PD Dr. Markus Junker
Dr. Daniel Palacin

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Wintersemester 2018/19

**Modelltheorie**
Übungsblatt 10
Abgabe[1]: 16.01.2019

**Aufgabe 1** (6 Punkte)**.**
Sei $K$ ein Körper. Wir betrachten $K$-Vektorräume in der Sprache $\{+, 0\} \cup \{f_\lambda\}_{\lambda \in K}$, wobei $f_\lambda$ ein einstelliges Funktionsymbol ist, welches Multiplikation mit dem Skalar $\lambda$ darstellt.

*a)* Zeigen Sie, dass die Theorie der unendlichen $K$-Vektorräume vollständig ist und Quantorenelimination hat.

*b)* Zeigen Sie, dass diese Theorie genau dann $\aleph_0$-kategorisch ist, wenn $K$ endlich ist.

*c)* Schließen Sie daraus, dass die Gruppe $(\bigoplus_{i<\omega} \mathbb{F}_p, +)$ $\aleph_0$-kategorisch ist, wobei $\bigoplus_{i<\omega} \mathbb{F}_p$ die direkte Summe von $\omega$-vielen Kopien von $\mathbb{F}_p$ ist.

**Aufgabe 2** (2 Punkte)**.**
Sei $K$ ein unendlicher Körper. Kann die Theorie der Struktur $(K, +, -, \cdot, 0, 1)$ $\aleph_0$-kategorisch sein?
*Hinweis:* Betrachten Sie Formeln in 2 Variablen.

**Aufgabe 3** (8 Punkte)**.**
Betrachten Sie die Struktur $\mathfrak{N} = (\mathbb{N}, 0, s)$, wobei $s^{\mathfrak{N}}(x) = x + 1$.

*a)* Zeigen Sie, dass diese Struktur Quantorenelimination hat.

*b)* Wie sehen die Typen über $\emptyset$ aus?

*c)* Gibt es ein Primmodell, und wenn ja, wie sieht es aus?

*d)* Gibt es ein abzählbares saturiertes Modell, und wenn ja, wie sieht es aus?
*Hinweis:* Für jedes $n \geq 1$ gibt es ein $m$ mit $s^{\mathfrak{N}}(m) = n$.

**Aufgabe 4** (4 Punkte)**.**
In der Sprache $\mathcal{L} = \{E\}$, wobei $E$ ein 2-stelliges Relationsymbol ist, sei $\mathcal{K}$ die Klasse der $\mathcal{L}$-Strukturen $\mathfrak{A}$ derart, dass $E^{\mathfrak{A}}$ eine Äquivalenzrelation ist, deren Klassen höchstens 2 Elemente besitzen.
Zeigen Sie, dass $\mathcal{K}$ einen Fraïssé-Limes besitzt, und dass jede $E$-Klasse im Fraïssé-Limes aus 2 Elementen besteht.

[1]Abgabe der Übungsblätter im Flur der Abteilung für Mathematische Logik in der Ernst-Zermelo-Straße 1.