PD Dr. Markus Junker
Dr. Daniel Palacin
Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Wintersemester 2018/19

Modelltheorie
Übungsblatt 6
Abgabe[1]: 28.11.2018

Aufgabe 0. Formulieren Sie eine schriftliche Frage zum Vorlesungsstoff, z. B. über einen Punkt, der Ihnen unklar geblieben ist und den Sie gerne (ggf. nochmals) erläutert hätten, oder z. B. über etwas, worüber Sie gerne Näheres wissen möchten.

Aufgabe 1 (2 Punkte)**.**
Sei T eine modellvollständige Theorie. Zeigen Sie, dass T vollständig ist, falls es ein Modell $\mathfrak{A}$ von T gibt, welches sich in jedes Modell von T einbetten lässt.

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.**

a) Zeigen Sie mit Hilfe von Robinsons Test, dass die Theorie der dichten linearen Ordnungen ohne Endpunkte modellvollständig ist.

b) Ist die Theorie der dichten linearen Ordnungen mit Endpunkten modellvollständig?

Aufgabe 3 (8 Punkte)**.**
Eine $\mathcal{L}$-Aussage ist *positiv-existentiell* (kurz: $\exists^+$), wenn sie existentiell ist und ihr quantorenfreier Teil positiv ist (vgl. Blatt 5, Aufgabe 3). Zeigen Sie:

a) Äquivalent sind für $\mathcal{L}$-Theorien T, T':

   *a*1) Es gibt eine positiv-existentielle $\mathcal{L}$-Aussage, die T von T' trennt.

   *a*2) Wenn $\mathfrak{A} \models T$ und $\mathfrak{B} \models T'$, dann gibt es keinen Homomorphismus $h : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$.

b) Äquivalent sind für eine $\mathcal{L}$-Theorie T und $\mathcal{L}$-Aussage ϕ:

   *b*1) ϕ ist modulo T äquivalent zu einer positiv-existentiellen $\mathcal{L}$-Aussage.

   *b*2) ϕ bleibt unter Homomorphismen zwischen Modellen von T erhalten, d.h. wenn $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \models T$, $h : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ ein Homomorphimus und $\mathfrak{A} \models \phi$, dann folgt $\mathfrak{B} \models \phi$.

Hinweis: Benutzen Sie Blatt 5, Aufgabe 3.

[1] Abgabe der Übungsblätter im Flur der Abteilung für Mathematische Logik in der Ernst-Zermelo-Straße 1.

Aufgabe 4 (6 Punkte).
Sei $\mathcal{K}$ eine Klasse von $\mathcal{L}$-Strukturen. Man definiert die Theorie von $\mathcal{K}$ durch

$$\mathrm{Th}(\mathcal{K}) = \{\varphi \in \mathcal{L} : \mathfrak{A} \models \varphi \text{ für alle } \mathfrak{A} \text{ in } \mathcal{K}\}\,.$$

a) Sei $\mathfrak{A}$ ein Modell von $\mathrm{Th}(\mathcal{K})$ und φ eine $\mathcal{L}$-Aussage von $\mathrm{Th}(\mathfrak{A})$. Zeigen Sie, dass es eine $\mathcal{L}$-Struktur $\mathfrak{B}$ in $\mathcal{K}$ mit $\mathfrak{B} \models \varphi$ gibt.

b) Sei $\mathfrak{A}$ ein Modell von $\mathrm{Th}(\mathcal{K})$. Zeigen Sie, dass es ein Ultraprodukt von Strukturen aus $\mathcal{K}$ gibt, das elementar äquivalent zu $\mathfrak{A}$ ist.
Hinweis: Kompaktheitssatz.

c) Schließen Sie daraus, dass $\mathcal{K}$ genau dann eine elementare Klasse ist, wenn $\mathcal{K}$ unter elementarer Äquivalenz und Ultraprodukten abgeschlossen ist.