PD Dr. Markus Junker
Dr. Daniel Palacin

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Wintersemester 2018/19

Modelltheorie
Übungsblatt 3
Abgabe[1]: 7.11.2018

Aufgabe 0. Formulieren Sie eine schriftliche Frage zum Vorlesungsstoff, z. B. über einen Punkt, der Ihnen unklar geblieben ist und den Sie gerne (ggf. nochmals) erläutert hätten, oder z. B. über etwas, worüber Sie gerne Näheres wissen möchten.

Aufgabe 1 (6 Punkte)**.**

a) Sei T eine Theorie in einer Sprache $\mathcal{L}$ und sei $\varphi(x)$ eine $\mathcal{L}$-Formel derart, dass in jedem Modell $\mathfrak{A} \models T$ die definierbare Menge $\varphi(\mathfrak{A})$ endlich ist. Zeigen Sie, dass es eine natürliche Zahl k gibt, so dass
$$T \models \exists^{<k} x\, \varphi(x).$$

b) Schließen Sie daraus, dass die Klasse der endlichen Gruppen in der Sprache $\mathcal{L}_{Gr}$ nicht axiomatisierbar ist.

Aufgabe 2 (8 Punkte)**.**
Die Darstellung einer natürlichen Zahl n zur Basis 2 ist
$$n = \sum_{i=0}^{m} [n]_i \cdot 2^i,$$
wobei $[n]_i \in \{0, 1\}$ und $m \geq 0$. Betrachten Sie die zweistellige Relation auf $\mathbb{N}$ definiert durch
$$R(n, m) \;:\Leftrightarrow\; [m]_n = 1 \text{ oder } [n]_m = 1.$$

a) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{N}, R)$ ein Graph ist.

b) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{N}, R)$ ein Modell der Theorie des Zufallsgraphen ist (Aufgabe 2 - Blatt 1).

c) Zeigen Sie, dass es eine elementare Erweiterung $\mathfrak{M}$ von $(\mathbb{N}, R)$ und ein Element a aus M gibt, so dass $\neg R(a, n)$ für alle n aus $\mathbb{N}$, und dass in diesem Fall $M \setminus \mathbb{N}$ unendlich ist.

Bemerkung: Wir werden später sehen, dass es auch elementare Erweiterungen des Zufallsgraphen durch endlich viele Elemente gibt.

Aufgabe 3 (6 Punkte)**.**
Sei $\mathfrak{R} = (\mathbb{R}, 0, <, f^{\mathfrak{R}})$ mit einem einstelligen Funktionszeichen f. Ein Element ξ einer elementaren Oberstruktur $\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{R}$ heißt *infinitesimal*, falls $-r < \xi < r$ für alle $r \in \mathbb{R}^{>0}$.

a) Zeigen Sie, dass es eine Struktur $\mathfrak{M}$ mit $\mathfrak{R} \preccurlyeq \mathfrak{M}$ gibt, die infinitesimale Elemente $\xi \neq 0$ hat.

b) Angenommen $f^{\mathfrak{R}}(0) = 0$. Zeigen Sie, dass $f^{\mathfrak{R}}$ genau dann stetig in 0 ist, wenn $f^{\mathfrak{M}}$ in allen elementaren Erweiterungen $\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{R}$ infinitesimale Elemente auf infinitesimale Elemente abbildet.

[1] Abgabe der Übungsblätter im Flur der Abteilung für Mathematische Logik in der Ernst-Zermelo-Straße 1.