Topologie

Ein Kurzskript

A. Martin-Pizarro

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Sommersemester 2024

pizarro@math.uni-freiburg.de

2. Juli 2024

Anmerkungen.

Dieses Kurzskript ist während die im Sommersemester 2020 und 2024 an der Albert-Ludwigs-Universität in Freiburg gehaltenene Vorlesungen „Topologie“ entstanden und stark geprägt vom Buch *Topology* von James R. Munkres (*ISBN:978-93-325-4953-1*).

Zu meinem eigenen Beitrag gehören sicherlich die zahlreichen Fehler, welche es im Skript definitiv geben wird. Ich bin sehr dankbar über die Mitteilung solcher Fehler und Ungenauigkeiten.

Insbesondere bedanke ich mich herzlich bei Herrn Michael Lösch und Herrn Daniel Palacín sowie bei Herrn Quoc Huy Dang für das aufmerksame Korrekturlesen aber vor allem für die Geduld.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Topologische Räume

1.1 Topologien und Räume

In den Vorlesungen *Analysis I & II* haben wir die *euklidische Metrik* (auch genannt *Abstandsfunktion*) auf der Menge $\mathbb{R}^n$ definiert.

Definition 1.1. Ein *metrischer Raum* (X, d) ist eine Menge X zusammen mit einer Abbildung $\mathrm{d} : X \times X \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ mit folgenden Eigenschaften:

a) $\mathrm{d}(x, y) = 0 \Longleftrightarrow y = x$.

b) $\mathrm{d}(x, y) = \mathrm{d}(y, x)$.

c) Die Dreiecksungleichung
$$\mathrm{d}(x, y) \leq \mathrm{d}(x, z) + \mathrm{d}(z, y).$$

In einem metrischen Raum (X, d) definieren wir für jedes ϵ aus $\mathbb{R}$ und x aus X die *offene Kugel* mit Radius ϵ und Mittelpunkt x als:

$$B_\epsilon^X(x) = \{y \in X \mid \mathrm{d}(x, y) < \epsilon\}.$$

Beachte, dass $B_\epsilon^X(x) = \emptyset$ genau dann, wenn $\epsilon \leq 0$.

Für $X = \mathbb{R}$ mit der euklidischen Metrik ist $B_\epsilon^{\mathbb{R}}(x)$ das offene Intervall $(x - \epsilon, x + \epsilon)$.

Definition 1.2. Zwei Metriken d_1 und d_2 auf der Menge X sind *äquivalent*, falls es reelle Konstanten $K_1 > 0$ und $K_2 > 0$ so gibt, dass für alle x und y aus X

$$K_1 \, \mathrm{d}_1(x, y) \leq \mathrm{d}_2(x, y) \leq K_2 \, \mathrm{d}_1(x, y).$$

Beispiel 1.3. Die euklidische Metrik auf $\mathbb{R}^n$ ist äquivalent zu der Metrik

$$\mathrm{d}_\infty(\bar{x}, \bar{y}) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|.$$

Wie sehen offene Kugeln bezüglich der Metrik d_∞?

Definition 1.4. Eine Teilmenge U eines metrischen Raumes (X, d) ist *offen*, falls es für jedes Element x aus U ein $\epsilon > 0$ (welches von x abhängt) so gibt, dass

$$B_\epsilon^X(x) \subset U.$$

Notation. Die Notation $A \subset B$ bedeutet **NICHT**, dass $A \subsetneq B$.

Bemerkung 1.5. Es ist leicht zu sehen, dass äquivalente Metriken dieselben offenen Mengen besitzen.

Die offenen Teilmengen eines metrischen Raumes (X, d) haben folgende Eigenschaften:

- Sowohl der ganze Raum X als auch die Menge $\emptyset$ sind offen.
- Wenn U und V offen sind, so ist $U \cap V$ offen.
- Für jede Familie $(U_i)_{i\in I}$ offener Teilmengen ist die Vereinigung $\bigcup_I U_i$ offen.

Definition 1.6. Ein *topologischer Raum* ist eine Menge X zusammen mit einer Kollektion $\mathcal{T}$ von Teilmengen von X mit den folgenden Eigenschaften:

- Sowohl der ganze Raum X als auch die Menge $\emptyset$ liegen in $\mathcal{T}$.
- Wenn U und V in $\mathcal{T}$ sind, so liegt $U \cap V$ in $\mathcal{T}$.
- Für jede Familie $(U_i)_{i\in I}$ von Teilmengen von X mit U_i in $\mathcal{T}$ für jedes i aus I liegt die Vereinigung $\bigcup_I U_i$ in $\mathcal{T}$

Wir sagen, dass eine Teilmenge U von X *offen* ist, wenn U in $\mathcal{T}$ liegt.

Beispiel 1.7.

- Jeder metrische Raum ist ein topologischer Raum. Insbesondere definiert die euklidische Metrik eine Topologie auf $\mathbb{R}^n$, die *euklidische Topologie* $\mathcal{T}_{\mathrm{eukl}}$.
- Auf jeder Menge X können wir die *triviale Topologie* $\mathcal{T}_{triv} = \{X, \emptyset\}$ definieren.
- Auf jeder Menge X können wir die *diskrete Topologie* $\mathcal{T}_{disk} = \mathcal{P}(X)$ aller Teilmengen von X definieren.
- Auf der Menge $X = \{1, 2\}$ definiert die Kollektion
  $$\mathcal{T} = \{\emptyset, \{1\}, X\}$$
  eine Topologie, welche weder die diskrete noch die triviale Topologie ist.

  Kommt diese Topologie von einer Metrik?
- Gegeben eine Menge X bildet die Kollektion aller endlichen Teilmengen von X genau dann eine Topologie, wenn X selbst endlich ist. Aber für jede beliebige Menge X bildet
  $$\mathcal{T}_{koend} = \{U \subset X \mid U = \emptyset \text{ oder } X \setminus U \text{ endlich}\}$$
  eine Topologie (genannt die *koendliche* Topologie).

  Analog können wir die *koabzählbare* Topologie definieren.

Definition 1.8. Eine Kollektion $\mathcal{B}$ von Teilmengen einer Menge X ist eine *Basis einer Topologie*, falls folgende Eigenschaften gelten:

a) Jedes Element x aus X liegt in einem B aus $\mathcal{B}$.

b) Gegeben B_1 und B_2 aus $\mathcal{B}$ und x aus $B_1 \cap B_2$ gibt es ein B_3 aus $\mathcal{B}$ mit

$$x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2.$$

Bemerkung 1.9. Eine Basis einer Topologie $\mathcal{B}$ auf X definiert eine Topologie $\mathcal{T}_\mathcal{B}$ in folgender Weise: wir sagen, dass eine Menge U offen ist (bezüglich der von $\mathcal{B}$ induzierten Topologie $\mathcal{T}_\mathcal{B}$), falls es für jedes x aus U ein B aus $\mathcal{B}$ mit

$$x \in B \subset U$$

gibt.

Bemerkung 1.10. Die Kollektion offener Kugeln bildet eine Basis der metrischen Topologie.

Jede Topologie besitzt eine Basis, nämlich die Kollektion aller offenen Teilmengen. Insbesondere kann eine Topologie verschiedene Basen besitzen.

Beispiel 1.11. Sei $(X, <)$ eine linear angeordnete Menge. Die Kollektion offener Intervalle (a, b) mit $a < b$ aus der Menge $X \cup \{-\infty, \infty\}$ mit den natürlichen Interpretationen für $-\infty$ und ∞ (so der gesamte Raum wird auch als Intervall gesehen) bildet eine Basis einer Topologie auf X, genannt die *Ordnungstopologie*.

Definition 1.12. Gegeben zwei Topologien $\mathcal{T}_1$ und $\mathcal{T}_2$ auf der Menge X ist $\mathcal{T}_1$ *feiner* als $\mathcal{T}_2$ (oder $\mathcal{T}_2$ ist *gröber* als $\mathcal{T}_1$), falls jede offene Menge bezüglich $\mathcal{T}_2$ auch offen bezüglich $\mathcal{T}_1$ ist, oder äquivalent dazu, wenn $\mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T}_1$ (als Teilmengen von $\mathcal{P}(X)$).

Die Topologien $\mathcal{T}_1$ und $\mathcal{T}_2$ sind *äquivalent*, wenn sie sich gegenseitig verfeinern.

Bemerkung 1.13. Die triviale Topologie ist die gröbste Topologie und die diskrete Topologie ist die feinste Topologie.

Seien $\mathcal{B}_1$ und $\mathcal{B}_2$ jeweils Basen der Topologien $\mathcal{T}_1$ und $\mathcal{T}_2$. Es lässt sich leicht zeigen, dass $\mathcal{T}_1$ genau dann $\mathcal{T}_2$ verfeinert, wenn es für jedes x aus B', mit B' aus $\mathcal{B}_2$, ein B aus $\mathcal{B}_1$ mit $x \in B \subset B'$ gibt. Insbesondere induzieren äquivalente Metriken äquivalente Topologien.

Beispiel 1.14. Die Kollektion aller Teilmengen aus $\mathbb{R}$ der Form

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$$

mit $a < b$ bildet eine Basis einer Topologie $\mathcal{T}_{Sorg}$, genannt die *Sorgenfrey* Topologie, welche echt feiner als die euklidische Topologie ist.

Aus jeder beliebigen Kollektion $\mathcal{S}$ von Teilmengen von X gewinnen wir eine Topologie aus der Basis $\mathcal{B}_\mathcal{S}$, welche aus Durchschnitten endlich vieler Elemente aus $\mathcal{S}$ besteht, wobei der leere Durchschnitt der gesamte Raum X ist. Die von $\mathcal{B}_\mathcal{S}$ definierte Topologie $\mathcal{T}_\mathcal{S}$ wird von der Familie $\mathcal{S}$ *erzeugt*.

Bemerkung 1.15. Die Topologie $\mathcal{T}_\mathcal{S}$ ist die gröbste Topologie derart, dass jedes Element S aus $\mathcal{S}$ offen ist.

Definition 1.16. In einem topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ ist eine Teilmenge C *abgeschlossen*, wenn ihr mengentheoretisches Komplement $C^c = X \setminus C$ offen ist.

Bemerkung 1.17. Beachte, dass die Kollektion abgeschlossener Teilmengen eines Topologischen Raumes $(X, \mathcal{T})$ folgende Eigenschaften besitzt:

- Sowohl der ganze Raum X als auch die Menge $\emptyset$ sind abgeschlossen.
- Wenn C_1 und C_2 abgeschlossen sind, so ist $C_1 \cup C_2$ abgeschlossen.
- Für jede Familie $(C_i)_{i \in I}$ abgeschlossener Teilmengen von X ist der Durchschnitt $\bigcap_I C_i$ abgeschlossen.

Insbesondere hätten wir dual mit Hilfe des Komplements aus einer ausgewählten Kollektion $\mathcal{C}$ *abgeschlossener Teilmengen* eine Topologie definieren können, das heißt, wenn $\mathcal{C}$ die obigen Eigenschaften besitzt.

Definition 1.18. Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ ist 0-*dimensional*, wenn es eine Basis der Topologie gibt, welche aus offen-abgeschlossen Mengen besteht.

Die diskrete Topologie ist immer 0-dimensional.

1.2 Umgebungen und Abschlüsse

Definition 1.19. Eine *Umgebung* eines Punktes x in einem topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ ist eine offene Teilmenge U mit x in U.

Schreibe U^x, wenn U eine Umgebung von x ist.

Definition 1.20. Sei A eine Teilmenge in einem topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$. Ein Punkt x aus X ist:

- *ein innerer Punkt* von A, falls es eine Umgebung U^x mit $U^x \subset A$ gibt.
- *ein Berührungspunkt (oder Adhärenzpunkt)* von A, falls $U^x \cap A \neq \emptyset$ für jede Umgebung U^x.
- *ein Häufungspunkt (oder Limespunkt)* von A, falls $U^x \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$ für jede Umgebung U^x. Schreibe $\lim A$ (oder A') für die Kollektion aller Häufungspunkte von A.
- *ein Randpunkt* von A, falls $U^x \cap A \neq \emptyset$ und $U^x \cap A^c \neq \emptyset$ für jede Umgebung U^x.

Rand- und Häufungspunkte sind Berührungspunkte.

Definition 1.21. In einem topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ sei A eine gegebene Teilmenge.

- Das *Innere* $\mathring{A}$ von A ist die größte offene Teilmenge, welche ganz in A enthalten ist, das heißt,
$$\mathring{A} = \bigcup_{\substack{U \in \mathcal{T} \\ U \subset A}} U.$$
- Der *Abschluss* $\overline{A}$ von A ist die kleinste abgeschlossene Menge, welche A enthält, das heißt,
$$\overline{A} = \bigcap_{\substack{C \text{ abg} \\ A \subset C}} C.$$

- Der *Rand* ∂A von A ist $\partial A = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$

Bemerkung 1.22. Folgendes lässt sich leicht zeigen.

a) Das Innere ist die Kollektion aller inneren Punkte.

b) Der Abschluss ist die Kollektion aller Berührungspunkte.

c) Der Rand ist die Kollektion aller Randpunkte.

d) Das Innere des Komplements von A ist das Komplement des Abschlusses von A:

$$(\overline{A})^c = (\overset{\circ}{A^c}).$$

Analog ist der Abschluss des Komplements von A das Komplement des Inneren von A:

$$X \setminus \overset{\circ}{A} = \overline{(A^c)}\,.$$

e) $\overline{A} = A \cup \lim A$.

Dennoch muss die Menge A nicht disjunkt von $\lim A$ sein: z. B. gegeben ein offenes Intervall $A = (a, b)$ mit der euklidischen Topologie auf $\mathbb{R}$, ist $\overline{A} = \lim A = [a, b]$. Ferner ist $\overset{\circ}{A} = A$ und $\partial A = \{a, b\}$.

Aufgabe. Zeige, dass $(\overset{\circ}{A \cap B}) = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$ und $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Lemma 1.23. *Eine Teilmenge A ist genau dann abgeschlossen im topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$, wenn A alle ihre Häufungspunkte enthält.*

Beweis. Wenn A abgeschlossen ist, ist $A = \overline{A} \supset \lim A$ und somit enthält A alle ihre Häufungspunkte. Angenommen, dass $\lim A \subset A$, haben wir $\overline{A} = A \cup \lim A \subset A \subset \overline{A}$. Somit ist $A = \overline{A}$, also abgeschlossen. □

Definition 1.24. Ein Punkt x einer Teilmenge A ist *isoliert*, wenn x kein Häufungspunkt ist, oder äquivalent dazu, wenn es eine Umgebung $U = U^x$ mit $U \cap A = \{x\}$ gibt.

Beispiel 1.25. Für die Menge $A = \{\frac{1}{n}\}_{0 \neq n \in \mathbb{N}}$ ist jeder Punkt aus A isoliert (bezüglich der euklidischen Topologie auf $\mathbb{R}$). Was sind die Häufungspunkte von A? Ist A abgeschlossen?

Definition 1.26. Eine Teilmenge A eines topologischen Raumes $(X, \mathcal{T})$ ist *dicht*, falls $\overline{A} = X$. Sie ist *nirgends dicht*, falls $\overset{\circ}{\overline{A}} = \emptyset$.

Bemerkung 1.27. Eine Menge ist genau dann dicht in X, wenn $A \cap U \neq \emptyset$ für alle offenen Teilmengen $U \neq \emptyset$.

Das Komplement einer nirgends dichten Menge ist dicht. Die Rückrichtung gilt nicht: Bezüglich der euklidischen Metrik auf $\mathbb{R}$ ist die Menge $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dicht, aber die Menge $\mathbb{Q}$ ist nicht nirgends dicht, denn $\overline{Q} = \mathbb{R} = \overset{\circ}{\mathbb{R}} \neq \emptyset$.

Die Cantormenge ist nirgends dicht, denn sie ist abgeschlossen mit Maß Null.

Aufgabe. Eine Menge A ist genau dann nirgends dicht, wenn $X \setminus \overline{A}$ dicht ist.

Wir haben gesehen, dass $\mathbb{Q}$ nicht nirgends dicht ist. Dennoch soll diese Menge *kleiner* als die irrationalen Zahlen $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sein. Daher führen wir folgenden Begriff ein:

Definition 1.28. Eine Teilmenge A eines topologischen Raumes $(X, \mathcal{T})$ ist *mager*, wenn A in einer Vereinigung abzählbar vieler nirgends dichter Mengen A_n liegt,

$$A \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n.$$

Weil jeder Punkt in $\mathbb{R}$ nirgends dicht ist, folgt, dass $\mathbb{Q}$ mager ist. Die irrationalen Zahlen $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sind also nicht mager wegen dem Baire'schen Kategoriensatz, welcher in allen vollständigen metrischen Räumen gilt.

1.3 Trennungseigenschaften

Definition 1.29. Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ ist (oder besitzt die Eigenschaft):

- T_1, falls es für je zwei Punkte $x \neq y$ aus X Umgebungen $U = U^x$ und $V = V^y$ derart gibt, dass x in $U \setminus V$ und y in $V \setminus U$ liegt.
- T_2 oder *Hausdorff*, falls es für je zwei Punkte $x \neq y$ aus X disjunkte Umgebungen U^x und V^y gibt.

Beachte, dass T_1 aus T_2 folgt.

Bemerkung 1.30. Wenn $(X, \mathcal{T})$ Hausdorff (bzw. T_1) ist, so ist dies auch $(X, \mathcal{T}')$ für jede feinere Topologie $\mathcal{T}'$ auf X.

Jeder metrische Raum ist Hausdorff.

In einem T_1-Raum ist jeder Punkt abgeschlossen.

Aufgabe. Betrachte auf $\mathbb{R}$ die Topologie mit der Basis gegeben durch die unendlichen Intervalle der Form (a, ∞), für a aus $\mathbb{R}$. Ist diese Topologie T_2? Ist sie T_1? Ist der Punkt 0 abgeschlossen?

Definition 1.31. Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in einem topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$. Die Folge *konvergiert gegen den Punkt x* (oder x ist ein *Limes* der Folge), falls es für jede Umgebung $U = U^x$ eine natürliche Zahl n_0 so gibt, dass x_n in U für alle $n \geq n_0$ liegt.

Beachte, dass die obige Definition den Begriff der Konvergenz in metrischen Räumen (mit ϵ-Kugeln) verallgemeinert.

Aufgabe. Wenn x in $\overset{\circ}{A}$ liegt, zeige, dass es für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit Limes x eine natürliche Zahl n_0 so gibt, dass x_n in A für $n \geq n_0$ liegt.

Gilt die Rückrichtung? (cf. Proposition 4.4)? Wie sehen konvergierende Folgen bezüglich der koabzählbaren Topologie in $\mathbb{R}$ aus?

Nach der obigen Definition ist jeder Limes der (nichtkonstanten) Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ein Limespunkt der Menge $A = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Somit stimmt die Notation $x = \lim x_n$ mit unserer vorigen Notation für die Häufungspunkte überein.

