PD Dr. Markus Junker
Dr. Daniel Palacin

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Wintersemester 2018/19

Modelltheorie
Übungsblatt 5
Abgabe[1]: 21.11.2018

Aufgabe 0. Formulieren Sie eine schriftliche Frage zum Vorlesungsstoff, z. B. über einen Punkt, der Ihnen unklar geblieben ist und den Sie gerne (ggf. nochmals) erläutert hätten, oder z. B. über etwas, worüber Sie gerne Näheres wissen möchten.

Aufgabe 1 (6 Punkte)**.**
Sei $\mathcal{L} = \{E\}$ mit zweistelligem Relationszeichen E.

a) Man weiß, dass ein Graph genau dann planar ist, wenn alle endlichen Teilgraphen planar sind. Zeigen Sie, dass es eine $\mathcal{L}$-Theorie T_p gibt, deren Modelle gerade die planaren Graphen sind. (Man sagt dazu, dass die planaren Graphen eine *elementare Klasse* bilden.)

b) Sei K_5^i der Graph, den man aus dem vollständigen Graphen mit 5 Ecken K_5 dadurch erhält, dass man auf jeder Kante i Ecken einfügt. (K_5^0 ist also K_5 und K_5^i hat $5 + 10i$ Ecken.) Man kann sich relativ leicht überlegen, dass K_5^i nicht planar ist.

Zeigen Sie: Nicht-triviale Ultraprodukte $\prod_{i\in\omega} K_5^i/\mathcal{U}$ sind planar.

Folgern Sie daraus, dass die Klasse der nicht-planaren Graphen keine elementare Klasse ist, also nicht erststufig axiomatisierbar ist, d. h. dass es keine $\mathcal{L}$-Theorie T_{np} gibt, deren Modelle gerade die nicht-planaren Graphen sind.

c) Folgern Sie aus (b), dass die Klasse der planaren Graphen nicht *endlich axiomatisierbar* ist, dass es also nicht endlich viele $\mathcal{L}$-Aussagen $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ gibt mit $T_p^{\vdash} = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}^{\vdash}$.

Aufgabe 2 (6 Punkte)**.**
Seien $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}'$ zwei Sprachen. *Erinnerung:* $S(\mathcal{F}_0(\mathcal{L}))$ ist der Stone-Raum der deduktiv abgeschlossenen vollständigen $\mathcal{L}$-Theorien.

a) Zeigen Sie: $T' \mapsto T' \cap \mathcal{F}_0(\mathcal{L})$ definiert eine Abbildung $\mathrm{res} : S(\mathcal{F}_0(\mathcal{L}')) \to S(\mathcal{F}_0(\mathcal{L}))$.

b) Zeigen Sie, dass res stetig ist (d. h. dass Urbilder beliebiger offener Mengen offen sind).

c) Zeigen Sie, dass res im Allgemeinen nicht offen ist (d. h. dass Bilder offener Mengen nicht offen sein müssen). Sie können z. B. $\mathcal{L} = \emptyset$, $\mathcal{L}' = \{<\}$ betrachten und an offene, dichte lineare Ordnungen denken.

Zusatz: Mit einigen Topologie-Kenntnissen kann man zeigen, dass res stets eine abgeschlossene Abbildung ist (da der Stone-Raum kompakt und Hausdorff'sch ist).

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.**
Eine $\mathcal{L}$-Formel heißt *positiv*, wenn sie aus atomaren Formeln durch $\wedge$, $\vee$, $\exists$ und $\forall$ entsteht. Zeigen Sie: Wenn $\varphi(\bar{x})$ positiv und $h : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ ein surjektiver Homomorphismus ist und wenn $\mathfrak{A} \models \varphi(\bar{a})$ mit $\bar{a} \in A$ gilt, dann gilt auch $\mathfrak{B} \models \varphi(h(\bar{a}))$.

[1]Abgabe der Übungsblätter im Flur der Abteilung für Mathematische Logik in der Ernst-Zermelo-Straße 1