Prof. Amador Martin-Pizarro
Übungen: Daniel Palacín

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Wintersemester 2019/2020

Modelltheorie
Blatt 10
Abgabe: 28.01.2020, 14 Uhr

Aufgabe 1 (20 Punkte)**.**
In der Graphensprache $\mathcal{L} = \{R\}$ sei $\mathcal{K}$ die Klasse *freier Pseudoebenen*, d.h. die Klasse aller Graphen $\mathcal{A}$ mit folgenden Eigenschaften:

- Jeder Punkt hat unendlich viele (direkte) Nachbarn.
- Es gibt keine nicht-triviale abgeschlossene Pfade, d.h. es gibt keine Folge $(x_0, \ldots, x_{n+1})$ mit $n \geq 2$, $x_0 = x_{n+1}$, $x_i R x_{i+1}$ für alle $0 \leq i \leq n$ und $x_i \neq x_j$ für all $0 \leq i < j \leq n$.

a) Gib eine Axiomatisierung T der Klasse $\mathcal{K}$ an. Ist $\mathcal{K}$ nicht leer? (Ein Bild genügt).

b) Hat T Quantorenelimination?
Hinweis: Nimm zwei Punkte.

Eine Teilmenge C einer freien Pseudoebene $\mathcal{A}$ heißt *pfad-abgeschlossen (in A)*, wenn je zwei Punkte a und b aus C durch einen Pfad mit Knoten aus C verbunden sind, falls sie durch einen Pfad aus A verbunden waren.

c) Zeige, dass elementare Unterstrukturen einer freien Pseudoebene $\mathcal{A}$ pfad-abgeschlossen in A sind.

d) Sei C pfad-abgeschlossen in der freien Pseudoebene $\mathcal{A}$ und b ein Element aus A. Zeige, dass $C \cup \{b\}$ auch pfad-abgeschlossen ist, wenn es keinen Pfad zwischen b und Elemente aus C gibt.

e) Des Weiteren, falls P ein Pfad zwischen b und dem Element c in der pfad-abgeschlossenen Menge C ist, so ist $C \cup \{x : x \in P\}$ auch pfad-abgeschlossen.

f) Zeige, dass die Kollektion partieller Isomorphismen zwischen pfad-abgeschlossenen endlich erzeugten Unterstrukturen $\aleph_0$-saturierter Modelle von T ein nicht-leeres Back-&-Forth System bildet.

g) Schließe daraus, dass T vollständig ist.

h) Sei C pfad-abgeschlossen in $\mathcal{A}$. Wie groß ist $S_1^{\mathcal{A}}(C)$?

i) Wie sieht allgemein eine ununterscheidbare Folge $(b_i)_{i \in \mathbb{N}}$ von Elementen aus?
Hinweis: DS^2 und Plätzchen.

j) Ist die Formel xRa minimal?

Die Übungsblätter können zu zweit eingereicht werden. Abgabe der Übungsblätter im Fach im Keller des mathematischen Instituts.