Aufgabe. In einem Raum, der nicht Hausdorff ist, kann eine Folge mehrere Limes haben. Zum Beispiel, zeige, dass für die Topologie mit der Kollektion aller unendlichen Intervalle der Form (a, ∞) als Basis, jeder Punkt $x \leq 0$ Limes der Folge $(\frac{1}{n})_{0 \neq n \in \mathbb{N}}$ ist.

Bemerkung 1.32. In einem Hausdorff topologischen Raum besitzt jede Folge höchstens einen Limes.

Lemma 1.33. *Sei A eine Teilmenge eines Hausdorff topologischen Raumes. Der Punkt x ist genau dann ein Häufungspunkt von A, wenn für jede Umgebung U von x der Durchschnitt $U \cap A$ unendlich ist.*

Insbesondere besitzt eine endliche Teilmenge eines Hausdorff topologischen Raumes keine Häufungspunkte.

Beweis. Wenn der Durchschnitt $U \cap A$ unendlich ist, so ist es auch der Durchschnitt $U \cap (A \setminus \{x\})$. Daher müssen wir nur eine Richtung zeigen: Angenommen x besitzt eine Umgebung $U = U^x$ derart, dass der Durchschnitt $U \cap A$ endlich ist. Wenn dieser Durchschnitt leer ist, ist x kein Berührungspunkt (und somit auch kein Häufungspunkt) von A. Sei also $x_1, \ldots, x_n$ eine Aufzählung der Punkte im Durchschnitt $U \cap A$. Weil $(X, \mathcal{T})$ insbesondere T_1 ist, folgt, dass jeder Punkt abgeschlossen ist. Insbesondere ist die Menge

$$V = U \setminus \bigcup_{x_i \neq x} \{x_i\}$$

eine offene Umgebung von x. Ferner ist $V \cap (A \setminus \{x\})$ leer, so dass x kein Häufungspunkt von A ist. $\square$

Kapitel 2

Stetigkeit und Homöomorphismen

2.1 Stetige Abbildungen

In diesem Abschnitt werden wir den Begriff der Stetigkeit einer Funktion auf beliebige topologische Räume verallgemeinern. Dafür fangen wir mit einer Beobachtung in metrischen Räumen an.

Bemerkung 2.1. Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume sowie $f : X \to Y$ eine Abbildung und a ein Punkt aus X. Folgende Aussagen sind äquivalent:

1) Die Abbildung f ist stetig auf dem Punkt a, das heißt, für jedes $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ so, dass $\mathrm{d}_Y(f(x), f(a)) < \epsilon$ für alle x aus X mit $\mathrm{d}_X(x, a) < \delta$.

2) Für jede offene Kugel $B^Y_\epsilon(f(a))$ gibt es ein $\delta > 0$ so, dass $B^X_\delta(a) \subset f^{-1}\left(B^Y_\epsilon(f(a))\right)$.

3) Wenn die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a konvergiert, so konvergiert die Folge $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $f(a)$ in Y.

Beweis. 1) $\Rightarrow$ 2): Für die offene Kugel $B^Y_\epsilon(f(a))$ mit Radius ϵ sei δ wie in 1). Wir müssen zeigen, dass $B^X_\delta(a) \subset f^{-1}\left(B^Y_\epsilon(f(a))\right)$. Sei x aus $B^X_\delta(a)$, das heißt $\mathrm{d}_X(x, a) < \delta$. Es folgt, dass $\mathrm{d}_Y(f(x), f(a)) < \epsilon$. Das heißt $f(x)$ liegt in $B^Y_\epsilon(f(a))$ und somit liegt x in $f^{-1}\left(B^Y_\epsilon(f(a))\right)$, wie gewünscht.

2) $\Rightarrow$ 3): Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine gegen a konvergente Folge in X. Wir müssen zeigen, dass $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $f(a)$ konvergiert (siehe Definition 1.31). Gegeben eine offene Umgebung U von $f(a)$ können wir annehmen, dass $U = B^Y_\epsilon(f(a))$ für ein $\epsilon > 0$. Sei nun $\delta > 0$ mit $B^X_\delta(a) \subset f^{-1}\left(B^Y_\epsilon(f(a))\right)$. Weil die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a konvergiert, gibt es eine natürliche Zahl n_0 so, dass x_n in $B^X_\delta(a)$ für $n \geq n_0$ liegt. Also $f(x_n)$ liegt in $B^Y_\epsilon(f(a))$ für $n \geq n_0$, wie gewünscht.

3) $\Rightarrow$ 1): Sei $\epsilon > 0$ fest. Der Punkt a liegt klarerweise in der Menge $A = f^{-1}\left(B^Y_\epsilon(f(a))\right)$.

Behauptung. *Der Punkt a liegt im Inneren von A.*

Beweis der Behauptung. Ansonsten liegt a in $X \setminus \overset{\circ}{A} = \overline{(A^c)}$ wegen Bemerkung 1.22. Insbesondere ist a ein Berührungspunkt von A^c. Wähle für jedes $n \neq 0$ aus $\mathbb{N}$ einen Punkt

$$x_n \in B^X_{\frac{1}{n}}(a) \cap A^c \neq \emptyset.$$

Aus der Konstruktion konvergiert die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a und aus der Hypothese folgt, dass die Folge der Bilder $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $f(a)$ in Y konvergiert. Für die offene Umgebung $B^Y_\epsilon(f(a))$ gibt es eine natürliche Zahl n_0 so, dass $f(x_n)$ in $B^Y_\epsilon(f(a))$ für $n \geq n_0$ liegt, das heißt, x_n liegt in A, was unserer Wahl der Folge widerspricht und den gewünscht Widerspruch liefert. $\square$ Beh.

Weil a in $\overset{\circ}{A}$ liegt, können wir annehmen, dass $B^X_\delta(a) \subset A$ für ein $\delta > 0$. Insbesondere, wenn $\mathrm{d}_X(x,a) < \delta$, liegt x in A und somit $f(x)$ in $B^Y_\epsilon(f(a))$, das heißt $\mathrm{d}_Y(f(x), f(a)) < \epsilon$. $\square$

Wir benutzen nun die äquivalente Formulierung aus 2), um eine allgemeine Definition der Stetigkeit anzugeben.

Definition 2.2. Seien $(X, \mathcal{T}_X)$ und $(Y, \mathcal{T}_y)$ topologische Räume und a ein Punkt aus X. Die Abbildung $f : X \to Y$ ist *stetig im Punkt* a, falls es für jede $\mathcal{T}_Y$-Umgebung $V = V^{f(a)}$ eine $\mathcal{T}_X$-Umgebung $U = U^a$ mit $U \subset f^{-1}(V)$ gibt.

Die Abbildung ist *stetig*, wenn sie in jedem Punkt aus X stetig ist.

Lemma 2.3. *Gegeben eine Abbildung $f : X \to Y$ vom topologischen Raum $(X, \mathcal{T}_X)$ nach dem topologischen Raum $(Y, \mathcal{T}_y)$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

a) Die Abbildung f ist stetig.

b) Das Urbild jeder offenen Teilmenge V von Y ist offen in X.

c) Gegeben eine Basis $\mathcal{B}_Y$ der Topologie $\mathcal{T}_Y$ ist das Urbild jedes Basiselementes B offen in X.

d) Das Urbild jeder abgeschlossenen Teilmenge C von Y ist abgeschlossen in X.

e) Für jede Teilmenge A von X enthält der $\mathcal{T}_Y$-Abschluss von $f(A)$ in Y die Menge $f(\overline{A})$, wobei $\overline{A}$ der $\mathcal{T}_X$-Abschluss von A in X ist, das heißt $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

Beweis. *a)* $\Rightarrow$ *b)*: Sei x in $f^{-1}(V)$ beliebig. Weil f stetig im Punkt x ist, gibt es eine Umgebung $U = U^x$ mit $U \subset f^{-1}(V)$. Insbesondere ist

$$f^{-1}(V) = \bigcup_{x \in f^{-1}(V)} U^x$$

offen.

Die Richtung *b)* $\Rightarrow$ *c)* ist trivial, denn Basiselemente sind offene Teilmengen.

c) $\Rightarrow$ *d)*: Sei C eine abgeschlossene Teilmenge von Y. Die Menge $V = Y \setminus C$ ist offen in Y. Weil die Kollektion offener Teilmengen immer eine Basis der Topologie bildet, ist das Urbild von V offen in X. Nun ist

$$f^{-1}(V) = f^{-1}(Y \setminus C) = X \setminus f^{-1}(C)$$

offen in X und somit ist $f^{-1}(C)$ abgeschlossen in X, wie gewünscht.

d) $\Rightarrow$ *e)*: Sei $A \subset X$. Die Menge $C = \overline{f(A)}$ ist abgeschlossen in Y und enthält $f(A)$. Also ist $f^{-1}(C)$ abgeschlossen in X und enthält A. Aus der Definition des Abschlusses folgt, dass $\overline{A} \subset f^{-1}(C)$. Insbesondere ist $f(\overline{A}) \subset f(f^{-1}(C)) \subset C = \overline{f(A)}$, wie gewünscht.

e) $\Rightarrow$ *a)*: Sei a ein beliebiger Punkt von X und $V = V^{f(a)}$ eine Umgebung von $f(a)$ in Y. Die Menge $C = Y \setminus V$ ist abgeschlossen. Setze $A = f^{-1}(C)$. Aus der Hypothese folgt

$$f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)} \subset \overline{C} = C.$$

Wenn wir Urbilder nehmen, gilt

$$\overline{A} \subset f^{-1}(f(\overline{A})) \subset f^{-1}(C) = A,$$

somit ist A abgeschlossen in X und daher $U = X \setminus A$ eine offene Umgebung von a, weil a nicht in A liegt. Wir müssen nur zeigen, dass $U \subset f^{-1}(V)$. Wenn x aus U, liegt x nicht in A, das heißt das Bild $f(x)$ liegt nicht in $C = Y \setminus V$. Also liegt $f(x)$ in V und somit liegt x in $f^{-1}(V)$, wie gewünscht. □

Korollar 2.4. *Die Komposition stetiger Abbildungen ist auch stetig.*

Aufgabe. Seien $f, g : X \to Y$ stetige Abbildungen topologischer Räume mit Y Hausdorff. Wenn die Menge $\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ dicht in X ist, dann sind f und g identisch.

Ähnlich zum Begriff der Isomorphismen für Vektorräume oder Gruppen, werden gewisse stetige Abbildungen, genannt Homöomorphismen, alle wichtigen topologischen Eigenschaften erhalten. Wir benötigen erstmal ein paar Definitionen.

Definition 2.5. Eine Abbildung $f : X \to Y$ topologischer Räume ist

- *offen*, falls das Bild jeder offener Menge in X wiederum offen in Y ist.
- *abgeschlossen*, falls das Bild jeder abgeschlossener Menge in X wiederum abgeschlossen in Y ist.

Diese Begriffe sind verschieden: z. B. ist die Projektion $\pi_2^1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ auf die erste Koordinate offen (bezüglich der euklidischen Topologien) aber nicht abgeschlossen, denn das Bild

$$\pi_2^1(\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \cdot y = 1\}) = (\mathbb{R} \setminus \{0\})$$

ist nicht abgeschlossen.

Jede konstante Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist abgeschlossen (bezüglich der euklidischen Topologie), aber klarerweise nicht offen. Wir werden gleich sehen, dass dieses Phänomen nicht vorkommen kann, wenn die Abbildung bijektiv ist.

Definition 2.6. Die topologischen Räume $(X, \mathcal{T}_X)$ und $(Y, \mathcal{T}_Y)$ sind *homöomorph*, falls es einen *Homöomorphismus* $f : X \to Y$ gibt, das heißt, eine bijektive stetige Abbildung derart, dass die inverse Abbildung $f^{-1} : Y \to X$ auch stetig ist.

Wir schreiben $X \approx Y$, wenn X und Y homöomorph sind.

Aus dem Korollar 2.4 folgt, dass die Komposition von Homöomorphismen wiederum ein Homöomorphismus ist. Insbesondere ist die Relation $\approx$ eine Äquivalenzrelation zwischen topologischen Räumen.

Bemerkung 2.7. Gegeben eine bijektive stetige Abbildung $f : X \to Y$ ist wegen Lemma 2.3 die inverse Abbildung f^{-1} genau dann stetig, wenn f offen (oder abgeschlossen) ist. Insbesondere ist ein Homöomorphismus genau eine stetige offene Bijektion, oder äquivalent dazu, eine stetige abgeschlossene Bijektion.

Aufgabe. Zeige, dass beide Trennungseigenschaften T_1 und T_2 unter Homöomorphismen erhalten bleiben.

2.2 Produkt- und Spurtopologien

In diesem Abschnitt sehen wir, wie aus Familien von Funktionen neue Topologien entstehen. Insbesondere gewinnen wir eine Topologie sowohl auf dem kartesischen Produkt als auch auf jeder Teilmenge eines topologischen Raumes.

Definition 2.8. Sei $\mathcal{F} = (f_i)_{i\in I}$ eine Familie von Abbildungen mit selbem Definitionsbereich Y und jedes $f_i(Y)$ eine Teilmenge des topologischen Raumes $(X_i, \mathcal{T}_i)$. Die Topologie $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$, welche *von der Familie $\mathcal{F}$ erzeugt wird*, ist die von der Kollektion $\mathcal{S} = \{f_i^{-1}(U_i)\}_{U_i\in\mathcal{T}_i}$ erzeugte Topologie auf Y.

Es folgt aus der Bemerkung 1.15, dass $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$ die gröbste Topologie auf Y mit der Eigenschaft, dass alle Abbildungen $f_i : Y \to X_i$ stetig sind, ist.

Beispiel 2.9.

- Gegeben eine Teilmenge Y eines topologischen Raumes $(X, \mathcal{T})$ ist die *Spurtopologie (oder Unterraumtopologie)* die von der Inklusionsabbildung

$$\begin{array}{rccc} \boldsymbol{i}_Y : & Y & \to & X \\ & y & \mapsto & y \end{array}$$

  erzeugte Topologie auf Y. Eine Basis der Spurtopologie ist die Kollektion der offenen Menge von der Form $U \cap Y$ mit $U \subset X$ offen.

- Gegeben endlich viele topologische Räume $(X_1, \mathcal{T}_1), \dots, (X_n, \mathcal{T}_n)$ ist die *Produkttopologie* die von den Abbildungen

$$\left(\begin{array}{rccc} \pi_n^i : & X_1 \times \cdots \times X_n & \to & X_i \\ & (x_1, \dots, x_n) & \mapsto & x_i \end{array}\right)_{1\le i\le n}$$

  erzeugte Topologie auf $X_1 \times \cdots \times X_n$. Eine Basis dieser Topologie ist durch die Teilmengen $U_1 \times \cdots \times U_n$ gegeben, wobei jedes U_i offen in X_i ist.

  Allgemeiner sei $(X_i, \mathcal{T}_i)_{i\in I}$ eine Familie topologischer Räume und

$$\prod_{i\in I} X_i = \{g : I \to \bigcup_{i\in I} X_i \,|\, g(i) \in X_i\}$$

  ihr kartesisches Produkt. Es folgt aus dem Auswahlaxiom (es ist sogar im Axiomensystem Zermelo-Fraenkel äquivalent dazu), dass die Menge $\prod_{i\in I} X_i$ nicht leer ist, wenn alle X_i nicht-leer sind. Wir stellen jede Funktion g aus $\prod_{i\in I} X_i$ als eine *Folge* $(x_i)_{i\in I}$ mit $x_i = g(i)$ dar. Insbesondere ist die *Produkttopologie auf* $\prod_{i\in I} X_i$ die von der Familie

$$\left(\begin{array}{rccc} \pi_j : & \prod\limits_{i\in I} X_i & \to & X_j \\ & (x_i)_{i\in I} & \mapsto & x_j \end{array}\right)_{j\in J}$$

  erzeugte Topologie. Jedes Element der Basis dieser Topologie bestimmt nur endlich viele offene nicht-triviale Teilmengen $U_{i_1}, \dots, U_{i_n}$ und sonst kommt auf jeder anderen Koordinate j der gesamte Raum X_j vor.

  Beachte, dass jede Projektionsabbbildung π_j offen und stetig ist.

Aufgabe. Für jedes n aus $\mathbb{N}$ sei X_n eine Kopie der reellen Geraden $\mathbb{R}$ mit der euklidischen Topologie. Ist die Menge

$$A = \left\{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \,|\, 0 < x_n < \frac{1}{n} \right\}$$

offen im Produkt $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$?

Bemerkung 2.10. Angenommen, dass für jedes i aus I der Raum $(X_i, \mathcal{T}_i)$ Hausdorff (bzw. T_1) ist und die Familie $\mathcal{F} = (f_i : Y \to X_i)_{i\in I}$ je zwei verschiedene Punkte $y_1 \neq y_2$ aus Y trennt, das heißt, dass es ein i aus I mit $f_i(y_1) \neq f_i(y_2)$ gibt. Dann ist die Topologie $\mathcal{T}_\mathcal{F}$ Hausdorff (bzw. T_1) auf Y.

Insbesondere ist jeder Unterraum eines Hausdorff Raumes wiederum Hausdorff (bezüglich der Spurtopolgie). Wenn alle X_i Hausdorff sind, so auch das Produkt $\prod_{i\in I} X_i$ mit der Produkttopologie.

Beweis. Gegeben $y_1 \neq y_2$ in Y gibt es ein i aus I mit $f_i(y_1) \neq f_i(y_2)$. Weil der Raum X_i Hausdorff ist, gibt es disjunkte Umgebungen $U = U^{f_i(y_1)}$ und $V = V_i^f(y_2)$ in X_i. Die Urbilder $f_i^{-1}(U)$ und $f_i^{-1}(V)$ sind disjunkte offene Umgebungen von y_1 und y_2, wie gewünscht. Der Beweis für T_1 ist analog. □

Definition 2.11. Eine Teilmenge Y eines topologischen Raumes $(X, \mathcal{T})$ ist *diskret*, falls die Spurtopologie auf Y die diskrete Topologie ist.

Bemerkung 2.12. Eine Teilmenge Y von X ist genau dann diskret, wenn jedes y aus Y in X isoliert bezüglich Y ist, das heißt, wenn es eine Umgebung $U = U^y$ in X mit $U \cap Y = \{y\}$ gibt.

Für bereits offene (bzw. abgeschlossene) Mengen ist die Spurtopologie gegeben durch die Teilmengen, die im Raum offen (bzw. abgeschlossen) sind.

Bemerkung 2.13. Wenn $Y \subset X$ offen ist, dann ist $U \subset Y$ genau dann offen bezüglich der Spurtopologie, wenn U offen in X ist.

Wenn $Y \subset X$ abgeschlossen ist, dann ist $C \subset Y$ genau dann abgeschlossen bezüglich der Spurtopologie, wenn C abgeschlossen in X ist.

