, dann auch (x, z) .

Beweis. Sind (x, y) und (y, z) erlaubt, dann auch (x, z) . Seien x, y, z ganze Zahlen und sei (x, y) und (y, z) erlaubt. Dann wissen wir, dass $x - y$ und $y - z$ ganze Zahlen sind. Seien k, c ganze Zahlen.

$$x - y = k$$

$$y - z = c$$

$$\implies y = c + z$$

$$x - (c + z) = k$$

$$x - z = k + c$$

Da $k + c$ eine ganze Zahl ist, ist (x, z) erlaubt. \square

Aufgabe 9

Wir betrachten die Gleichung $x^2 + x + 1 = 0$. Dann muss $x \neq 0$ sein. Damit folgt

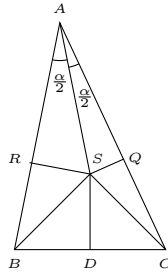
$$x^3 + x^2 + x = x(x^2 + x + 1) = x \cdot 0 = 0.$$

Addition von 1 auf beiden Seiten liefert:

$$x^3 + x^2 + x + 1 = x^3 + 0 = x^3 = 1.$$

Also ist $x = 1$, was in der ersten Gleichung $1^2 + 1 + 1 = 0$ impliziert. Also ist $3 = 0$.

*Eine reelle Zahl a heißt *rational*, wenn es zwei ganze Zahlen p, q mit $a = \frac{p}{q}$ gibt. Eine reelle Zahl, die nicht rational ist, heißt *irrational*.



Aufgabe 10

Sei ein Kreis gegeben und ein Punkt P , der nicht auf dem Kreis und nicht in seinem Mittelpunkt liegt. Unter allen Punkten auf dem Kreis gibt es keinen, der unter diesen zu P den kleinsten Abstand hat.

Beweis. Der Kreis habe den Mittelpunkt M und den Radius b . Sei P der Punkt, zu dem der nächste Punkt auf dem Kreis gesucht wird. In den Punkt P wird der Ursprung eines kartesischen Koordinatensystems gelegt, dessen x -Achse durch den Mittelpunkt M geht. Die x -Koordinate von M sei a . Für einen Punkt $R = (x, y)$ auf dem Kreis gilt nach dem Satz von Pythagoras: $(x - a)^2 + y^2 = b^2$ oder $x^2 + y^2 - 2ax + a^2 - b^2 = 0$. Das Abstandsquadrat zwischen P und R ist nach Pythagoras $r^2 = x^2 + y^2$. Eingesetzt wird daraus: $r^2 - 2ax + a^2 - b^2 = 0$. Der Abstand PR ist extremal, wenn die Ableitung $r'(x) = 0$ ist. Ableitung nach x gibt $2rr' - 2a = 0$ oder $r' = a/r$, weil P nach Voraussetzung nicht auf dem Kreis liegt und daher $r \neq 0$ ist. Die Bedingung $r' = 0$ ist also erfüllt, wenn $a = 0$ ist, also $P = M$ gilt. Für alle Punkte, die nicht auf dem Kreis aber außerhalb des Mittelpunkts des Kreises liegen, gibt es keinen nächsten Punkt auf dem Kreis. \square

Aufgabe 11

Alle Dreiecke sind gleichschenkelig.

Beweis. Gegeben sei ein beliebiges Dreieck ABC wie im Bild oben. Sei m die Winkelhalbierende des Innenwinkels bei A . Die Mittelsenkrechte der Seite BC schneide diese im Punkt D und die Winkelhalbierende m im Punkt O . Die Dreiecke BDO und COD sind kongruent, weil die Seitenlängen DO und BD bzw. CD gleich sind und die Innenwinkel in D übereinstimmen. Deshalb gilt $BO = CO$. Sei R der Fußpunkt des Lotes von O auf die Seite AB und Q der Fußpunkt des Lotes von O auf die Seite AC . Die Dreiecke ARO und AQO sind nach dem SWW-Kongruenzsatz deckungsgleich, weil die Hypotenuse AO , ein anliegender Winkel in A und der gegenüberliegende Winkel in R bzw. Q als rechte Winkel übereinstimmen. Deshalb ist $AR = AQ$ und $OR = OQ$. Die Dreiecke BOR und CQO sind kongruent, weil $BO = CO$ sowie $OR = OQ$ und sie in jenem Winkel übereinstimmen, der der längeren Seite gegenüberliegt. Denn der rechte Winkel in R bzw. Q liegt der Hypotenuse der betrachteten Dreiecke BOR und CQO gegenüber. Also ist auch $BR = CQ$. Insgesamt haben wir also $AB = AR + BR = AQ + CQ = AC$. \square

Übungsblatt 5

Aufgabe 1

Schreiben Sie folgende Ausdrücke mit einem Summen- oder Produktzeichen? (n und k sind hier natürliche Zahlen)

(i) $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \dots + 101$

(ii) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n}$

(iii) $n!$

(iv) 2^k

Aufgabe 2

Was muss bei den Fragezeichen stehen?

(i) $\sum_{i=m}^n (a_i + b_i) = ? + \sum_{i=m}^n b_i$

(ii) $\sum_{i=m}^n b \cdot a_i = ? \left(\sum_{i=m}^n a_i \right)$

(iii) $\sum_{i=1}^9 (5i + 3) = \sum_{k=?}^? (5k - 2)$

(iv) $\sum_{i=1}^{10} ((i-1)(i+1) + 9) = \sum_{k=?}^? (k^2 + ?)$

Aufgabe 3

Zeigen Sie: Für alle natürlichen Zahlen n gilt

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2.$$

Aufgabe 4

Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für alle natürlichen Zahlen n die Zahl $n^2 + n$ gerade ist.

Aufgabe 5

Berechnen Sie die Ableitung von $f(x) = x^3$ in x_0 wie in der Vorlesung.

Aufgabe 6

Berechnen Sie den Flächeninhalt unter der Funktion $f(x) = 3x + 2$ über dem Intervall $[0, 1]$ wie in der Vorlesung.