PD Dr. Markus Junker
Dr. Daniel Palacin

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Wintersemester 2018/19

Modelltheorie

Übungsblatt 9

Abgabe[1]: 19.12.2018

Aufgabe 1 (6 Punkte)**.**
Sei $\mathcal{L}$ die Sprache mit einem zweistelligen Relationsymbol E. Sei T_1 die $\mathcal{L}$-Theorie, welche besagt, dass E eine Äquivalenzrelation ist, welche für jede natürliche Zahl k genau eine Äquivalenzklasse mit genau k Elementen hat. Des weiteren sei T_2 die $\mathcal{L}$-Theorie, welche besagt, dass E eine Äquivalenzrelation mit unendlich vielen Äquivalenzklassen ist, die keine endliche Äquivalenzklasse besitzt.

a) Ist T_1 $\aleph_0$-kategorisch? Ist T_2 $\aleph_0$-kategorisch?

b) Beschreiben Sie die Typen in $S_n^{T_2}$.

c) Hat T_1 Quantorenelimination? Was sind die isolieren Typen?

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.**
Sei $\mathcal{L} = \{<\} \cup \{c_n : n \in \mathbb{N}\}$ und T die $\mathcal{L}$-Theorie der dichten linearen Ordnungen ohne Endpunkte mit:

$$\{c_i < c_j : i < j\}.$$

Zeigen Sie, dass T bis auf Isomorphie genau drei abzählbare Modelle hat.
Hinweis: Versuchen Sie einen Isomorphismus zwischen zwei beliebigen abzählbaren Modellen zu konstruieren. Beachten Sie: Jedes offene Intervall ist selbst eine dichte lineare Ordnung.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.**
Sei $\mathfrak{M}$ eine Struktur und sei X die Teilmenge der 1-Typen $p(x)$ über $\emptyset$, die $\mathfrak{M}$ realisiert. Das heißt,

$$X = \left\{ p(x) \in S_1(\emptyset) : p(x) = \mathrm{tp}^{\mathfrak{M}}(a/\emptyset) \text{ für ein } a \text{ in } M \right\}.$$

a) Zeigen Sie, dass jedes $p \in S_1^{\mathfrak{M}}(\emptyset) \setminus X$ nicht isoliert ist.

b) Zeigen Sie: Wenn X endlich ist, gilt auch die Umkehrung. Folgern Sie, dass für endliches X gilt $X = S_1^{\mathfrak{M}}(\emptyset)$.

Aufgabe 4 (6 Punkte)**.**
Betrachten Sie $\mathfrak{N} = (\mathbb{Q}, +, 0, <)$.

a) Zeigen Sie, dass $|S_1^{\mathfrak{N}}(\emptyset)| = 3$.
Hinweis: Für jedes q in $\mathbb{Q}$ mit $q > 0$ ist die Abbildung $x \mapsto q \cdot x$ ein Automorphismus und benutzen Sie Aufgabe 2.

b) Zeigen Sie, dass $|S_1^{\mathfrak{N}}(\{1\})| \geq |\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$.

c) Schließen Sie daraus, dass $|S_2^{\mathfrak{N}}(\emptyset)| \geq 2^{\aleph_0}$.

[1] Abgabe der Übungsblätter im Flur der Abteilung für Mathematische Logik in der Ernst-Zermelo-Straße 1.