Das folgende Lemma liefert die Stetigkeit einer Funktion durch Verkleben, wenn sie auf jeder abgeschlossenen Teilmenge stetig ist.

Satz 2.14. *(Verklebungslemma oder Pasting Lemma) Seien $(X, \mathcal{T}_X)$ und $(Y, \mathcal{T}_Y)$ topologische Räume mit $X = C_1 \cup \ldots \cup C_n$, wobei jedes $C_i \subset X$ abgeschlossen ist. Gegeben ein kompatibles System von Abbildungen $f_i : C_i \to Y$, das heißt,*

$$f_{i\restriction C_i\cap C_j} = f_{j\restriction C_i\cap C_j} \text{ für } 1 \leq i, j \leq n,$$

dann ist die (wohldefinierte) Abbildung

$$\begin{aligned} f : \ X &\to Y \\ x &\mapsto f_i(x) \text{ falls } x \in C_i \end{aligned}$$

stetig, wenn jede Abbildung $f_i : C_i \to Y$ stetig bezüglich der Spurtopologie auf C_i ist.

Beweis. Wegen Lemma 2.3 (d) genügt es, das Urbild einer abgeschlossenen Teilmenge C von Y zu betrachten. Da

$$f^{-1}(C) = \bigcup_{1 \le i \le n} f_i^{-1}(C) = \bigcup_{1 \le i \le n} C_i \cap f_i^{-1}(C),$$

ist wegen Bemerkung 2.13 die Menge $f^{-1}(C)$ abgeschlossen. $\square$

Wir liefern nun eine Charakterisierung stetiger Funktionen zwischen kartesischen Produkten topologischer Räume.

Bemerkung 2.15. Eine Abbildung $f : Y \to \prod_{i \in I} X_i$ ist genau dann stetig, wenn jede Komposition $\pi_j \circ f : Y \to X_j$ für j aus I stetig ist.

Beweis. Eine Richtung ist mit Korollar 2.4 trivial. Nun, angenommen, dass jede Abbildung $\pi_j \circ f : Y \to X_j$ stetig ist, müssen wir zeigen, dass f stetig ist. Mit Lemma 2.3 (c) genügt es, das Urbild eines Basiselementes B der Produkttopologie zu betrachten. Es gibt eine natürliche Zahl n und offene Teilmengen U_{j_k} von X_{j_k} mit $1 \le k \le n$ so, dass $B = \bigcap_{1 \le k \le n} \pi_{j_k}^{-1}(U_{j_k})$. Insbesondere ist

$$f^{-1}(B) = \bigcap_{1 \le k \le n} f^{-1}\left(\pi_{j_k}^{-1}(U_{j_k})\right) = \bigcap_{1 \le k \le n} (\pi_{j_k} \circ f)^{-1}(U_{j_k})$$

offen, wie gewünscht. $\square$

Lemma 2.16. *Seien zwei Familien $(X_i, \mathcal{T}_i)_{i \in I}$ und $(Y_i, \mathcal{T}'_i)_{i \in I}$ topologischer Räume sowie Abbildungen $f_i : X_i \to Y_i$ gegeben. Die Abbildung*

$$\begin{aligned} f : \prod_{i \in I} X_i &\to \prod_{i \in I} Y_i \\ (x_i)_{i \in I} &\mapsto (f_i(x_i))_{i \in I} \end{aligned}$$

ist genau dann stetig, wenn jede Abbildung f_i stetig ist.

Beweis. Wenn f stetig ist, dann ist $\pi_j^Y \circ f : \prod_{i \in I} X_i \to Y_j$ stetig. Beachte, dass $\pi_j^Y \circ f = f_j \circ \pi_j^X$. Sei nun $V \subset Y_j$ offen. Wir wollen zeigen, dass $f_j^{-1}(V)$ offen ist. Die Teilmenge $(f_j \circ \pi_j^X)^{-1}(V) = \pi_j^{-1}\left(f_j^{-1}(V)\right)$ von $\prod_{i \in I} X_i$ ist offen. Weil jede Projektion π_j offen (und surjektiv) ist, ist die Teilmenge $f_j^{-1}(V)$ von X_j offen, wie gewünscht.

Für die Rückrichtung, wenn jedes $f_i : X_i \to Y_i$ stetig ist, so ist $f_i \circ \pi_i^X$ stetig. Weil $f_j \circ \pi_j^X = \pi_j^Y \circ f$, folgt aus der Bemerkung 2.15, dass die Abbildung f stetig ist. $\square$

2.3 Quotiententopologien und -abbildungen

Definition 2.17. Sei Y eine Menge und $(f_i : X_i \to Y)_{i \in I}$ eine Familie von Abbildungen mit topologischen Räumen $(X_i, \mathcal{T}_i)$. Die *Finaltopologie* auf Y bezüglich der Familie $(f_i : X_i \to Y)_{i \in I}$ ist die Topologie, welche von der Familie

$$\{U \subset Y \mid f_i^{-1}(U) \subset X_i \text{ ist offen für jedes } i \text{ aus } I\}$$

erzeugt wird.

Bemerkung 2.18. Die Finaltopologie bezüglich der Familie $(f_i : X_i \to Y)_{i\in I}$ ist die feinste Topologie auf Y mit der Eigenschaft, dass jede Abbildung f_i stetig ist.

Insbesondere gilt für jede Abbildung g von Y nach dem topologischen Raum $(Z, \mathcal{T}_Z)$ folgende Äquivalenz: Die Abbildung g ist genau dann stetig, wenn jede Abbildung $g \circ f_i : X_i \to Z$ stetig ist.

Beweis. Es ist klar, dass jede Abbildung f_i stetig bezüglich der Finaltopologie ist. Sei nun $\mathcal{T}'$ eine Topologie auf Y derart, dass jede Abbildung f_i stetig (bezüglich $\mathcal{T}'$ und $\mathcal{T}_i$) ist. Insbesondere ist $f_i^{-1}(U)$ offen in X_i für jedes U aus $\mathcal{T}'$ und somit liegt U in der erzeugenden Familie für die Finaltopologie, welche daher feiner als $\mathcal{T}'$ ist.

Wenn die Abbildung $g : Y \to X$ stetig ist, so ist dies auch $g \circ f_i$ wegen Korollar 2.4. Nun nehmen wir an, dass g eine Abbildung derart ist, dass $g \circ f_i : X_i \to Z$ stetig ist. Um zu zeigen, dass g stetig ist, sei $V \subset Z$ offen. Weil

$$f_i^{-1}\left(g^{-1}(V)\right) = (g \circ f_i)^{-1}(V)$$

offen für jedes i aus I ist, folgt, dass $g^{-1}(V)$ offen bezüglich der Finaltopologie ist und somit ist g stetig. $\square$

Definition 2.19. Sei E eine Äquivalenzrelation auf dem topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ und bezeichne $[x]_E$ die Äquivalenzklasse des Elementes x aus X im Quotientenraum X/E. Die *Quotiententopologie* auf dem Quotientenraum X/E ist die Finaltopologie bezüglich der Abbildung

$$\begin{array}{rccc} p_E : & X & \to & X/E \\ & x & \mapsto & [x]_E \end{array}$$

Insbesondere ist eine Teilmenge $U \subset X/E$ genau dann offen, wenn

$$p_E^{-1}(U) = \{x \in X \mid [x]_E \in U\}$$

offen in X ist.

Aufgabe. Die Abbildung $p_E : X \to X/E$ ist stetig aber nicht unbedingt offen (im Gegensatz zu den Koordinatenprojektionen $\pi_j : \prod_{i\in I} X_i \to X_j$). Auf der dreielementigen Menge $X = \{a, b, c\}$ bildet $\mathcal{T} = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b, c\}\}$ eine Topologie. Für die Äquivalenzrelation E mit $[a]_E = [b]_E \neq [c]_E$, ist das Bild der offenen Menge $\{a\}$ unter p_E offen in X/E?

Des Weiteren muss ein Quotientenraum eines Hausdorff Raumes nicht unbedingt Hausdorff sein: Betrachte das abgeschlossene Intervall $[0, 1]$ mit der Spurtopologie bezüglich der euklidischen Topologie auf $\mathbb{R}$, sowie die diskrete Topologie auf der zweielementigen Menge $\{-1, 1\}$. Ist das Produkt $X = [0, 1] \times \{-1, 1\}$ mit der Produkttopologie Hausdorff? Sei nun E die Äquivalenzrelation auf X gegeben durch

$$(x, i) \sim_E (x', j) \iff \begin{cases} x = x', \text{ falls } x > 0 \\ i = j, \text{ falls } x = 0. \end{cases}$$

Wie sieht der Quotientenraum bildlich aus? Beschreibe die Umgebungen eines Punktes $[(x, i)]_E$ mit $x > 0$. Wie sehen die Umgebungen der Punkte $[(0, 1)]_E$ und $[(0, -1)]_E$ aus?

Bemerkung 2.20. Sei $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung topologischer Räume. Für die Äquivalenzrelation E auf X mit

$$[x_1]_E = [x_2]_E \iff f(x_1) = f(x_2)$$

ist die (wohldefinierte) Abbildung

$$\begin{array}{rccc} \overline{f}: & X/E & \to & Y \\ & [x]_E & \mapsto & f(x) \end{array}$$

stetig bezüglich der Quotiententopologie auf X/E, denn $\overline{f} \circ p_E = f$ ist stetig (siehe Bemerkung 2.18).

Quotientenräume sind ein Spezialfall von Quotientenabbildungen.

Definition 2.21. Eine surjektive Abbildung $p : X \to Y$ zwischen topologischen Räumen ist eine *Quotientenabbildung*, falls

$$A \subset Y \text{ offen } \iff p^{-1}(A) \subset X \text{ offen}$$

für jede Menge A aus Y, oder äquivalent dazu,

$$A \subset Y \text{ abgeschlossen} \iff p^{-1}(A) \subset X \text{ abgeschlossen.}$$

Korollar 2.22. *Quotientenabbildungen sind immer stetig. Die Komposition zweier Quotientenabbildungen ist wiederum eine Quotientenabbildung.*

Bemerkung 2.23. Jede offene (bzw. abgeschlossene) stetige Surjektion ist eine Quotientenabbildung.

Definition 2.24. Ein *Retrakt* eines topologischen Raumes $(X, \mathcal{T})$ ist eine Teilmenge $A \subset X$ zusammen mit einer Abbildung $r : X \to A$ derart, dass r stetig (bezüglich der Spurtopologie auf A) ist und $r(a) = a$ für alle a aus A.

Bemerkung 2.25. Jeder Retrakt ist eine Quotientenabbildung.

Aufgabe. Eine Teilmenge A ist *saturiert* bezüglich der Quotientenabbildung $p : X \to Y$, wenn für alle y aus Y entweder $p^{-1}(y) \cap A = \emptyset$ oder $p^{-1}(y) \subset A$.

Wenn A abgeschlossen (bzw. offen) und saturiert ist, dann ist $p_{\restriction A} : A \to p(A)$ eine Quotientenabbildung bezüglich den Spurtopologien von X auf A und von Y auf dem Bildbereich $p(A)$.

Die Bemerkung 2.20 ergibt sich als Spezialfall des folgenden Satzes.

Satz 2.26. *Sei $p : X \to Y$ eine Quotientenabbildung und $g : X \to Z$ eine Abbildung zwischen topologischen Räumen derart, dass $g_{\restriction p^{-1}(y)}$ konstant für jedes y aus Y ist. Es existiert eine wohldefinierte Abbildung*

$$\begin{array}{rccl} \overline{g}: & Y & \to & Z \\ & y & \mapsto & g(x) \text{ für ein } x \text{ mit } p(x) = y \end{array}$$

und es gilt $\overline{g} \circ p = g$. Die Abbildung g ist genau dann stetig, wenn $\overline{g}$ es ist. Ebenso ist g genau dann eine Quotientenabbildung, wenn $\overline{g}$ es ist.

Beweis. Die Abbildung $\overline{g}$ ist wohldefiniert, weil p surjektiv und g konstant auf jeder Faser $p^{-1}(y)$ ist. Wegen $\overline{g} \circ p = g$ ist g stetig, wenn $\overline{g}$ stetig ist. Angenommen, dass g stetig ist, wollen wir zeigen, dass $\overline{g}$ stetig ist. Wenn $U \subset Z$ offen ist, dann ist $g^{-1}(U) = p^{-1}\left(\overline{g}^{-1}(U)\right)$ auch offen. Da p eine Quotientenabbildung ist, folgt daraus, dass $\overline{g}^{-1}(U) \subset Y$ offen ist.

Wenn $\overline{g}$ eine Quotientenabbildung ist, dann so ist dies wegen Korollar 2.22 auch g. Wenn g eine Quotientenabbildung ist, dann ist $\overline{g}$ surjektiv, weil $g = \overline{g} \circ p$. Sei also $A \subset Z$ mit $\overline{g}^{-1}(A) \subset Y$ offen. Wir müssen zeigen, dass A offen in Z ist. Weil p stetig ist, ist die Menge

$$p^{-1}(\overline{g}^{-1}(A)) = (\overline{g} \circ p)^{-1}(A) = g^{-1}(A)$$

offen in X und somit ist A offen in Z, weil g eine Quotientenabbildung ist. $\square$

Kapitel 3

Zusammenhang und Wegzusammenhang

3.1 Zusammenhängende Räume

Der Zusammenhang ist ein wichtiger Begriff der Topologie, den wir implizit in vielen Anwendungen der Analysis mit Intervallen (offen oder abgeschlossen) bereits gesehen haben.

Definition 3.1. Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ ist *zusammenhängend*, falls es keine Zerlegung $X = U \cup V$ in disjunkte nicht-leere offene Teilmengen U und V von X gibt.

Eine Teilmenge A von X ist *zusammenhängend*, falls A mit der Spurtopologie ein zusammenhängender Raum ist.

Die euklidische Gerade $\mathbb{R}$ ist zusammenhängend, aber die Teilmenge $A = [0, 1] \cup (2, 3]$ ist es nicht.

Aufgabe. Ist die leere Menge zusammenhängend in einem beliebigen topologischen Raum? Und eine Einermenge?

Ist die Sorgenfrey-Gerade zusammenhängend?

Bemerkung 3.2. Zusammenhang bleibt unter Homöomorphismen erhalten.

Aufgabe. Kann es einen Homöomorphismus zwischen den Teilmengen $[0, 1]$ und $(0, 1)$ der euklidischen Geraden geben?

Folgende Äquivalenzen lassen sich leicht aus der Definition mit Hilfe des Verklebungslemmas 2.14 zeigen.

Lemma 3.3. *Gegeben einen topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

a) Der Raum $(X, \mathcal{T})$ ist zusammenhängend.

b) Die einzigen Teilmengen von X, welche gleichzeitig offen und abgeschlossen sind, sind der Raum selbst und die leere Menge.

c) Jede stetige Abbildung $f : (X, \mathcal{T}) \to (\{0, 1\}, \mathcal{T}_{diskr})$ ist konstant.

Weil die Komposition stetiger Abbildungen wiederum stetig ist, folgt folgendes Korollar sofort.

Korollar 3.4. *Sei $f : X \to Y$ eine stetige surjektive Abbildung zwischen topologischen Räumen. Wenn X zusammenhängend ist, dann auch Y.*

Korollar 3.5. *In einem topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ seien A und B Teilmengen mit A zusammenhängend und $A \subset B \subset \overline{A}$. Dann ist die Menge B auch zusammenhängend.*

Insbesondere ist der Abschluss einer zusammenhängenden Menge wiederum zusammenhängend.

Beweis. Wenn $f : B \to \{0, 1\}$ stetig ist, so ist $f_{\restriction A} : A \to \{0, 1\}$ auch stetig. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $f(A) = 0$. Das Urbild der abgeschlossenen Menge $\{0\}$ enthält A und somit auch $\overline{A} \supset B$. □

Bemerkung 3.6. Eine Teilmenge A der euklidischen Geraden $\mathbb{R}$ ist genau dann zusammenhängend, wenn A ein Intervall (offen oder abgeschlossen, mit möglicherweise $-\infty$ oder ∞ als Randpunkte) ist.

Beweis. Sei A zusammenhängend. Um zu zeigen, dass A ein Intervall ist, genügt es zu zeigen, dass für je zwei Punkte x und y aus A alle z mit $x < z < y$ in A liegen. Sonst wäre

$$A \subset (-\infty, z) \cup (z, \infty),$$

aber $A \not\subset (-\infty, z)$, weil $y \notin (-\infty, z)$ und $A \not\subset (z, \infty)$, weil $x \notin (z, \infty)$ und somit wäre A nicht zusammenhängend.

Für die Rückrichtung zeigen wir zuerst, dass jedes abgeschlossene Intervall $[a, b]$ zusammenhängend ist: Sei $f : [a, b] \to \{0, 1\}$ eine stetige Surjektion. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit ist $f(a) = 0$. Beachte, dass $S = \{x \in [a, b] \mid f(x) = 1\} \neq \emptyset$ und setze $s = \inf S$. Das Element s ist Limes einer Folge (x_n) aus S mit $f(x_n) = 1$. Weil f stetig ist und $\{0, 1\}$ die diskrete Topologie hat, folgt $f(s) = 1$, also $s > a$. Die Teilmenge $U = f^{-1}(\{1\})$ ist eine offene Umgebung von s, somit enthält U ein offenes Intervall der Form $(s - \epsilon, s + \epsilon)$. Dies widerspricht, dass s das Infimum von S ist, wie gewünscht.

Sei nun A ein Intervall. Wenn $f : A \to \{0, 1\}$ eine stetige Surjektion ist, finden wir zwei Punkte a und b in A mit $f(a) \neq f(b)$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit ist $a < b$, also $[a, b] \subset A$, weil ein Intervall ist. Insbesondere ist $f_{\restriction [a,b]} : [a, b] \to \{0, 1\}$ eine stetige Surjektion, was wegen obigem nicht möglich ist. □

Beispiel 3.7. Definiere die *Einheitssphäre (in Dimension n)* als die Menge

$$\mathbb{S}^n = \{(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{0 \le i \le n} x_i^2 = 1\}.$$

Der *Einheitskreis* ist die Menge $\mathbb{S}^1$. Er ist zusammenhängend, da die Parametrisierung

$$\begin{array}{rccc} \beta : & [0, 1] & \to & \mathbb{S}^1 \\ & t & \mapsto & (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t) \end{array}$$

stetig und surjektiv ist (siehe Korollar 3.4). Allgemein ist jede *Kurve* γ im topologischen Raum X zusammenhängend, wobei die Kurve durch die stetige Abbildung $\gamma : [a, b] \to X$ gegeben ist.

Wir gewinnen in diesem Kontext den uns wohlbekannten Satz aus der Analysis.

