PD Dr. Markus Junker
Dr. Daniel Palacin

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Wintersemester 2018/19

Modelltheorie

Übungsblatt 1

Abgabe: 24.10.2018

Aufgabe 1. Sei $\mathcal{L} = \{R\}$ die Sprache, welche nur aus einer zweistelligen Relation R besteht. Ein Graph $\mathfrak{A}$ ist eine $\mathcal{L}$-Struktur $(A, R^{\mathfrak{A}})$, wobei $R^{\mathfrak{A}}$ eine symmetrische, irreflexive binäre Relation ist. Ein Teilgraph eines Graphes $\mathfrak{A} = (A, R^{\mathfrak{A}})$ ist ein Graph $\mathfrak{B} = (B, R^{\mathfrak{B}})$ derart, dass $B \subseteq A$ und $R^{\mathfrak{B}} \subseteq R^{\mathfrak{A}}$.
Ist jeder Teilgraph eines Graphen $\mathfrak{A}$ eine $\mathcal{L}$-Unterstruktur?

Aufgabe 2. Sei $\mathcal{L} = \{R\}$ die Sprache, welche nur aus einer zweistelligen Relation R besteht. Betrachte die Theorie T des *Zufallsgraphen*, welche besagt, dass für je zwei endliche disjunkte Teilmengen A und B es ein Element c gibt mit $R(c, a)$ für jedes a in A, aber $\neg R(c, b)$ für b aus B.

a) Geben Sie eine Axiomatisierung von T an.

b) Zeigen Sie, dass T kein endliches Modell besitzt.

Aufgabe 3. Seien $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ $\mathcal{L}$-Strukturen. Das direkte Produkt $\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2$ ist definiert als die $\mathcal{L}$-Struktur $\mathfrak{B}$ mit Universum $B := A_1 \times A_2$ und folgenden Interpretationen:

$c^{\mathfrak{B}} := (c^{\mathfrak{A}_1}, c^{\mathfrak{A}_2})$ für Konstanten $c \in \mathcal{L}$;

$f^{\mathfrak{B}}\big((a_1^1, a_2^1), \ldots, (a_1^n, a_2^n)\big) := \big(f^{\mathfrak{A}_1}(a_1^1, \ldots, a_1^n), f^{\mathfrak{A}_2}(a_2^1, \ldots, a_2^n)\big)$ für n-stellige Funktionsymbole $f \in \mathcal{L}$;

$R^{\mathfrak{B}}\big((a_1^1, a_2^1), \ldots, (a_1^n, a_2^n)\big) :\Leftrightarrow R^{\mathfrak{A}_i}\big(a_i^1, \ldots, a_i^n\big)$ für $i = 1, 2$, für n-stellige Relationssymbole $R \in \mathcal{L}$.

a) Zeigen Sie, dass die einstellige Funktion $f^{\mathfrak{B}} : B \to B$ genau dann eine Bijektion auf B definiert, wenn jede $f^{\mathfrak{A}_i} : A_i \to A_i$ eine Bijektion ist.

b) Ein vollständiger Graph $\mathfrak{A} = (A, R^{\mathfrak{A}})$ ist ein Graph mit $R^{\mathfrak{A}} = A \times A \setminus \{(a, a) : a \in A\}$. Ist ein direktes Produkt von vollständiger Graphen wieder ein vollständiger Graph?

Aufgabe 4. Sei $\mathcal{L} = \{E\}$ die Sprache, welche nur aus einer zweistelligen Relation E besteht. Sei T die Theorie, welche besagt, dass E eine Äquivalenzrelation ist, die für jede natürliche Zahl $k \geq 2$ genau eine Äquivalenzklasse mit genau k Elementen hat.

a) Geben Sie eine Axiomatisierung von T an.

b) Zeigen Sie, dass es zwei Modelle $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ von diese Theorie und eine $\mathcal{L}$-Aussage φ gibt, so dass

$$\mathfrak{A} \models \varphi \quad \text{und} \quad \mathfrak{B} \models \neg\varphi.$$