Prof. Amador Martin-Pizarro
Übungen: Daniel Palacín

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Wintersemester 2019/2020

Modelltheorie

Blatt 4

Abgabe: 26.11.2019, 14 Uhr

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.**

Sei p entweder 0 oder eine Primzahl. Betrache die Theorie ACF_p algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik p in der Ringsprache $\mathcal{L}_{\mathrm{Ring}}$. Gegeben eine $\mathcal{L}_{\mathrm{Ring}}$-Formel $\varphi[x, y_1, \ldots, y_n]$, zeige, dass es ein N aus $\mathbb{N}$ (welches nur von φ abhängt) derart gibt, dass für jedes Tupel $(b_1, \ldots, b_n)$ in einem Modell $\mathcal{A}$ von ACF_p die Menge

$$\varphi[\mathcal{A}, b_1, \ldots, b_n] = \{a \in A \mid \mathcal{A} \models \varphi[a, b_1, \ldots, b_n]\}$$

entweder unendlich oder der Mächtigkeit höchstens N ist.

Aufgabe 2 (6 Punkte)**.**

Die Sprache $\mathcal{L} = \{E_n\}_{1 \geq n \in \mathbb{N}}$ besteht aus unendlich vielen zweistelligen Relationszeichen E_n. Betrachte die Theorie T in der Sprache $\mathcal{L}$, welche besagt, dass jedes E_n eine Äquivalenzrelation ist und dass E_{n+1} die Relation E_n verfeinert (d.h. $E_{n+1} \subset E_n$). Ferner besitzt E_1 unendlich viele Klassen und jede E_n-Klasse zerlegt in unendlich vielen E_{n+1}-Klassen.

a) Gib eine Axiomatisierung von T an. Zeige, dass T konsistent ist.

HINWEIS: Für f und g aus der Menge $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ abzählbarer Folgen aus natürlichen Zahlen, setze $E_1(f, g)$, falls $f(1) = g(1)$. Wie definiert man nun E_n, so dass $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ ein Modell von T ist?

b) Zeige, dass T Quantorenelimination hat und vollständig ist.

Aufgabe 3 (10 Punkte)**.**

Auf der Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen sei $\mathcal{B}$ die Kollektion aller Intervalle der Form $(a, +\infty)$, mit a aus $\mathbb{R}$.

a) Zeige, dass $\mathfrak{B}$ eine Basis einer Topologie T_∞ bildet.

b) Ist das Intervall $(0, 1)$ offen? Ist es abgeschlossen?

c) Ist die Topologie T_∞ Hausdorff? Ist sie T_1?

d) Ist die Einermenge $\{0\}$ abgeschlossen?

e) Ist die Exponentialabbildung $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig als Abbildung

1. vom topologischen Raum $(\mathbb{R}, T_\infty)$ nach $(\mathbb{R}, T_\infty)$?
2. von $(\mathbb{R}, T_\infty)$ nach $\mathbb{R}$ mit der euklidischen Topologie?
3. von $\mathbb{R}$ mit der euklidischen Topologie nach $(\mathbb{R}, T_\infty)$?

Die Übungsblätter können zu zweit eingereicht werden. Abgabe der Übungsblätter im Fach im Keller des mathematischen Instituts.