Satz 3.8. *(Zwischenwertsatz) Sei $(X, \mathcal{T})$ ein zusammenhängender topologischer Raum und Y eine linear angeordnete Menge mit der Ordnungstopologie (siehe Beispiel 1.11). Für jede stetige Abbildung $f : X \to Y$ liegt jeder Punkt y aus Y mit $f(a) < y < f(b)$ für a und b aus X im Bildbereich von f.*

Korollar 3.9. *(Fixpunktsatz) Zu jeder stetigen Abbildung $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ gibt es einen Punkt $z = (x_0, x_1)$ in $\mathbb{S}^1$ mit $f(z) = f(-z)$, wobei $-z = (-x_0, -x_1)$ ist der zu z Antipodenpunkt.*

Beweis. Wenn $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ stetig ist, so ist $g(x) = f(x) - f(-x)$ wegen Korollar 2.4 stetig.

Wenn f keinen Fixpunkt besitzt, liegt 0 nicht im Bildbereich von g. Aus dem Beispiel 3.7 ist die Menge $\mathbb{S}^1$ zusammenhängend. Da $g(x) = -g(-x)$, liefert der Zwischenwertsatz 3.8 den gewünschten Widerspruch. □

Das folgende Kriterium für Zusammenhang von Vereinigungen wird sehr hilfreich sein.

Proposition 3.10. *In einem topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ sei $(A_i)_{i \in I}$ eine Familie zusammenhängender Teilmengen derart, dass es einen Index i_0 mit $A_{i_0} \cap A_i \neq \emptyset$ für alle i aus I gibt. Die Vereinigung $\bigcup_I A_i$ ist zusammenhängend.*

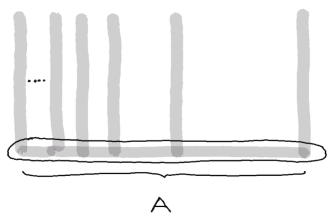
Beweis. Sei $f : \bigcup_I A_i \to \{0, 1\}$ eine stetige Abbildung. Jede Einschränkung $f_{\restriction A_i}$ ist auch stetig, also konstant wegen Lemma 3.3 (c). Ohne Beschränkung der Allgemeinheit ist $f(A_{i_0}) = 0$. Gegeben x aus $\bigcup_I A_i$ beliebig, gibt es ein i aus I mit x in A_i. Wegen der Annahme existiert ein y in $A_{i_0} \cap A_i$. Da $f(y) = 0$, folgt $f(A_i) = 0$ und somit $f(x) = 0$, wie gewünscht. □

Aufgabe. In $\mathbb{R}^2$ mit der euklidischen Topologie sei für $0 \neq n$ aus $\mathbb{N}$ die Menge $A_n = \partial B^{\mathbb{R}^2}_{\frac{1}{n}}((\frac{1}{n}, 0))$ der Rand der offenen Kugel vom Radius $\frac{1}{n}$ und Mittelpunkt $(\frac{1}{n}, 0)$.

Wie sieht A_n bildlich aus? Ist $\bigcup_{\mathbb{N}} A_n$ zusammenhängend?

Beispiel 3.11. Der *(topologische) Kamm* ist die folgende Teilmenge von $\mathbb{R}^2$

$$([0,1] \times \{0\}) \cup (\{0\} \times [0,1]) \cup \bigcup_{0 \neq n \in \mathbb{N}} (\{\frac{1}{n}\} \times [0,1])$$



Der topologische Kamm

Der Kamm ist zusammenhängend bezüglich der euklidischen Topologie auf $\mathbb{R}^2$, weil die Teilmenge $A = [0,1] \times \{0\}$ jedes Mitglied der Vereinigung nicht-trivial schneidet.

Satz 3.12. *Sei $(X_i, \mathcal{T}_i)_{i \in I}$ eine Familie topologischer Räume. Das Produkt $\prod_{i \in I} X_i$ ist genau dann zusammenhängend, wenn jeder Raum X_i zusammenhängend ist.*

Beweis. Weil jede Projektion $\pi_j : \prod_{i \in I} X_i \to X_j$ eine stetige Surjektion ist, folgt eine Richtung aus dem Korollar 3.4.

Wir nehmen nun an, dass alle X_i zusammenhängend sind. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit ist kein Raum leer.

Behauptung. *Jedes Produkt endlich vieler X_i's ist zusammenhängend.*

Beweis der Behauptung. Seien $X_{i_1}, \dots, X_{i_n}$ endlich viele zusammenhängende topologische Räume. Weil

$$X_{i_1} \times \cdots \times X_{i_n} = X_{i_1} \times (X_{i_2} \times \cdots \times X_{i_n}),$$

genügt es induktiv den Fall $n = 2$ zu betrachten. Seien also X und Y zwei nicht-leere zusammenhängende topologische Räume. Wähle (x_0, y_0) aus $X \times Y$ fest und setze $A = X \times \{y_0\}$. Die Menge A ist homöomorph zu X, also ist A zusammenhängend. Des Weiteren ist $A_x = \{x\} \times Y$ auch zusammenhängend, denn $A_x \approx Y$. Beachte, dass der Durchschnitt $A_x \cap A \neq \emptyset$ und somit

$$X \times Y = A \cup \bigcup_{x \in X} A_x$$

wegen Proposition 3.10 zusammenhängend ist. $\square_{\text{Beh.}}$

Wenn die Indexmenge endlich ist, sind wir fertig. Ansonsten wähle $(a_i)_{i \in I}$ aus $\prod_{i \in I} X_i$ fest. Gegeben eine endliche Teilmenge $\emptyset \neq F \subset I$ setze

$$A_F = \{(x_i)_{i \in I} \mid x_i = a_i \text{ für } i \notin F\}.$$

Wenn $F = \{i_1, \dots, i_n\}$, dann ist die Menge A_F homöomorph zu $X_{i_1} \times \cdots \times X_{i_n}$ und somit ist A_F zusammenhängend wegen der obigen Behauptung. Da $A_F \cap A_{F'}$ klarerweise nicht leer ist, folgt aus der Proposition 3.10, dass

$$A = \bigcup_{\substack{F \subset I \\ F \text{ endlich}}} A_F$$

zusammenhängend ist. Wegen des Korollars 3.5 müssen wir nur noch zeigen, dass $\prod_{i \in I} X_i = \overline{A}$.

Sei also $x = (x_i)_{i \in I}$ aus $\prod_{i \in I} X_i$ beliebig und U eine Umgebung von x. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit ist U ein Element der Basis der Produkttopologie, also $U = \bigcap_{j \in F \subset I} \pi_j^{-1}(U_j)$ mit $U_j \subset X_j$ offen und $F \subset I$ endlich. Insbesondere ist $A_F \cap U \neq \emptyset$, wie gewünscht. $\square$

3.2 Lokal- und Wegzusammenhang

Bemerkung 3.13. Sei x ein Punkt des topologischen Raumes $(X, \mathcal{T})$. Wegen Proposition 3.10 ist die Menge

$$\bigcup_{\substack{A \text{ zusammenhängend} \\ x \in A}} A$$

zusammenhängend (und nicht-trivial, denn die Einermenge $\{x\}$ ist zusammenhängend). Wir bezeichnen die obige Menge als die *Zusammenhangskomponente* CC_x von x.

Die Menge CC_x ist die größte zusammenhängende Teilmenge von X, welche x enthält. Es folgt, dass $\mathrm{CC}_x = \mathrm{CC}_y$, wenn y in CC_x liegt. Ferner ist CC_x wegen Korollar 3.5 abgeschlossen.

Aufgabe. Betrachte $\mathbb{Q}$ mit der Spurtopologie der euklidischen Geraden $\mathbb{R}$. Wie groß ist die Zusammenhangskomponente eines Punktes? Beschreibe die Zusammenhangskomponenten eines Punktes in der Sorgenfrey Geraden.

Bemerkung 3.14. Die Relation $xEy \iff \mathrm{CC}_x = \mathrm{CC}_y$ ist eine Äquivalenzrelation, deren Klassen genau die Zusammenhangskomponenten sind. Insbesondere ist

$$X = \dot{\bigcup_{E\text{-Klasse } [x]_E}} \mathrm{CC}_x$$

die disjunkte Vereiningung der Zusammenhangskomponenten.

Wenn $\emptyset \neq A$ zusammenhängend ist, liegt A in einer einzigen Zusammenhangskomponente.

Definition 3.15. Der topologische Raum $(X, \mathcal{T})$ ist:

- *total unzusammenhängend*, falls $\mathrm{CC}_x = \{x\}$ für jeden Punkt x aus X.
- *lokal zusammenhängend*, falls jedes x aus X eine *Basis zusammenhängender Umgebungen* besitzt, das heißt, eine Kollektion $(B_i^x)_{i\in I}$ zusammenhängender offener Umgebungen derart, dass es für jede Umgebung U^x ein i aus I mit $B_i^x \subset U^x$ gibt.

Aufgabe. Ist die Sorgenfrey Gerade lokal zusammenhängend? Und die Teilmenge $[0,1] \cup (2,3]$ mit der Spurtopologie bezüglich der euklidischen Geraden?

Aus der Proposition 3.10 folgt, dass die Mengen CC_x in einem lokal zusammenhängenden Raum offen sind.

Korollar 3.16. *Jede Zusammenhangskomponente eines lokal zusammenhängenden Raumes ist offen.*

Aufgabe. Im topologischen Kamm aus dem Beispiel 3.11, sei $A_0 = \{0\} \times [0,1]$ und $A_n = \{\frac{1}{n}\} \times [0,1]$ für $n \neq 0$ aus $\mathbb{N}$.

Ist A_n abgeschlossen? Und offen? Beschreibe das Innere von A_0. Ist der Kamm lokal zusammenhängend?

Definition 3.17. Eine Teilmenge A eines topologischen Raumes $(X, \mathcal{T})$ ist *wegzusammenhängend*, falls je zwei Punkte a und b aus A durch eine *Kurve* γ (oder einen *Pfad*) verbunden werden können, das heißt, es gibt eine stetige Abbildung $\gamma : [0,1] \to X$ (bezüglich der Spurtopologie der euklidischen Geraden auf $[0,1]$) derart, dass $\mathrm{Im}(\gamma) \subset A$ mit *Anfangspunkt* $\gamma(0) = a$ und *Endpunkt* $\gamma(1) = b$.

Der Raum $(X, \mathcal{T})$ ist *wegzusammenhängend*, falls die Teilmenge X wegzusammenhängend ist.

Weil die Komposition stetiger Abbildungen wiederum stetig ist, folgt, dass dieser Begriff unter Homöomorphismen erhalten bleibt.

Bemerkung 3.18. Wegzusammenhang ist invariant unter Homöomorphismen.

Beispiel 3.19. Eine Teilmenge A von $\mathbb{R}^n$ ist *konvex*, falls das gesamte Segment zwischen zwei Punkten $\bar{a}$ und $\bar{b}$ aus A

$$\gamma(t) = (1-t) \cdot \bar{a} + t\bar{b} = \bar{a} + t(\bar{b} - \bar{a}), \text{ mit } t \text{ in } [0,1]$$

in A liegt.

Jede konvexe Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ ist wegzusammenhängend.

Weil das Bild eines Intervalles unter einer stetigen Abbildung zusammenhängend ist, folgt folgende Bemerkung.

Bemerkung 3.20. Jede wegzusammenhängende Teilmenge ist zusammenhängend.

Aufgabe. Sind $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^2$ homöomorph?

Das nächste Beispiel zeigt, dass der Begriff des Wegzusammenhanges nicht unter Abschlüssen erhalten bleibt, im Kontrast zu Korollar 3.5.

Beispiel 3.21. Der topologische Sinus ist die Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$\Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x = y = 0 \text{ oder } 0 < x \leq 1 \,\&\, y = \sin(\frac{1}{x})\Big\}.$$

Es ist im Abschluss (in der euklidischen Topologie) der Kurve $y = \sin(\frac{1}{x})$ mit $0 < x < 1$ enthalten. Somit ist der topologischer Sinus wegen Korollar 3.5 und Beispiel 3.7. zusammenhängend.

Dennoch ist er nicht wegzusammenhängend: Gegeben eine stetige Abbildung $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ mit im topologischen Sinus enthaltenem Bildbereich sowie Anfangspunkt $(0, 0)$ ist $\gamma(t) = (0, 0)$ konstant für alle t aus $[0, 1]$. Schreibe $\gamma(t) = (x(t), y(t))$. Wir müssen nur zeigen, dass $x(t)$ nur den Wert 0 annimmt. Sonst können wir nach einer geeigneten Reparametrisierung annhemen, dass

$$t_0 = \sup\{t \in [0, 1] \,|\, x_{\restriction [0,t]} = 0\} = 0.$$

Weil die stetige Abbildung γ die Gleichung $\gamma(0) = (0, 0)$ erfüllt, gibt es ein $\delta > 0$ so, dass $|y(s)| < 1$ für $0 < s < \delta$. Insbesondere ist $x_{\restriction (0,\delta]} \neq 0$, also gibt es $0 < s_0 < \delta$ mit $\eta = x(s_0) > 0$.

Beachte, dass $y = \sin(\frac{1}{x})_{\restriction (0,\eta]}$ das Intervall $(0, \eta]$ surjektiv auf $[-1, 1]$ abbildet. Aus dem Zwischenwertsatz 3.8 folgt aber $[0, \eta] \subset \operatorname{Im}(x_{\restriction [0,s_0]})$ und somit erreicht γ nie die Werte 1 oder -1.

Bemerkung 3.22. In einem topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ definiere folgende Relation:

$$x \sim y \Longleftrightarrow \begin{cases} \text{es gibt eine stetige Kurve (oder Pfad) } \gamma : [0, 1] \to X \\ \text{mit Anfang } \gamma(0) = x \text{ und Ende } \gamma(1) = y. \end{cases}$$

Diese Relation ist klarerweise reflexiv und symmetrisch. Für die Transitivität definieren wir das *Aneinanderhängen* $\star$ zweier Pfade γ_1 und γ_2 mit $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$ als die Abbildung

$$\begin{array}{rccc} \gamma_1 \star \gamma_2 : & [0, 1] & \to & X \\ & t & \mapsto & \begin{cases} \gamma_1(2t), & \text{für } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \gamma_2(2t - 1), & \text{für } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} \end{array}$$

Diese Abbildung $\gamma_1 \star \gamma_2$ ist stetig wegen dem Verklebungslemma 2.14.

Die *Wegzusammenhangskomponente* PCC_x vom Punkt x ist die Äquivalenzklasse vom Element x bezüglich der obigen Äquivalenzrelation $\sim$. Insbesodere ist PCC_x die größte wegzusammenhängende Teilmenge von X, welche x enthält und

$$X = \dot{\bigcup_{\sim\text{-Klasse } [x]_\sim}} \mathrm{PCC}_x$$

die disjunkte Vereiningung der Wegzusammenhangskomponenten.

Beachte, dass $\mathrm{PCC}_x \subset \mathrm{CC}_x$ wegen Bemerkung 3.20.

Definition 3.23. Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ ist *lokal wegzusammenhängend*, falls jeder Punkt eine Basis wegzusammenhängender offener Umgebungen besitzt.

Korollar 3.24. *Jeder lokal wegzusammenhängende topologische Raum ist lokal zusammenhängend. Ferner ist jede Wegzusammenhangskomponente offen.*

Wenn der topologische Raum zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend ist, dann ist er wegzusammenhängend.

Beweis. Die ersten zwei Behauptungen folgen klarerweise aus den obigen Bemerkungen.

Angenommen, dass der Raum X zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend ist. Jede Wegzusammenhangskomponente ist offen. Weil X die disjunkte Vereinigung der Wegzusammenhangskomponenten ist, folgt, dass jede Wegzusammenhangskomponente abgeschlossen ist. Da X zusammenhängend ist, folgt aus Lemma 3.3 (b), dass X nur aus einer einzigen Wegzusammenhangskomponente besteht und somit ist X wegzusammenhängend. $\square$

Aufgabe. Aus dem Korollar 3.24 folgt, dass der topologische Sinus nicht lokal wegzusammenhängend ist. Beschreibe die Wegzusammenhangskomponenten. Wie viele gibt es?

Kapitel 4

Kompaktheit

4.1 Abzählbarkeitseigenschaften und Konvergenz

In diesem Abschnitt werden wir das Innere, den Abschluss und den Rand einer Teilmenge eines topologischen Raumes mit Hilfe von Folgen mit Indexmenge $\mathbb{N}$ unter gewissen Eigenschaften betrachten können.

In der Definition 3.15 wurde der Begriff einer Basis von Umgebungen eines Punktes definiert.

Definition 4.1. Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ erfüllt:

- die *Abzählbarkeitseigenschaft erster Klasse (oder ist Abz$_1$)*, falls jeder Punkt eine abzählbare Basis von Umgebungen besitzt.
- die *Abzählbarkeitseigenschaft zweiter Klasse (oder ist Abz$_2$)*, falls die Topologie $\mathcal{T}$ eine abzählbare Basis besitzt.

Gegeben eine Basis $\mathcal{B}$ der Topologie $\mathcal{T}$, bildet $\{B \in \mathcal{B} \,|\, x \in B\}$ eine Basis von Umgebungen des Punktes x. Insbesondere ist jeder Abz$_2$-Raum Abz$_1$.

Aufgabe. Ist die euklidische Gerade Abz$_1$? Und Abz$_2$? Und die Sorgenfrey-Gerade? Ist die koendliche Topologie (siehe Beispiel 1.7) Abz$_1$? Ist sie Abz$_2$?

Bemerkung 4.2. Jeder metrischer Raum (X, d) ist Abz$_1$ (bezüglich der metrischen Topologie), denn die $B^X_{\frac{1}{n}}(x)$ bilden klarerweise eine abzählbare Basis der Umgebungen des Punktes x.

Bemerkung 4.3. Beide Abzählbarkeitseigenschaften bleiben unter Homöomorphismen und endliche (sogar abzählbare) kartesische Produkte erhalten.

Aufgabe. Kann ein Abz$_2$-Raum eine diskrete überzabzählbare Menge haben?

Mit Hilfe des (abzählbaren) Auswahlaxioms lässt sich Folgendes leicht beweisen:

Proposition 4.4. *Sei A eine Teilmenge des topologischen Raumes $(X, \mathcal{T})$ und x ein Punkt aus X. Folgende Äquivalenzen gelten, wenn $(X, \mathcal{T})$ Abz$_1$ ist:*

a) $x \in \overset{\circ}{A} \iff$ Für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit Limes x gibt es eine natürlich Zahl n_0 so, dass x_n in A für $n \geq n_0$ liegt.

b) $x \in \overline{A} \Longleftrightarrow$ *Es gibt eine Folge* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *von Elementen aus* A *mit Limes* x*.*

c) $x \in \partial A \Longleftrightarrow$ *Es gibt Folgen* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *von Elementen aus* A *und* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *von Elementen aus* $X \setminus A$ *beide mit Limes* x*.*

d) $x \in \lim A \Longleftrightarrow$ *Es gibt eine Folge* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *von Elementen aus* A *mit Limes* x *so, dass* $x_n \neq x$ *für jedes* n *aus* $\mathbb{N}$*.*

Ferner, wenn X *Hausdorff ist, können wir annehmen, dass die Folge unendlich ist, das heißt* $x_n \neq x_m$ *für* $n \neq m$ *aus* $\mathbb{N}$*.*

Definition 4.5. Ein topologischer Raum ist *separabel*, falls er eine dichte abzählbare Teilmenge besitzt.

