PD Dr. Markus Junker
Dr. Daniel Palacin

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Wintersemester 2018/19

Modelltheorie

Übungsblatt 10

Abgabe[1]: 23.01.2019

Aufgabe 1 (5 Punkte).
Sei K ein abzählbarer Körper und sei T die Theorie der unendlichen K-Vektorräume.

a) Beschreiben Sie alle 1-Typen über einem Modell von T.

b) Schließen Sie daraus, dass T $\aleph_0$-stabil ist.

Aufgabe 2 (5 Punkte).
Sei $\mathfrak{M}$ ein abzählbarer Zufallsgraph in der Sprache $\{R\}$.

a) Für jede Teilmenge X von M, zeigen Sie, dass die Menge

$$\pi_X(x) = \{R(x,a) : a \in X\} \cup \{\neg R(x,b) : b \notin X\}$$

konsistent ist.

b) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Th}(\mathfrak{M})$ nicht $\aleph_0$-stabil ist.

Aufgabe 3 (10 Punkte).
Sei $\mathfrak{M}$ eine abzählbare Struktur in einer abzählbaren Sprache $\mathcal{L}$. Für n in $\mathbb{N}$, sei $\varphi_n(x,y,\bar{z}_n)$ eine $\mathcal{L}$-Formel, für die ein Tupel $\bar{m}_n$ in M existiert, so dass $\varphi_n(x,y,\bar{m}_n)$ eine Äquivalenzrelation auf M ist. Ferner, für jedes n aus $\mathbb{N}$ sei $\varphi_{n+1}(x,y,\bar{m}_{n+1})$ eine feinere Äquivalenzrelation als $\varphi_n(x,y,\bar{m}_n)$: Jede $\varphi_n(x,y,\bar{m}_n)$-Äquivalenzklasse werde zumindest in zwei $\varphi_{n+1}(x,y,\bar{m})$-Äquivalenzklassen zerlegt. Das bedeutet:

$$\mathfrak{M} \models \forall x \forall y(\varphi_{n+1}(x,y,\bar{m}_{n+1}) \to \varphi_n(x,y,\bar{m}_n)) \wedge \forall x \exists y(\varphi_n(x,y,\bar{m}_n) \wedge \neg\varphi_{n+1}(x,y,\bar{m}_{n+1})).$$

a) Zeigen Sie, dass es einen binären Baum $(a_\eta)_{\eta \in 2^{<\omega}}$ gibt, so dass für jedes $f \in 2^\omega$ die Menge

$$\pi_f(x) = \{\varphi_n(x, a_{f|n}, \bar{m}_n) : n < \omega\}$$

konsistent ist.

b) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Th}(\mathfrak{M})$ nicht $\aleph_0$-stabil ist.

Sei jetzt $\mathfrak{M} = (G, \cdot, e)$ eine Gruppe. Eine Untergruppe H von G ist definierbar, wenn es eine Formel $\varphi(x,\bar{z})$ und ein Tupel $\bar{a}$ auf G gibt, so dass $H = \varphi(G,\bar{a})$.

[1] Abgabe der Übungsblätter im Flur der Abteilung für Mathematische Logik in der Ernst-Zermelo-Straße 1.

c) Sei H eine definierbare Untergruppe von G. Zeigen Sie, dass die 2-stellige Relation $x^{-1}y \in H$ eine definierbare Äquivalenzrelation auf G ist. Das heißt, es gibt eine Formel $\psi_H(x, y, \bar{u})$ und ein Tupel $\bar{m}$ aus G, so dass genau dann $x^{-1}y \in H$ gilt, wenn $\mathfrak{M} \models \psi_H(x, y, \bar{m})$.

d) Zeigen Sie: falls $\mathrm{Th}(\mathfrak{M})$ $\aleph_0$-stabil ist, existiert keine unendliche Kette

$$G = H_0 \gneq H_1 \gneq \ldots \gneq H_n \gneq \ldots$$

von definierbaren Untergruppe H_n von G.

e) Schließen Sie daraus, dass $(\mathbb{Z}, +, 0)$ nicht $\aleph_0$-stabil ist.
Hinweis: Für jedes n aus $\mathbb{N}$, zeigen Sie dass die Menge $n\mathbb{Z}$ definierbar in der Struktur $(\mathbb{Z}, +, 0)$ ist.