Die euklidische Topologie auf $\mathbb{R}^n$ ist separabel, weil $\mathbb{Q}^n$ dicht ist.

Aus der obigen Proposition folgt, dass in einem Abz_1-Raum mit einer abzählbaren dichten Menge D jedes Element Limes einer abzählbaren Folge von Elementen aus D ist. Insbesondere hat der Raum Mächtigkeit höchstens Kontinuum, wenn der Raum Hausdorff ist.

Bemerkung 4.6. Jeder Abz_2-Raum ist separabel.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass die Topologie eine abzählbare Basis $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit $B_n \neq \emptyset$ besitzt. Wähle für jedes n aus $\mathbb{N}$ ein Element d_n in B_n.

Die abzählbare Menge $D = \{d_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist dicht: In der Tat, gegeben eine offene Menge $U \neq \emptyset$ gibt es ein Element der Basis B_n mit $B_n \subset U$ und somit $D \cap U \neq \emptyset$. □

Aufgabe. Sei X der metrische Raum aller stetigen Abbildungen von $[0, 1]$ nach $\mathbb{R}$ mit der Metrik

$$\mathrm{d}_\infty(f, g) = \sup_{0\leq x\leq 1} |f(x) - g(x)|.$$

Mit Hilfe der Polynome mit Koeffizienten aus $\mathbb{Q}$ untersuche, ob X separabel ist.

4.2 Netze, Filter und Konvergenz

Aus der Proposition 4.4 folgt, dass wir Konvergenz für geeignete topologische Räume mit Hilfe abzählbarer Folgen bezeugen können. Ein topologischer Raum ist im Allgemein nicht genug separabel, sodass wir dann den Begriff einer (abzählbaren) Folge verallgemeinern müssen.

Definition 4.7. Eine partiell angeordnete Menge $(I, <)$ (siehe Definition A.1 im Appendix) ist *gerichtet*, falls es für alle α und β aus I ein γ aus I mit $\gamma \geq \alpha$ und $\gamma \geq \beta$ gibt.

Ein *Netz* in einem topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ ist eine Abbildung $f : I \to X$, wobei I eine gerichtete partielle Ordnung ist. Analog zum Fall abzählbaren Folgen schreiben wir f_α für das Element $f(\alpha)$ aus X.

Aufgabe. Gegeben eine Teilmenge A eines topologischen Raumes $(X, \mathcal{T})$, so bildet die Kollektion aller offenen Teilmengen $A \subset U \subset X$ eine gerichtete partielle Ordnung bezüglich der umgekehrten Inklusion:

$$U \leq V \iff V \subset U.$$

Insbesondere bezeichnen wir mit $\mathcal{N}_x$ die gerichtete partielle Ordnung bezüglich umgekehrter Inklusion aller offenen Umgebungen von x.

Im folgenden sei $(X, \mathcal{T})$ eines nicht-leeren topologischen Raumes $(X, \mathcal{T})$.

Definition 4.8. Ein *Filter* $\mathcal{F}$ ist eine nicht-leere Kollektion von Teilmengen des topologischen Raumes $(X, \mathcal{T})$ mit folgenden Eigenschaften:

1) $\emptyset \notin \mathcal{F}$.

2) Falls Y und Z in $\mathcal{F}$ liegen, dann liegt auch $Y \cap Z$ in $\mathcal{F}$.

3) Falls Y in $\mathcal{F}$ liegt und $Y \subset Z \subset X$, dann liegt auch Z in $\mathcal{F}$.

Beachte, dass wegen (3) der Raum X in $\mathcal{F}$ liegen muss, weil $\mathcal{F}$ nicht-leer ist.

Eine *Filterbasis* $\mathcal{B}$ ist eine nicht-leere Kollektion von Teilmengen von X derart, dass $\emptyset$ nicht in $\mathcal{B}$ enthalten und $\mathcal{B}$ unter endlichen Durschnitten abgeschlossen ist.

Aufgabe. Die Menge $\mathcal{N}_x$ aller offenen Umgebungen des Punktes x bildet einer Filterbasis. Allgemein, gegeben ein Netz $f : I \to X$ so bildet die Familie $\{T_\alpha\}_{\alpha \in I}$ eine Filterbasis, wobei

$$T_\alpha = \{f_\beta\}_{\alpha \leq \beta \in I}.$$

Bemerkung 4.9. Jede Filterbasis $\mathcal{B}$ bestimmt einen Filter. Setze

$$\mathcal{F}_\mathcal{B} = \{Y \subset X \mid \exists B \in \mathcal{B} \text{ mit } B \subset Y\}.$$

Insbesondere ist für $\emptyset \neq Y \subset X$ die Menge $\{Y\}$ eine Filterbasis. Der entsprechende Filter F_Y ist der von Z *erzeugte* Filter. Ein Filter, der von einer Menge erzeugt wird ist ein *Hauptfilter*. Sonst ist der Filter *generisch*.

Definition 4.10. Ein *Ultrafilter* $\mathcal{U}$ ist ein maximaler Filter bezüglich Inklusion.

Da jeder Filter unter endlichen Durschnitten abgeschlossen ist, kann es nicht passieren, dass für eine Teilmenge $Y \subset X$ sowohl Y als auch das Komplement $X \setminus Y$ in $\mathcal{U}$ liegen.

Bemerkung 4.11. Ein Fiter $\mathcal{U}$ auf X ist genau dann ein Ultrafilter, wenn er zusätzlich folgende Eigeschaft besitzt:

4) Für $Y \subset X$ liegt entweder Y oder $X \setminus Y$ in $\mathcal{U}$.

Beweis. Sei $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter und $Y \subset X$ eine Menge, welche nicht in $\mathcal{U}$ liegt. Setze

$$\mathcal{B} = \{Y \cap Z\}_{Z \in \mathcal{U}}.$$

Beachte, dass Y in $\mathcal{B}$ liegt, denn X liegt in $\mathcal{U}$. Ferner, weil $\mathcal{U}$ unter endlichen Durschnitten abgeschlossen ist, trifft dies auch auf $\mathcal{B}$ zu. Wenn $\mathcal{B}$ eine Filterbasis wäre, würde der Filter $\mathcal{F}_\mathcal{B}$ den Filter $\mathcal{U}$ echt enthalten, was der Maximalität von $\mathcal{U}$ widersprechen würde. Es folgt, dass $\emptyset$ in $\mathcal{B}$ liegt. Das heißt, es gibt eine Menge Z aus $\mathcal{U}$ mit $Y \cap Z = \emptyset$, also $Z \subset X \setminus Y$. Aus der Eigenschaft (3) folgt, dass $X \setminus Y$ in $\mathcal{U}$ liegt, wie gewünscht.

Wir nehmen nun an, dass $\mathcal{U}$ ein Filter mit der Zusatzeigenschaft (4) ist. Wir müssen zeigen, dass $\mathcal{U}$ maximal ist. Falls $\mathcal{F}$ ein Filter wäre, der $\mathcal{U}$ echt enthält, gäbe es eine Teilmenge Y in $\mathcal{F} \setminus \mathcal{U}$. Dann liegt $X \setminus Y$ in $\mathcal{U}$ und somit in $\mathcal{F}$. Weil $\emptyset = Y \cap X \setminus Y$, ist $\mathcal{F}$ kein Filter. $\square$

Bemerkung 4.12. Falls $Y \cup Z$ in einem Ultrafilter $\mathcal{U}$ liegt, dann liegt Y oder Z in $\mathcal{U}$.

Wir können $\mathcal{U}$ als ein endlich additives Maß auf X betrachten, welches nur die Werte 0 und 1 annimmt. Die Elemente aus $\mathcal{U}$ sind genau die Teilmengen von X mit Maß 1.

Bemerkung 4.13. Jeder Hauptultrafilter wird von einer Einermenge erzeugt: Angenommen, dass der Ultrafilter $\mathcal{U}$ von der Menge Y erzeugt ist, folgt, dass jede Teilmenge Z aus X genau dann in $\mathcal{U}$ liegt, wenn $Y \subset X$. Weil $Y \neq \emptyset$, gibt es ein Element x aus Y. Beachte, dass $X \setminus \{x\}$ nicht in $\mathcal{U}$ liegen kann, denn $Y \not\subset X \setminus \{x\}$. Also liegt $\{x\}$ in $\mathcal{U}$ und somit ist $Z = \{x\}$, wie gewünscht.

Falls X unendlich ist, ist

$$\mathcal{F}_{\text{Fréchet}} = \{Y \subset X \,|\, X \setminus Y \text{ endlich}\}$$

ein Filter, namens der *Fréchetfilter*. Jeder Ultrafilter, der $\mathcal{F}_{\text{Fréchet}}$ enthält muss generisch sein.

Aus dem Zorn'schen Lemma (siehe Appendix A) folgt die Existenz von Ultrafiltern.

Lemma 4.14. *Die Vereinigung einer steigenden Kette von Filtern ist wiederum ein Filter. Insbesondere gibt es Ultrafilter auf jedem nicht-leeren topologischen Raum.*

Wenn der Raum X unendlich ist, gibt es generische Ultrafilter auf X.

Definition 4.15. Gegeben einen Punkt x aus $(X, \mathcal{T})$ und einen Filter $\mathcal{F}$ auf X, so *konvergiert* $\mathcal{F}$ nach x (oder x ist *Limespunkt* von $\mathcal{F}$), falls $\mathcal{N}_x \subset \mathcal{F}$. Wir bezeichnen es mit $\mathcal{F} \to x$.

Aufgabe. Ein (nicht-leerer) topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ ist genau dann Hausdorff, wenn je zwei Limespunkte einer konvergenten Filters gleich sind, oder äquivalent dazu, wenn je zwei Limespunkte einer konvergenten Ultrafilters gleich sind.

Wenn $\mathcal{U}$ nach x konvergiert, so liegt x in $\overline{Y}$ für jedes Y aus $\mathcal{U}$. Des Weiteren, wenn x in $\overline{A}$ liegt, so gibt es einen Ultrafilter $\mathcal{U} \to x$, welcher A enthält.

Definition 4.16. Seien X und Y topologische Räume sowie $f : X \to Y$ eine Abbildung. Gegeben einen Filter $\mathcal{F}$ auf X, so ist $f(\mathcal{F})$ der Filter, welcher von der Filterbasis $\{f(Z)\}_{Z \in \mathcal{F}}$ erzeugt wird.

Lemma 4.17. *Gegeben eine Abbildung $f : X \to Y$ topologischer Räume, so ist f genau dann stetig, wenn $f(\mathcal{F}) \to f(x)$, falls $\mathcal{F} \to x$.*

Beweis. Wir nehmen zuerst an, dass f stetig ist und dass der Filter$\mathcal{F}$ nach x konvergiert. Wir wollen zeigen, dass $f(\mathcal{F}) \to f(x)$, so wähle V eine offene Umgebung von $f(x)$. Da f stetig ist, gibt es eine offene Umgebung U von x mit $f(U) \subset V$. Nun liegt U in $\mathcal{F}$, weil $\mathcal{F} \to x$ und somit liegt V im Filter $f(\mathcal{F})$, wie gewünscht.

Für die Rückrichtung, sei V eine beliebige offene Umgebung von $f(x)$. Wir müssen zeigen, dass $f^{-1}(V)$ offen ist. Sei nun $\mathcal{F}$ der von der Filterbasis $\mathcal{N}_x$ erzeugte Filter. Aus unserer Annahme folgt, dass $f(\mathcal{F}) \to f(x)$, so die Umgebung V von $f(x)$ liegt in $f(\mathcal{F})$. Das bedeutet, dass es ein Z aus $\mathcal{F}$ mit $f(Z) \subset V$ gibt, oder äquivalent dazu, mit $Z \subset f^{-1}(V)$. Nun liegt Z in $\mathcal{F}$ so es gibt eine offene Umgebung U von x mit U ganz in Z enthalten (denn $\mathcal{F}$ wird von $\mathcal{N}_x$ erzeugt). Also $U \subset f^{-1}(V)$ und somit ist f stetig. □

4.3 Kompaktheit

Kompaktheit für einen topologischen Raum verallgemeinert den Begriff der endlichen Mengen. Der berühmte Satz von Heine-Borel 4.28 charakterisiert die kompakten Teilmengen des $\mathbb{R}^n$.

Definition 4.18. Seien $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und A eine Menge.

- Eine *offene Überdeckung* von A ist eine Familie $(U_i)_{i\in I}$ offener Mengen derart, dass $A \subset \bigcup_I U_i$. Wenn $A = X$, dann reden wir von offenen Überdeckungen.
- Der topologische Raum $(X, \mathcal{T})$ ist *kompakt*, wenn jede offene Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ eine endliche Teilüberdeckung besitzt, das heißt, es gibt eine natürlich Zahl n und Elemente $U_{i_1}, \ldots, U_{i_n}$ der Familie $(U_i)_{i\in I}$ mit $X = \bigcup_{1\leq j\leq n} U_{i_j}$.
- Die Teilmenge A von X ist *kompakt*, wenn A mit der Spurtopologie kompakt ist, oder äquivalent dazu, wenn es für jede offene Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ von A eine endliche Teilüberdeckung $A \subset \bigcup_{1\leq j\leq n} U_{i_j}$ gibt.

Aufgabe. Die euklidische Gerade ist nicht kompakt. Des Weiteren ist kein offenes nicht-leeres Intervall kompakt.

Ist eine endliche Teilmenge eines beliebigen topologischen Raumes kompakt?

Ist $\mathbb{R}$ mit der koendlichen Topologie kompakt?

Bemerkung 4.19. Sei $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen. Wenn $K \subset X$ kompakt ist, dann ist das Bild $f(K)$ kompakt in Y.

Insbesondere bleibt der Begriff der Kompaktheit unter Homöomorphismen erhalten. Ferner ist jeder Quotientenraum eines kompakten Raumes wiederum kompakt (mit der Quotiententopologie).

Aus den De Morganschen Gesetzen haben wir folgende äquivalente Definition der Kompaktheit.

Bemerkung 4.20. Um zu zeigen, dass eine Teilmenge kompakt ist, genügt es offene Überdeckungen durch Elemente der Basis der Topologie zu betrachten, weil sich jede offene Menge als eine Vereinigung der Elemente der Basis schreiben lässt.

Ein topologischer Raum ist genau dann kompakt, wenn er die *endliche Durschnittseigenschaft (FIP)* besitzt: jede Familie $(C_i)_{i\in I}$ abgeschlossener Mengen mit leerem Durchschnitt besitzt einen endlichen leeren Teildurchschnitt, das heißt, wenn

$$\bigcap_I C_i = \emptyset,$$

dann gibt es $C_{i_1}, \ldots, C_{i_n}$ mit

$$\bigcap_{1\leq j\leq n} C_{i_j} = \emptyset.$$

Proposition 4.21. *Folgende Aussagen sind für ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ äquivalent:*

a) Der Raum X ist kompakt.

b) Für jeden Filter $\mathcal{F}$ auf X so ist $\bigcap_{Z\in\mathcal{F}} \overline{Z} \neq \emptyset$.

c) Für jeden Filter $\mathcal{F}$ auf X gibt es einen konvergierenden Filter $F_1 \supset \mathcal{F}$.

d) Jeder Ultrafilter $\mathcal{U}$ auf X konvergiert.

Beweis. *a)* $\to$ *b)*: Gegeben einen Filter $\mathcal{F}$ auf X so hat die Familie $\{\overline{Z}\}_{Z\in\mathcal{F}}$ die FIP, denn

$$\bigcap_{i=1}^{n} \overline{Z}_i \supset \bigcap_{i=1}^{n} Z_i \neq \emptyset.$$

Insbesondere folgt aus der Bemerkung 4.20, dass $\bigcap_{Z\in\mathcal{F}} \overline{Z} \neq \emptyset$, wie gewünscht.

b) $\to$ *c)*: Gegeben einen Filter $\mathcal{F}$ auf X, wähle x in $\bigcap_{Z\in\mathcal{F}} \overline{Z} \neq \emptyset$. Insbesondere ist $U \cap Z \neq \emptyset$ für jede offene Umgebung U von x sowie Z aus $\mathcal{F}$. Die Familie

$$\mathcal{B} = \{U \cap Z\}_{\substack{Z\in\mathcal{F} \\ U\in\mathcal{N}_x}}$$

bildet eine Filterbasis, welche einen Filter F_1 erzeugt. Klarerweise liegt $\mathcal{N}_x$ in F_1, so $F_1 \to x$. Des Weiteren ist F eine Teilmenge von F_1, wie gewünscht.

c) $\to$ *d)*: Gegeben einen Ultrafilter $\mathcal{U}$ auf X, so gibt es einen Filter $F_1 \supset \mathcal{U}$, welcher konvergiert. Nun ist $\mathcal{U}$ ein maximaler Filter bezüglich Inklusion, so $\mathcal{U} = F_1$ konvergiert, wie gewünscht.

d) $\to$ *a)*: Aus der Bemerkung 4.20 müssen wir nur zeigen, dass X die FIP besitzt. Sei also eine Familie $(C_i)_{i\in I}$ abgeschlossener Teilmengen von X derart, dass jede endlicher Durchschnitt nicht-leer ist. Insbesondere bildet $\mathcal{B} = \{C_i\}_{i\in I}$ eine Filterbasis, so sei $\mathcal{U}$ einen Ultrafilter auf X mit C_i in $\mathcal{U}$ für alle i aus I aus dem Lemma 4.14. Nun konvergiert $\mathcal{U}$ nach einem Punkt x aus X. Aus der Aufgabe nach der Definition 4.15 folgt, dass x in $\overline{Z}$ für jedes Z aus $\mathcal{U}$, so

$$\bigcap_{i\in I} C_i \neq \emptyset,$$

wie gewünscht. □

Beispiel 4.22. Jedes abgeschlossene Intervall endlicher Länge ist kompakt: Sei $[a, b]$ ein abgeschlossenes Intervall mit Randpunkten a und b aus $\mathbb{R}$ und $(U_i)_{i\in I}$ eine beliebige offene Überdeckung von $[a, b]$.

Die Menge

$$S = \{x \in [a, b] \mid \text{ Das Teilintervall } [a, x] \text{ besitzt eine endliche Überdeckung}\}$$

ist offensichtlich nicht leer. Sei s das Supremum von S. Wenn $s = b$, sind wir fertig.

Ansonsten, wenn $s < b$, wähle ein i_0 aus I so, dass s in der offenen Menge U_{i_0} liegt. Finde ein $\epsilon > 0$ klein genug mit der Eigenschaft, dass $[s - \epsilon, s + \epsilon] \subset U_{i_0}$ und $a < s - \epsilon < s + \epsilon < b$. Das Element $s - \epsilon$ gehört zu der Menge S, also

$$[a, s - \epsilon] \subset \bigcup_{1\leq j\leq n} U_{i_j}.$$

Nun ist

$$[a, s + \epsilon] \subset \bigcup_{0\leq j\leq n} U_{i_j},$$

was ein Widerspruch dazu ist, dass s das Supremum von S war.

Aufgabe. Ist die Menge $A = \{0\} \cup \{\frac{1}{n}\}_{0 \neq n \in \mathbb{N}}$ kompakt?

Proposition 4.23. *Seien $C \subset K$ Teilmengen in einem topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$. Wenn K kompakt und C abgeschlossen in K (bezüglich der Spurtopologie) ist, dann ist C auch kompakt.*

Beweis. Schreibe $C = K \cap C'$ mit $C' \subset X$ abgeschlossen und somit $X \setminus C'$ offen. Gegeben eine offene Überdeckung

$$C \subset \bigcup_I U_i,$$

bekommen wir folgende offene Überdeckung

$$K \subset C \cup (K \setminus C) \subset \big(\bigcup_I U_i\big) \cup (X \setminus C')$$

der kompakten Teilmenge K. Also gibt es eine endliche Überdeckung, ohne Beschränkung der Allgemeinheit der Form

$$K \subset \big(\bigcup_{1 \leq j \leq n} U_{i_j}\big) \cup (X \setminus C').$$

Weil $C \subset K$ und $C \cap (X \setminus C') = \emptyset$ folgt, dass $C \subset \bigcup_{1 \leq j \leq n} U_{i_j}$, wie gewünscht. □

Proposition 4.24. *In einem Hausdorff topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ ist jede kompakte Menge abgeschlossen.*

Beweis. Sei K eine kompakte Teilmenge von X. Wir wollen zeigen, dass $X \setminus K$ offen ist. Wenn $K = X$ sind wir fertig. Ansonten wähle ein Element x von $X \setminus K$ fest. Für y in K ist $y \neq x$, also gibt es disjunkte Umgebungen U^y von y und V_y^x von x. Klarerweise ist

$$K \subset \bigcup_{y \in K} U^y,$$

also

$$K \subset \bigcup_{1 \leq j \leq n} U^{y_j}$$

für endlich viele Elemente $y_1, \ldots, y_n$ aus K. Die Menge

$$V = \bigcap_{1 \leq j \leq n} V_{y_j}^x$$

ist eine offene Umgebung von x. Wir müssen nur noch zeigen, dass $V \subset X \setminus K$ oder äquivalent dazu, dass $V \cap K = \emptyset$. Nun ist

$$V \cap K \subset V \cap \big(\bigcup_{1 \leq j \leq n} U^{y_j}\big) \subset \bigcup_{1 \leq j \leq n} V \cap U^{y_j} \subset \bigcup_{1 \leq j \leq n} V^{y_j} \cap U^{y_j} = \emptyset,$$

wie gewünscht. □

Zusammen mit der Bemerkung 4.19 und der Proposition 4.23 haben wir folgendes Korollar.

Korollar 4.25. *Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung topologischer Räume mit X kompakt und Y Hausdorff. Die Abbildung f ist abgeschlossen.*

Aufgabe. Der Beweis der Proposition 4.24 zeigt, dass jeder kompakte Hausdorff Raum *regulär* ist: ein Punkt x und eine abgeschlossene Menge B mit $x \notin B$ lassen sich durch offene Mengen trennen, das heißt, es gibt offene disjunkte Mengen U und V mit x in V und $B \subset U$.

Schließe daraus, dass jeder kompakte Hausdorff Raum *normal* ist: je zwei disjunkte abgeschlossene Mengen A und B lassen sich durch offene Mengen trennen.

Metrische Räume sind Hausdorff und kompakte Mengen sind beschränkt und abgeschlossen.

Bemerkung 4.26. In einem metrischen Raum (X, d) ist jede kompakte Menge K abgeschlossen und *beschränkt*, das heißt, für jedes Element x aus X gibt es eine natürlich Zahl N mit $K \subset B_N^X(x)$.

Beweis. Weil metrische Räume Hausdorff sind (siehe Bemerkung 1.30), müssen wir wegen Proposition 4.24 nur zeigen, dass K beschränkt ist. Für x fest ist

$$K \subset X = \bigcup_{\mathbb{N}} B_n^X(x),$$

und somit liefert Kompaktheit die gewünschte Zahl N (weil die Überdeckung eine Kette ist, das heißt $B_n^X(x) \subset B_m^X(x)$ für $n \leq m$). $\square$

Der Satz von Heine-Borel 4.28 liefert die Rückrichtung der obigen Bemerkung für die euklidische Metrik. Um den Satz beweisen zu können, brauchen wir den Satz von Tychonoff für endliche Produkte kompakter Räume. Wir beweisen den Satz für beliebige Produkte.

Satz 4.27. *(Satz von Tychonoff) Sei $(X_i, \mathcal{T}_i)_{i \in I}$ eine Familie nicht-leerer topologischer Räume. Der Raum $\prod_I X_i$ ist genau dann kompakt (in der Produkttopologie), wenn jeder Raum $(X_i, \mathcal{T}_i)$ kompakt ist.*

Beweis. Eine Richtung folgt aus der Bemerkung 4.19, weil jede Projektion $\pi_j : \prod_I X_i \to X_j$ surjektiv und stetig ist.

Nehmen wir nun an, dass jeder Raum $(X_i, \mathcal{T}_i)$ kompakt ist. Aus der Proposition 4.21 müssen wir nur zeigen, dass jeder Ultrafilter $\mathcal{U}$ auf $\prod_I X_i$ konvergiert. Nun ist $\pi_j(\mathcal{U})$ (wie in der Definition 4.16) einen Ultrafilter auf X_j für jedes j aus I, so es gibt einen Limespunkt x_j für $\pi_j(\mathcal{U})$ aus X_j. Setze nun $x = (x_i)_{i \in I}$ aus $\prod_I X_i$. Wir müssen nur zeigen, dass $\mathcal{U} \to x$, oder äquivalent dazu, dass jede offene Umgebung U von x in $\mathcal{U}$ liegt. Da x in der offenen Menge U liegt, gibt es U_{i_k} offene Teilmengen von X_{i_k} mit

$$x \in U_{i_1} \times \cdots \times U_{i_m} \subset U.$$

Nun konvergiert $\pi_{j_k}(\mathcal{U})$ nach x_{j_k}, so U_{j_k} liegt in $\pi_{j_k}(\mathcal{U})$. Insbesondere liegt $\pi_{j_k}^{-1}(U_{j_k}) = U_{j_k} \times \prod_{j_k \neq i \in I} X_i$ auch in $\mathcal{U}$. Somit liegt auch $U_{i_1} \times \cdots \times U_{i_m}$, und daher auch U, in $\mathcal{U}$, wie gewünscht. $\square$

Korollar 4.28. *(Satz von Heine-Borel) Eine Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist genau dann kompakt bezüglich der euklidischen Topologie, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist.*

Beweis. Wir müssen nur eine Richtung zeigen. Wenn A beschränkt und abgeschlossen ist, liegt A für eine natürliche Zahl N in der Menge $[-N, N] \times \cdots \times [-N, N]$. Aus Beispiel 4.22 und dem Satz von Tychnoff 4.27 folgt, dass diese Menge kompakt ist. Aus Proposition 4.23 folgt dann die Kompaktheit von A, weil A abgeschlossen ist. $\square$

Aufgabe. Ist die Menge $[0, 1]$ kompakt in der Sorgenfrey Gerade?

Satz 4.29. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein nicht-leerer kompakter Raum. Jede stetige Abbildung $f : X \to \mathbb{R}$ bezüglich der euklidischen Topologie auf $\mathbb{R}$ besitzt ein Minimum und ein Maximum auf X, das heißt, es gibt a und b in X mit*

$$f(a) = \min_{x \in X} f(x) \text{ und } f(b) = \max_{x \in X} f(x).$$

Beweis. Weil das Bild $f(X) \neq \emptyset$ kompakt in $\mathbb{R}$ ist, siehe Bemerkung 4.19, folgt aus dem Satz von Heine-Borel 4.28, dass das Bild abgeschlossen und beschränkt ist. Insbesondere gibt es ein Infimum c und ein Supremum d. Beide Elemente sind Limespunkte von Folgen von Elementen aus $f(X)$, also liegen c und d in der abgeschlossenen Menge $f(X)$. Insbesondere ist c das Minimum und d das Maximum von f auf X. $\square$

4.4 Lokal Kompaktheit und Kompaktifizierungen

Viele topologische Räume (z. B. jedes nicht-triviale offene Intervall in $\mathbb{R}$ mit der euklidischen Topologie) sind leider nicht kompakt. Dennoch ergibt sich als sinnvolle Frage für einen toplogischen Raum $(X, \mathcal{T})$, ob es einen kompakten Hausdorff Raum Y derart gibt, dass folgendes erfüllt ist:

- Der Raum lässt sich in Y dicht einbetten: d. h. es gibt eine stetige injektive Abbildung $X \xhookrightarrow{f} Y$ so, dass $X \approx f(X)$ (mit der Spurtopologie) und $f(X)$ dicht in Y ist.

Ein Hausdorff Raum Y wie oben ist eine *Kompaktifizierung* des Raumes $(X, \mathcal{T})$.

Wenn X eine Kompaktifizierung besitzt, ist X auch Hausdorff, weil X homöomorph zu $f(X)$ ist, welcher mit der Spurtopologie Hausdorff ist (siehe Bemerkung 2.10).

Definition 4.30. Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ ist *lokal kompakt*, falls jeder Punkt x eine Umgebung $U = U^x$ besitzt, welche in einer kompakten Teilmenge K von X enthalten ist:

$$x \in U \subset K.$$

Insbesondere besitzt der Punkt x eine Basis von Umgebungen, welche in kompakten Mengen liegen.

Aufgabe. Zeige, dass lokal Kompaktheit unter Homöomorphismen erhalten bleibt.

Beispiel 4.31. Jeder kompakte Raum ist lokal kompakt.

Der euklidische Raum $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_{\text{eukl}})$ ist wegen des Satzes von Heine-Borel 4.28 lokal kompakt.

Das Produkt der Sorgenfrey Gerade mit sich selbst (gennant *die Sorgenfrey Ebene*) ist nicht lokal kompakt.

Satz 4.32. *Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ ist genau dann Hausdorff und lokal kompakt, wenn X eine Einpunkt-Kompaktifizierung besitzt, das heißt, eine Kompaktifizierung Y derart, dass $Y \setminus X$ höchstens aus einem Punkt besteht (Wir identifizieren X mit seinem Bild als Teilmenge der Kompaktifizierung Y).*

Ferner sind je zwei Einpunkt-Kompaktifizierungen von X homöomorph: für jede dichte Einbettung $X \overset{g}{\hookrightarrow} Z$ in den kompakten Hausdorff Raum Z mit $|Z \setminus g(X)| \leq 1$ gibt es einen eindeutigen Homöomorphismus $Y \overset{h}{\hookrightarrow} Z$ mit folgendem kommutativen Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, hook, "g"] \arrow[dr, "\boldsymbol{i}_X"'] & \square & Z \\
& Y \arrow[ur, hook, dashed, "\exists! h"'] &
\end{tikzcd}$$

wobei das Zeichen $\square$ im Diagramm bedeutet, dass $h \circ \boldsymbol{i}_X = g$. Insbesondere ist der Raum X genau dann kompakt, wenn X (bis auf Homöomorphismus) seine eigene Einpunkt-Kompaktifizierung ist.

Die Einpunkt-Kompaktifizierung heißt auch *Alexandroffs Kompaktifizierung oder Erweiterung*, nach dem russischen Mathematiker Pawel Alexandroff.

Beweis. Angenommen X besitzt eine Einpunkt-Kompaktifizierung Y. Dann ist der Raum X Hausdorff wegen obiger Bemerkung. Wir zeigen nun, dass X lokal kompakt ist. Wenn $X = Y$, dann sind wir fertig. Sonst schreibe $Y = X \cup \{p\}$ und sei x in X beliebig. Weil $x \neq p$ im Hausdorff Raum Y, gibt es disjunkte offene Umgebungen $U = U^x$ und $V = V^p$. Die Menge U liegt in der abgeschlossenen Teilmenge $Y \setminus V$. Wegen Proposition 4.23 ist $K = Y \setminus V$ kompakt. Beachte, dass $K \subset X$ und somit ist X lokal kompakt.

Für die andere Richtung sei nun X Hausdorff und lokal kompakt. Wir werden sehen, dass es nur eine Möglichkeit für die Tologie auf der Einpunkt-Kompaktifizierung gibt. Sei Z eine Einpunkt-Kompaktifizierung mit $Z = X \cup \{q\}$ und V eine Umgebung von q. Die Menge $K = X \setminus (X \cap V) = Z \setminus V$ ist abgeschlossen, also wegen Proposition 4.23 kompakt in Z. Da $K \subset X$ ist $V = (X \setminus K) \cup \{q\}$. Insbesondere sind die offenen Umgebungen vom neuen Punkt q von der Form $(X \setminus K) \cup \{q\}$ mit $K \subset X$ kompakt.

Wenn X kompakt ist, ist X seine eigene Einpunkt-Kompaktifizierung: Sonst hätte der Punkt q die Menge $(X \setminus X) \cup \{q\} = \{q\}$ als offene Umgebung. Also wäre q isoliert, aber dann wäre X nicht dicht in Z.

Das bedeutet, dass wir nur den Fall betrachten müssen, dass X Hausdorff und lokal kompakt aber nicht kompakt ist. Setze $Y = X \cup \{\infty\}$, wobei ∞ ein neuer künstlicher Punkt ist. Wir beweisen die Aussage mit Hilfe der folgenden Behauptungen:

Behauptung. *Die Kollektion*

$$\mathcal{T} \cup \{(X \setminus K) \cup \{\infty\} \mid \text{ mit } K \subset X \text{ kompakt}\}$$

bildet eine Hausdorff Topologie $\mathcal{T}_Y$ auf Y derart, dass die Spurtopologie von $\mathcal{T}_Y$ auf X zur Topologie $\mathcal{T}$ äquivalent ist.

Beweis der Behauptung. Weil die leere Menge immer kompakt ist, folgt, dass Y in $\mathcal{T}_y$ liegt. Die Topologie $\mathcal{T}$ ist in $\mathcal{T}_Y$ erhalten, also ist $\emptyset$ auch offen in $\mathcal{T}_Y$. Der Durchschnitt zweier $\mathcal{T}_Y$-offener Mengen ist wiederum offen (in $\mathcal{T}_Y$), denn einerseits ist die Vereinigung zweier kompakten Mengen kompakt und andererseits ist wegen Proposition 4.24 jede kompakte Menge im Hausdorff Raum X abgeschlossen. Analog lässt sich leicht zeigen, dass $\mathcal{T}_Y$ unter beliebigen Vereinigungen abgeschlossen ist.

Um zu zeigen, dass Y Hausdorff bezüglich der Topologie $\mathcal{T}_Y$ ist, genügt es einen Punkt x aus X vom Punkt ∞ zu trennen. Weil X lokal kompakt ist, gibt es eine kompakte Menge K in X und eine offene Umgebung U von x mit $U \subset K$. Dann liegt ∞ in der $\mathcal{T}_Y$-offenen Menge $V = (X \setminus K) \cup \{\infty\}$, welche disjunkt von U ist.

Klarerweise ist jede $\mathcal{T}$-offene Menge offen bezüglich der Spurtopologie auf X. Nun lässt sich jede bezüglich der Spurtopologie offene Menge als $X \cap V$ schreiben, mit V offen in $\mathcal{T}_Y$. Wenn V aus $\mathcal{T}$ kommt, ist $V = X \cap V$ offen in $\mathcal{T}$, wie gewünscht. Sonst ist $V = (X \setminus K) \cup \{\infty\}$ mit K kompakt in X und somit ist $X \cap V = X \setminus K$ offen in $\mathcal{T}$ wegen Proposition 4.24. $\square_{\text{Beh.}}$

Behauptung. *Der Raum $(Y, \mathcal{T}_Y)$ ist kompakt und die Menge X liegt dicht in Y. Insbesondere ist ∞ ein Häufungspunkt von X in Y.*

Beweis der Behauptung. Der Raum Y ist kompakt: Sei $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von Y. Für den Punkt ∞ gibt es ein i_0 aus I derart, dass ∞ in $U_{i_0} = (X \setminus K) \cup \{\infty\}$ liegt für eine kompakte Teilmenge $K \subset X$. Weil

$$K \subset Y = \bigcup_I U_i,$$

gibt es eine endliche Teilüberdeckung

$$K \subset \bigcup_{1 \leq j \leq n} U_{i_j} \cap X.$$

Insbesondere ist

$$Y = (Y \setminus K) \cup K = \Big((X \setminus K) \cup \{\infty\}\Big) \cup K = U_{i_0} \cup \bigcup_{1 \leq j \leq n} U_{i_j} = \bigcup_{0 \leq j \leq n} U_{i_j},$$

wie gewünscht.

Die Menge X liegt dicht in Y: Sei $V \subset Y$ eine nicht-leere offene Teilmenge. Wenn ∞ nicht in V liegt, ist V eine Teilmenge von X und wir sind fertig. Ansonsten ist $V = (X \setminus K) \cup \{\infty\}$ mit $K \subset X$ kompakt. Da X selbst nicht kompakt ist, gilt $X \neq K$ und somit ist $\emptyset \neq (X \setminus K) = X \cap V$ nicht-leer. $\square_{\text{Beh.}}$

Es genügt zu zeigen, dass diese Konstruktion bis auf Homöomorphie eindeutig ist. Noch zu zeigen ist, dass es für jede Einbettung $X \xhookrightarrow{g} Z$ in den kompakten Hausdorff Raum Z einen eindeutigen Homöomorphismus $Y \xhookrightarrow{h} Z$ mit folgendem kommutativem Diagramm gibt:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, hook, "g"] \arrow[dr, hook, "i_X"'] \arrow[drr, phantom, "\square"] & & Z \\
& Y \arrow[ur, hook, dashed, "\exists! h"'] &
\end{tikzcd}$$

Wegen obiger Diskussion ist $Z \neq X$, da X nicht kompakt ist. Insbesondere lässt sich Z schreiben als $Z = g(X) \cup \{q\}$. Definiere

$$\begin{aligned} h : \; Y &\to Z \\ y &\mapsto \begin{cases} g(y), \text{ falls } y \in X \\ q, \text{ falls } y = \infty \end{cases} \end{aligned}$$

Die Funktion ist klarerweise bijektiv und $h \circ \boldsymbol{i}_X = g$. Wir zeigen zuerst, dass h stetig ist: Sei y in Y beliebig. Wenn $y \neq \infty$, ist $h(y) = g(y) \neq q$ und somit finden wir eine offene Umgebung $V = V^{g(y)}$ mit $V \cap g(X)$ offen in $g(X)$. Insbesondere ist $g^{-1}(V) = g^{-1}(V \cap g(X)) = X \cap h^{-1}(V)$ eine offene Umgebung von y (in X und also in Y). Wenn $y = \infty$, sei V eine offene Umgebung von q in Z. Die abgeschlossene Menge $C = Z \setminus V$ ist kompakt und gleich $g(X) \setminus V$ und somit ist das Urbild $K = g^{-1}(C)$ kompakt in X (weil $X \approx g(X)$). Die offene $\mathcal{T}_Y$-Umgebung $U = (X \setminus K) \cup \{\infty\}$ von ∞ liegt in $h^{-1}(V)$, wie gewünscht.

Aus dem Korollar 4.25 folgt, dass h abgeschlossen und somit ein Homöomorphismus ist. Wenn $h_1 : Y \to Z$ ein Homömorphismus mit $h_1 \circ \boldsymbol{i}_X = g = h \circ \boldsymbol{i}_X$ ist, stimmen h_1 und h auf der dichten Teilmenge X überein. Aus der Aufgabe nach Korollar 2.4 folgt, dass $h = h_1$ auf Y. □

Korollar 4.33. *Der Hausdorff-Raum $(X, \mathcal{T})$ ist genau dann lokal kompakt, wenn es für jede Umgebung U eines Punktes x aus X eine Umgebung $V = V^x$ derart gibt, dass $\overline{V} \subset U$ und $\overline{V}$ kompakt ist.*

Insbesondere ist ein topologischer Raum genau dann Hausdorff und lokal kompakt, wenn er homöomorph zu einer offenen Teilmenge eines kompakten Hausdorff Raumes ist.

Beweis. Sei zuerst $(X, \mathcal{T})$ Hausdorff und lokal kompakt und Y die Einpunkt-Kompaktifizierung von X. Gegeben eine Umgebung U vom Punkt x aus X ist $K = Y \setminus U$ abgeschlossen in Y und somit kompakt. Die Aufgabe nach dem Korollar 4.25 liefert eine offene Umgebung V von x und eine offene Menge $W \supset K$ mit $V \cap W = \emptyset$. Insbesondere ist $V \subset X$ offen in X. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit ist $V \subset U$. Die kompakte Menge $\overline{V}$ aus Y liegt in X (weil es disjunkt von ∞ ist, wegen der Menge W). Da

$$V \subset X \setminus W \subset X \setminus K = U,$$

folgt, dass $\overline{V} \subset X \setminus W \subset U$, wie gewünscht. Für die andere Richtung ist klar, dass X lokal kompakt ist, weil $V \subset \overline{V}$.

Wir beweisen nun den zweiten Teil: Eine Richtung ist trivial, denn $X = Y \setminus \{\infty\}$ ist klarerweise offen. Wenn nun $X \approx W$ mit W offen in einem kompakten Hausdorff Raum Y, dann ist X auch Hausdorff. Wir müssen nur noch zeigen, dass X (oder eher $W \subset Y$) lokal kompakt ist: Sei x in W beliebig und wähle eine offene Umgebungen U in W bezüglich der Spurtopologie von Y. Weil W offen in Y ist, ist U offen in Y. Der Hausdorff Raum Y ist kompakt, also lokal kompakt. Mit obigem finden wir eine Umgebung V von x in Y mit

$$x \in V \subset \overline{V} \subset U.$$

Aus der obigen Äquivalenz ist W (und somit X) lokal kompakt. □

Beispiel 4.34. Die Einpunkt-Kompaktifizierung des euklidischen Raumes $\mathbb{R}^n$ ist homömorph zur n-dimensionalen Einheitssphäre $\mathbb{S}^n$ (siehe Beispiel 3.7) durch die *stereografische Projektion*

$$\begin{array}{rccl} \psi : & \mathbb{S}^n & \to & \mathbb{R}^n \cup \{\infty\} \\ & (x_0, \ldots, x_n) & \mapsto & \begin{cases} (\frac{x_1}{1-x_0}, \ldots, \frac{x_n}{1-x_0}), \text{ falls } x_0 \neq 1 \\ \infty, \text{ falls } x_0 = 1 \text{ und } x_1 = \ldots = x_n = 0 \end{cases} \end{array}$$

mit Inverse

$$\psi^{-1}{\restriction_{\mathbb{R}^n}}(y_1, \ldots, y_n) = \frac{1}{1 + \sum\limits_{1 \leq i \leq n} y_i^2}(z_0, \ldots, z_n),$$

wobei

$$\begin{aligned} z_0 &= -1 + \sum_{1\le i\le n} y_i^2 \\ z_i &= 2y_i, \text{ für } 1 \le i \le n \end{aligned}$$

4.5 Folgenkompaktheit

Jede nicht-leere Menge besitzt immer Berührungspunkte (die Elemente der Menge selbst!). Dennoch muss die Menge nicht unbedingt Häufungspunkte haben: z. B. besitzt eine Einermenge keinen Häufungspunkt. Wir werden eine alternative Charakterisierung der Kompaktheit mit Hilfe von Folgen und Limespunkten kennen lernen, welche wir in Analysis implizit verwendet haben.

Definition 4.35. Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ ist:

- *häufungspunktkompakt*, falls jede unendliche Menge einen Limespunkt besitzt.
- *folgenkompakt*, falls jede Folge eine konvergente Teilfolge besitzt.

Beispiel 4.36. Die euklidische Gerade ist weder häufungspunktkompakt noch folgenkompakt: es genügt eine aufsteigende Aufzählung der natürlichen Zahlen zu betrachten.

Wir wissen aus der Analysis, dass jedes beschränkte abgeschlossene Intervall in $\mathbb{R}$ folgenkompakt ist.

Lemma 4.37. *Jeder kompakte Raum ist häufungskompakt. Jeder häufungskompakte Hausdorff Abz_1-Raum ist folgenkompakt.*

Beweis. Wir müssen zeigen, dass jede Teilmenge A des kompakten Raumes $(X, \mathcal{T})$ ohne Häufungspunkte endlich ist. Beachte, dass A wegen Lemma 1.23 abgeschlossen ist und somit kompakt, wegen Proposition 4.23.

Wenn A leer ist, sind wir fertig. Ansonsten gibt es für jedes x aus A eine Umgebung U^x in X derart, dass $U \cap A = \{x\}$ (weil x kein Häufungspunkt ist). Da

$$A \subset \bigcup_{x\in A} U^x,$$

gibt es eine endliche Teilüberdeckung der Form

$$A \subset \bigcup_{1\le i\le n} U^{x_i},$$

für $x_1, \ldots, x_n$ aus A, also

$$A = A \cap \bigcup_{1\le i\le n} U^{x_i} = \bigcup_{1\le i\le n} U^{x_i} \cap A = \{x_1, \ldots, x_n\},$$

und somit ist A endlich.

Wenn X häufungskompakt ist, ist X klarerweise folgenkompakt: gegeben eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ betrachte die Menge A der Elemente der Folge. Wenn A endlich ist, gibt es eine konstante Teilfolge, welche dann konvergent ist. Wenn A unendlich ist, gibt es einen Häufungspunkt. Mit Hilfe von der Proposition 4.4 lässt sich leicht eine konvergente Teilfolge gewinnen. $\square$

Für metrische Räume stimmen die beiden obigen Begriffe mit dem Begriff der Kompaktheit überein, dank des Satzes von Bolzano-Weierstraß 4.40. Dafür brauchen wir erstmal ein Hilfslemma:

Proposition 4.38. *(Lebesguezahl einer Überdeckung) Zu jeder offenen Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ eines folgenkompakten metrischen Raumes (X, d) gibt es eine reelle Zahl $\delta > 0$ derart, dass jede Teilmenge B von X mit Diameter*

$$\mathrm{Diam}(B) = \sup_{x\neq y\in B} \mathrm{d}(x, y) < \delta$$

ganz in einem Mitglied U_i der Überdeckung liegt.

Ferner ist der folgenkompakte metrische Raum X total beschränkt*: für jedes $\epsilon > 0$ gibt es eine endliche Überdeckung durch offene Kugeln mit Radius ϵ.*

Beweis. Wenn für die offene Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ keine solche Zahl $\delta > 0$ existiert, gibt es für jedes $n \geq 1$ aus $\mathbb{N}$ eine Menge B_n mit Diameter kleiner als $\frac{1}{n}$, welche in keinem U_i ganz liegt. Insbesondere ist B_n nicht leer, wähle x_n in B_n. Die so konstruierte Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ muss eine konvergente Teilfolge $(x_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ mit Limes y aus X besitzen.

Für den Limespunkt y gibt es einen Index i aus I derart, dass y in U_i liegt. Wähle $\epsilon > 0$ mit $B^X_\epsilon(y) \subset U_i$. Weil die Teilfolge $(x_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ gegen y konvergiert, finden wir ein j_0 in $\mathbb{N}$ mit der Eigenschaft, dass x_{n_j} in $B^X_{\frac{\epsilon}{2}}(y)$ für $j \geq j_0$ liegt. Für $j \geq j_0$ mit $\frac{1}{n_j} < \frac{\epsilon}{2}$ hat die Menge B_{n_j} einen Diameter echt kleiner als $\frac{\epsilon}{2}$. Insbesondere ist

$$B_{n_j} \subset B^X_{\frac{\epsilon}{2}}(x_{n_j}) \subset B^X_\epsilon(y) \subset U_i,$$

was den gewünschten Widerspruch liefert.

Für die letzte Behauptung sei $\epsilon > 0$ beliebig. Wenn es keine endliche Überdeckung durch offene Kugeln mit Radius ϵ gäbe, konstruiere eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$x_n \in X \setminus \big(\bigcup_{k<n} B^X_\epsilon(x_k)\big).$$

Aus $\mathrm{d}_X(x_n, x_m) > \epsilon$ für $n \neq m$ folgt, dass die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine konvergente Teilfolge besitzt. □

Korollar 4.39. *Sei $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung metrischer Räume mit X kompakt. Die Abbildung f ist* uniform stetig*: für jedes $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ derart, dass für je zwei Punkte x_1 und x_2 aus X mit $\mathrm{d}_X(x_1, x_2) < \delta$ für den Abstand der Bilder $\mathrm{d}_Y(f(x_1), f(x_2)) < \epsilon$ gilt.*

Beweis. Sei $\epsilon > 0$ und betrachte die offene Überdeckung

$$Y = \bigcup_{y\in Y} B^Y_{\frac{\epsilon}{2}}(y).$$

Weil f stetig ist, ist

$$X = \bigcup_{y\in Y} f^{-1}\big(B^Y_{\frac{\epsilon}{2}}(y)\big)$$

eine offene Überdeckung des wegen Lemma 4.37 folgenkompakten Raumes X. Sei δ die Lebesguezahl der obigen offenen Überdeckung von X. Gegeben x_1 and x_2 in X mit $\mathrm{d}_X(x_1, x_2) < \delta$ hat die endliche Menge $\{x_1, x_2\}$ einen Diameter echt kleiner als δ, also $\{x_1, x_2\} \subset f^{-1}\big(B^Y_{\frac{\epsilon}{2}}(y_0)\big)$ für ein y_0 aus Y. Insbesondere ist $\mathrm{d}_Y(f(x_i), y_0) < \frac{\epsilon}{2}$ für $1 \leq i \leq 2$ und somit $\mathrm{d}_Y(f(x_1), f(x_2)) < \epsilon$, wie gewünscht. □

Satz 4.40. *(Satz von Bolzano-Weierstraß) Für einen metrischen Raum* (X, d) *sind folgende Eigenschaften äquivalent:*

- *Der Raum* X *ist kompakt.*
- *Der Raum* X *ist häufungspunktkompakt.*
- *Der Raum* X *ist folgenkompakt.*

Beweis. Wegen Bemerkung 4.2 und Lemma 4.37 müssen wir nur noch zeigen, dass ein metrischer folgenkompakter Raum (X, d) kompakt ist. Sei $(U_i)_{i \in I}$ eine beliebige offene Überdeckung von X und δ ihre Lebesguezahl, welche Proposition 4.38 liefert. Setze $\epsilon = \frac{\delta}{3}$. Der Raum X besitzt eine endliche Überdeckung durch offene Kugeln mit Radius ϵ. Weil jede dieser Kugeln einen Diameter von $2\epsilon < \delta$ besitzt, liegt jede Kugel ganz in einem Mitglied U_i der Überdeckung. Insbesondere lässt sich X durch endlich viele U_i's überdecken. Somit ist X kompakt. □

Kapitel 5

Homotopie und der Satz von Seifert-van Kampen

(Weg-)Zusammenhang lieferte eine Antwort auf die Frage, ob $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^2$ mit den euklidischen Topologien homöomorph sind (siehe die Aufgabe nach Bemerkung 3.20). Jedoch können wir diese Methode nicht verwenden, um zu entscheiden, ob $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ homöomorph sein können. Wir brauchen eine Verallgemeinerung des Zusammenhanges, welche wir in diesem Abschnitt einführen werden.

5.1 Die Fundamentalgruppe

In der Definition 3.17 wurde der Begriff eines Pfades $\gamma : [0,1] \to X$ in einem topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ eingeführt. Der *Anfangspunkt* des Pfades ist $\gamma(0)$ und der *Endpunkt* ist $\gamma(1)$.

Definition 5.1. Eine *Schleife* auf dem Punkt x_0 im topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ ist ein geschlossener Pfad, das heißt, ein Pfad mit selbem Anfangs- und Endpunkt $x_0 = \gamma(0) = \gamma(1)$.

Wir bezeichnen mit $\Omega_{x_0}^X$ die Kollektion aller Schleifen auf x_0 im Raum X.

Bemerkung 5.2. Der Schleifenraum $\Omega_{x_0}^X$ ist nicht leer wegen der *konstanten Schleife*

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{C}_{x_0}: & [0,1] & \to & X \\ & t & \mapsto & x_0 \end{array}$$

Ferner besitzt $\Omega_{x_0}^X$ eine Verknüpfung, das *Aneinanderhängen* $\star$ zweier Schleifen (siehe Bemerkung 3.22)

$$\begin{array}{rccc} \gamma_1 \star \gamma_2: & [0,1] & \to & X \\ & t & \mapsto & \begin{cases} \gamma_1(2t), & \text{für } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \gamma_2(2t-1), & \text{für } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} \end{array}$$

Die zu γ *inverse Schleife* ist die Schleife

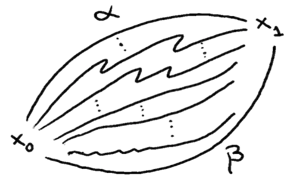
$$\begin{array}{rccc} \overline{\gamma}: & [0,1] & \to & X \\ & t & \mapsto & \gamma(1-t) \end{array}$$

Beachte, dass $\overline{\gamma} \star \gamma$ nicht die Schleife C_{x_0} ist. Dennoch wollen wir sagen können, dass beide Schleifen „*gleich*“ sind. Daher führen wir folgende Definition ein:

Definition 5.3. Zwei Pfade α und β im topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ mit selben Anfangs- und Endpunkten $x_0 = \gamma(0) = \beta(0)$ sowie $x_1 = \gamma(1) = \beta(1)$ sind *homotop* (oder *homotopieäquivalent*), bezeichnet mit $\alpha \sim \beta$, falls es eine *Homotopie* H von α nach β gibt, das heißt, eine stetige Abbildung $H : [0,1] \times [0,1] \to X$ (wobei $[0,1] \times [0,1]$ die Spurtopologie der euklidischen Ebene $\mathbb{R}^2$ besitzt) derart, dass:

- $H(s, 0) = x_0$ und $H(s, 1) = x_1$ für alle s in $[0, 1]$.
- $H(0, t) = \alpha(t)$ für alle t in $[0, 1]$.
- $H(1, t) = \beta(t)$ für alle t in $[0, 1]$.

Für jedes s aus $[0, 1]$ ist die Abbildung $H(s, \cdot) : [0, 1] \to X$ ein Weg von x_0 nach x_1. Wir bekommen somit eine stetige Deformierung von α nach β:



Insbesondere ist für s aus $[0, 1]$ die Kurve $H(s, \cdot) : [0, 1] \to X$ eine Schleife auf x_0, wenn α und β Schleifen auf x_0 sind.

Aufgabe. Zeige, dass α und β genau dann homotop sind, wenn $\overline{\alpha}$ und $\overline{\beta}$ homotop sind.

Wenn α und β homotop sind, so sind $\alpha \star \gamma$ und $\beta \star \gamma$ homotop für jeden Pfad γ mit $\gamma(0) = \alpha(1) = \beta(1)$.

Proposition 5.4. *Homotopieäquivalenz ist eine Äquivalenzrelation zwischen Schleifen auf dem Punkt x_0.*

Beweis. Die Reflexivität $\alpha \sim \alpha$ ist durch die Homotopie $H(s, t) = \alpha(t)$ gegeben. Wenn α homotop zu β durch H ist, dann ist β homotop zu α durch $H'(s, t) = H(1 - s, t)$.

Wenn α homotop zu β durch H_1 und β homotop zu γ durch H_2 sind, ist α homotop zu γ durch die Abbildung

$$\begin{array}{rccc} H : & [0,1] \times [0,1] & \to & X \\ & (s,t) & \mapsto & \begin{cases} H_1(2s, t), & \text{für } s \in [0, \frac{1}{2}] \\ H_2(2s - 1, t), & \text{für } s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} \end{array}$$

welche wegen dem Verklebungslemma 2.14 stetig ist. □

Beispiel 5.5. In $\mathbb{R}^n$, oder allgemeiner in jeder konvexen Teilmenge mit der Spurtopologie (siehe Beispiel 3.19), sind je zwei Wege α und β mit denselben Anfangs- und Endpunkten homotop durch die Abbildung

$$\begin{array}{rccc} H : & [0,1] \times [0,1] & \to & \mathbb{R}^n \\ & (s,t) & \mapsto & (1-s)\alpha(t) + s\beta(t) \end{array}$$

Insbesondere sind alle Schleifen auf x_0 homotopieäquivalent zu C_{x_0}.

Aufgabe. Sei $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ die *perforierte Ebene* mit der Spurtopologie bezüglich der euklidischen Topologie und α eine Schleife auf $x_0 = (1,0)$ derart, dass die erste Koordinate nur positive Werte annimmt. Zeige, dass $\alpha \sim \mathrm{C}_{x_0}$.

Wir werden in den nächsten Abschnitten sehen, dass die Schleife

$$\begin{array}{rccl} \beta: & [0,1] & \to & \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ & t & \mapsto & (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t) \end{array}$$

nicht homotopieäquivalent zur konstanten Schleife auf $(1,0)$ ist.

Satz 5.6. *Für einen Punkt x_0 in einem topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ bezeichnen wir mit*

$$\pi_1(X, x_0) = \Omega^X_{x_0}/\sim$$

die Kollektion aller Klassen $[\alpha]$ von Schleifen α auf x_0 modulo Homotopieäquivalenz.

Die Verknüpfung

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(X, x_0) & \to & \pi_1(X, x_0) \\ ([\alpha], [\beta]) & \mapsto & [\alpha \star \beta] \end{array}$$

ist wohldefiniert und definiert auf der Menge $\pi_1(X, x_0)$ eine Gruppenoperation, welche wir auch mit dem Symbol $\star$ bezeichnen. Die Menge $\pi_1(X, x_0)$ wird die Fundamentalgruppe *von X auf x_0 genannt.*

Beweis. Wenn die Schleifen α, bzw. β, homotop zu α_1, bzw. β_1 durch die Homotopie H_1, bzw. H_2, homotop sind, definiert die Abbildung

$$\begin{array}{rccl} H: & [0,1] \times [0,1] & \to & X \\ & (s,t) & \mapsto & \begin{cases} H_1(s, 2t), & \text{für } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ H_2(s, 2t-1), & \text{für } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} \end{array}$$

eine Homotopie zwischen $\alpha \star \beta$ und $\alpha_1 \star \beta_1$. Insbesondere ist die obige Verknüpfung wohldefiniert.

Wir zeigen jetzt, dass die Verknüpfung $\star$ auf $\pi(X, x_0)$ **assoziativ** ist:

$$([\alpha] \star [\beta]) \star [\gamma] = [\alpha] \star ([\beta] \star [\gamma]),$$

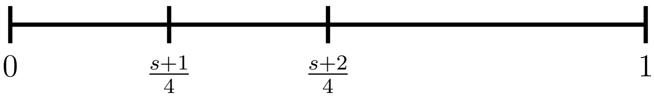
oder äquivalent dazu, dass die Schleifen $(\alpha \star \beta) \star \gamma$ und $\alpha \star (\beta \star \gamma)$ homotop sind, wobei

$$\begin{array}{rccl} (\alpha \star \beta) \star \gamma: & [0,1] & \to & X \\ & t & \mapsto & \begin{cases} \alpha(4t), & \text{für } t \in [0, \frac{1}{4}] \\ \beta(4t-1), & \text{für } t \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \\ \gamma(2t-1), & \text{für } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} \end{array}$$

und

$$\begin{array}{rccl} \alpha \star (\beta \star \gamma): & [0,1] & \to & X \\ & t & \mapsto & \begin{cases} \alpha(2t), & \text{für } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \beta(4t-2), & \text{für } t \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}] \\ \gamma(4t-3), & \text{für } t \in [\frac{3}{4}, 1] \end{cases} \end{array}$$

Für festes s in $[0,1]$ haben wir für die Variable t folgende Zerlegung des Intervalls $[0,1]$:



Wir suchen also eine lineare Transformation $t \mapsto at+b$ von $[0, \frac{s+1}{4}]$ auf $[0,1]$, welche gegeben wird durch

$$b = 0 \text{ und } a = \frac{4}{s+1}.$$

Analog bildet die Transformation $t \mapsto 4t - (1+s)$ das Intervall $[\frac{s+1}{4}, \frac{s+2}{4}]$ auf $[0,1]$ ab, und $t \mapsto \frac{4}{2-s}t - \frac{s+2}{2-s}$ tut dies für das Intervall $[\frac{s+2}{4}, 1]$.

Setze nun

$$\begin{array}{rccc} H: & [0,1]\times[0,1] & \to & X \\ & (s,t) & \mapsto & \begin{cases} \alpha(\frac{4}{s+1}t), & \text{für } t \in [0, \frac{s+1}{4}] \\ \beta(4t-(1+s)), & \text{für } t \in [\frac{s+1}{4}, \frac{s+2}{4}] \\ \gamma(\frac{4}{2-s}t - \frac{s+2}{2-s}), & \text{für } t \in [\frac{s+2}{4}, 1] \end{cases} \end{array}$$

Die Abbildung H ist wegen dem Verklebungslemma 2.14 stetig und liefert die gewünschte Homotopie.

Für die Existenz des neutralen Elementes und der Inversen benötigen wir folgenden Hilfssatz, welcher sich leicht beweisen lässt:

Behauptung. *Gegeben zwei Pfade $\alpha, \beta : [0,1] \to [0,1]$ mit $\alpha(1) = \beta(0)$ und eine stetige Abbildung $g : [0,1] \to X$, ist*

$$g \circ (\alpha \star \beta) = \big(g \circ \alpha\big) \star \big(g \circ \beta\big).$$

Des Weiteren sind für zwei durch H homotope Pfade $\gamma, \delta : [0,1] \to [0,1]$ die Pfade $g \circ \gamma$ und $g \circ \delta$ homotop durch $g \circ H$.

Wir beweise nun, dass die Klasse $[\mathrm{C}_{x_0}]$ das **neutrale Element** in $\pi(X, x_0)$ ist. Das heißt, dass für jede Schleife $\alpha : [0,1] \to X$ auf x_0

$$[C_{x_0}] \star [\alpha] = [\alpha] = [\alpha] \star [C_{x_0}],$$

oder äquivalent dazu, dass alle drei Schleifen $C_{x_0} \star \alpha$, α und $\alpha \star C_{x_0}$ homotop sind. Wir zeigen $\alpha \sim C_{x_0} \star \alpha$ und die anderen Homotopieäquivalenzen folgen analog. Die Abbildung $\gamma = \mathrm{Id}_{[0,1]}$ ist stetig und somit ist auch $\delta = \mathrm{C}_0 \star \mathrm{Id}_{[0,1]}$ stetig. Beispiel 5.5 liefert eine Homotopie H durch welche γ und δ homotop sind, weil das Intervall $[0,1]$ konvex ist. Wegen obiger Behauptung ist $\alpha \circ H$ eine Homotopie zwischen $\alpha = \alpha \circ \mathrm{Id}_{[0,1]}$ und $\alpha \circ (\mathrm{C}_0 \star \mathrm{Id}_{[0,1]}) = \mathrm{C}_{x_0} \star \alpha$, wie gewünscht.

Gegeben eine Klasse $[\alpha]$, zeigen wir zuletzt, dass die Klasse $[\overline{\alpha}]$ das **Inverse** ist, das heißt, dass die Schleife $\alpha \star \overline{\alpha}$ homotop (aber nicht gleich!) zu C_{x_0} ist. Hieraus folgt dann auch die Identität $[\overline{\alpha}] \star [\alpha] = [\mathrm{C}_{x_0}]$, weil $\overline{\overline{\alpha}} = \alpha$.

Sei wie oben $\gamma = \mathrm{C}_0$ und $\delta = \mathrm{Id}_{[0,1]} \star \overline{\mathrm{Id}_{[0,1]}}$. Aus der Konvexität von $[0,1]$ folgt, dass es eine Homotopie H zwischen γ und δ gibt. Wenn wir die Komposition mit α betrachten, sehen wir, dass C_{x_0} und $\alpha \star \overline{\alpha}$ homotop sind, wie gewünscht. $\square$

Aus dem obigen Beweis folgt folgende Anmerkung.

Korollar 5.7. *Für jeden Pfad α mit Anfangspunkt x_0 und Endpunkt x_1 gilt*

$$\mathrm{C}_{x_0} \star \alpha \sim \alpha \text{ und } \alpha \sim \alpha \star \mathrm{C}_{x_1}.$$

Aufgabe. Zeige, dass zwei Pfade α und β mit selben Anfangs- und Endpunkten genau dann homotop sind, wenn die Schleife $\alpha \star \overline{\beta}$ homotop zur konstanten Schleife ist.

Beispiel 5.8. In der perforierten Ebene $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ sei

$$\begin{array}{rccl} \beta: & [0,1] & \to & \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ & t & \mapsto & (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t) \end{array}$$

Aus den trigonometrischen Identitäten folgt $[\beta] \star [\beta] = [\beta_2]$, wobei

$$\begin{array}{rccl} \beta_k: & [0,1] & \to & \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ & t & \mapsto & (\cos 2\pi k t, \sin 2\pi k t) \end{array} \quad \text{für } k \in \mathbb{Z}$$

Allgemein ist $[\beta_n] \star [\beta] = [\beta_{n+1}]$, also

$$\underbrace{[\beta] \star \cdots \star [\beta]}_{n \text{ Mal}} = [\beta_n]$$

für n aus $\mathbb{N}$ und

$$[\beta_{-k}]^{-1} = [\beta_k]$$

wenn k in $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ liegt.

Lemma 5.9. *Sei γ ein Pfad im topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ von x_0 nach x_1. Die Abbildung*

$$\begin{array}{rccl} \varphi_\gamma: & \pi_1(X, x_1) & \to & \pi_1(X, x_0) \\ & [\alpha] & \mapsto & [\gamma \star (\alpha \star \overline{\gamma})] \end{array}$$

ist ein Gruppenisomorphismus.

Insbesondere ist die Fundamentalgruppe auf jedem Punkt einer Wegzusammenhangskomponente konstant (bis auf Isomorphie).

Wenn der topologische Raum $(X, \mathcal{T})$ wegzusammenhängend ist, können wir also von der *Fundamentalgruppe* von X reden ohne einen Basispunkt fixieren zu müssen.

Beweis. Analog zu der Behauptung im Beweis von Satz 5.6 folgt, dass φ_γ wohldefiniert ist. Weil $\mathrm{C}_{x_0} \sim \gamma \star \overline{\gamma}$ und $\mathrm{C}_{x_1} \sim \overline{\gamma} \star \gamma$ folgt, dass φ_γ und $\varphi_{\overline{\gamma}}$ inverse Abbildungen voneinander sind. Insbesondere ist φ_γ bijektiv. Wir müssen nur noch zeigen, dass φ_γ ein Gruppenhomomorphismus ist:

$$\begin{aligned} &\varphi_\gamma([\alpha] \star [\beta]) = \varphi_\gamma([\alpha \star \beta]) = [\gamma \star \big((\alpha \star \beta) \star \overline{\gamma}\big)] = [\gamma \star \big((\alpha \star \mathrm{C}_{x_1} \star \beta) \star \overline{\gamma}\big)] = \\ &= [\gamma \star \big((\alpha \star (\overline{\gamma} \star \gamma) \star \beta) \star \overline{\gamma}\big)] = [\Big(\gamma \star (\alpha \star \overline{\gamma})\Big) \star \Big(\gamma \star (\beta \star \overline{\gamma})\Big)] = [\gamma \star (\alpha \star \overline{\gamma})] \star [\gamma \star (\beta \star \overline{\gamma})] = \\ &= \varphi_\gamma([\alpha]) \star \varphi_\gamma([\beta]) \end{aligned}$$

□

Proposition 5.10. *Sei $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung topologischer Räume. Gegeben x_0 aus X, setze $y_0 = f(x_0)$. Die Abbildung f induziert einen Gruppenhomomorphismus*

$$\begin{array}{rccc} f_\star : & \pi_1(X, x_0) & \to & \pi_1(Y, y_0) \\ & [\alpha] & \mapsto & [f \circ \alpha] \end{array}$$

Die Abbildung $f_\star$ ist ein Funktor in der Kategorie topologischer Räume mit Basispunkten. Insbesondere ist $(f \circ g)_\star = f_\star \circ g_\star$ für stetige Abbildungen

$$X \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{f} Z.$$

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass die Abbildung $f_\star$ wohldefiniert ist: Wenn α und β durch die Homotopie H homotop sind, liefert die Abbildung $H_1 = f \circ H : [0,1] \times [0,1] \to Y$ eine Homotopie zwischen $f \circ \alpha$ und $f \circ \beta$.

Analog zu der Behauptung im Beweis von Satz 5.6 folgt, dass $f \circ (\alpha \star \beta) = (f \circ \alpha) \star (f \circ \beta)$ und somit

$$\begin{aligned} f_\star([\alpha] \star [\beta]) = f_\star([\alpha \star \beta]) = [f \circ (\alpha \star \beta)] = \\ = [(f \circ \alpha) \star (f \circ \beta)] = [f \circ \alpha] \star [f \circ \beta] = f_\star([\alpha]) \star f_\star([\beta]) \end{aligned}$$

□

Wenn f ein Homöomorphismus ist, dann ist $(f_\star)^{-1} = (f^{-1})_\star$.

Korollar 5.11. *Der Homöomorphismus $f : X \to Y$ induziert einen Gruppenisomorphismus von $\pi_1(X, x_0)$ nach $\pi_1(Y, f(x_0))$.*

Lemma 5.12. *Gegegeben zwei topologische Räume $(X, \mathcal{T}_X)$ und $(Y, \mathcal{T}_Y)$ sowie Basispunkte x_0 in X und y_0 in Y betrachten wir $X \times Y$ mit der Produkttopologie und die Koordinatenabbildungen $\pi_X : X \times Y \to X$ sowie $\pi_Y : X \times Y \to Y$. Die Abbildung*

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) & \to & \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0) \\ [\alpha] & \mapsto & \big(\pi_{X\star}([\alpha]), \pi_{Y\star}([\alpha])\big) \end{array}$$

ist ein Gruppenisomorphismus.

Beweis. Die Koordinatenabbildungen sind stetig und somit sind die Abbildungen $\pi_{X\star}$ und $\pi_{Y\star}$ wohldefiniert. Sei $\chi = (\pi_{X\star}, \pi_{Y\star})$ die obige Abbildung auf $\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0))$. Sie ist klarerweise ein Gruppenhomomorphismus und surjektiv, denn für je zwei Pfade α_X auf X und α_Y auf Y ist die Abbildung $t \mapsto (\alpha_X(t), \alpha_Y(t))$ ein Pfad auf $X \times Y$. Wir müssen nur noch zeigen, dass χ injektiv ist: Angenommen die Schleife α auf (x_0, y_0) in $X \times Y$ erfüllt, dass die beiden Schleifen $\pi_X \circ \alpha$ und $\pi_Y \circ \alpha$ durch die Homotopien H_X und H_Y homotop zu den konstanten Schleifen C_{x_0} bzw. C_{y_0} sind. Setze

$$\begin{array}{rccc} H : & [0,1] \times [0,1] & \to & X \times Y \\ & (s,t) & \mapsto & \big(H_X(s,t), H_Y(s,t)\big) \end{array}$$

Klarerweise ist $H(s, 0) = H(s, 1) = (x_0, y_0)$. Ferner ist $H(0, t) = \alpha(t)$ und

$$H(1, t) = (\mathrm{C}_{x_0}(t), \mathrm{C}_{y_0}(t)) = \mathrm{C}_{(x_0, y_0)}(t),$$

also $[\alpha] = [\mathrm{C}_{(x_0, y_0)}]$ in $\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0))$. □

Die einfachste Gruppe ist die triviale Gruppe. Daher führen wir den folgenden Begriff ein:

Definition 5.13. Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ ist *(wegweise) einfach zusammenhängend*, falls die folgenden Eigenschaften gelten:

- Der Raum ist wegzusammenhängend.
- Für einen (oder äquivalent dazu, für jeden) Punkt x_0 aus X ist die Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$ trivial, das heißt, jede Schleife auf x_0 ist *zusammenziehbar*: homotopieäquivalent zu C_{x_0}.

Aus der Bemerkung 3.18 und dem Korollar 5.11 schließen wir folgende Bemerkung.

Bemerkung 5.14. Einfacher Zusammenhang bleibt unter Homömorphismen invariant.

Für jedes n aus $\mathbb{N}$ ist der euklidische Raum $\mathbb{R}^n$ einfach zusammenhängend, sowie auch der Raum mit einem Punkt.

Ein wegzusammenhängender topologischer Raum ist genau dann einfach zusammenhängend, wenn je zwei Pfade mit selben Anfangs- und Endpunkten homotop sind (siehe die Aufgabe nach Korollar 5.7).

Um zeigen zu können, dass in Dimension $n \geq 2$ die Einheitssphäre $\mathbb{S}^n$ einfach zusammenhängend ist, benötigen wir eine einfache Version des Satzes von Seifert-van Kampen.

Satz 5.15. *(Einfache Version des Satzes von Seifert-van Kampen)*

Lässt sich der topologische Raum $(X, \mathcal{T})$ als Vereinigung $X = U \cup V$ zweier offener einfach zusammenhängender Mengen U und V mit $\emptyset \neq U \cap V$ wegzusammenhängend schreiben, dann ist X einfach zusammenhängend.

Beweis. Weil der Durchschnitt $U \cap V$ nicht leer ist, ist X wegzusammenhängend, da sich jeder Punkt aus X zu einem festen Punkt x_0 in $U \cap V$ verbinden lässt. Wir müssen nur noch zeigen, dass jede Schleife α auf x_0 zusammenziehbar ist. Proposition 4.38 liefert für die offene Überdeckung

$$[0, 1] = \alpha^{-1}(X) = \alpha^{-1}(U) \cup \alpha^{-1}(V)$$

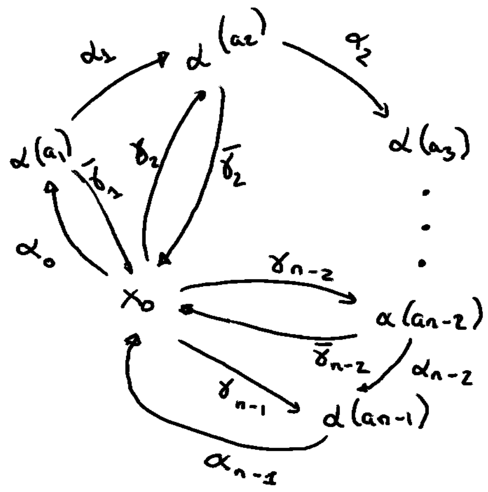
des kompakten metrischen Raumes $[0, 1]$ eine Lebesguezahl $\delta > 0$. Für jedes Teilintervall (a, b) von $[0, 1]$ der Länge $b - a < \delta$ liegt das Bild $\alpha((a, b))$ ganz in U oder ganz in V. Da $[0, 1]$ total beschränkt ist, finden wir eine Zerlegung $0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = 1$ derart, dass $\alpha([a_i, a_{i+1}])$ ganz in U oder ganz in V liegt. Wir können die Zerlegung so reduzieren, dass diese beiden Fälle abwechselnd stattfinden (indem wir die Vereinigung benachbarter Intervalle nehmen), dann liegt $\alpha(a_i)$ in $U \cap V$ für $0 < i < n$.

Weil $U \cap V$ wegzusammenhängend ist, gibt es einen Pfad γ_i in $U \cap V$ von x_0 nach $\alpha(a_i)$. Mit Hilfe der Komposition einer geeigneten Reparametrisierung von $[0, 1]$ nach $[a_i, a_{i+1}]$, schreibe α_i für $\alpha_{\restriction [a_i, a_{i+1}]}$ (als Kurve von $[0, 1]$ nach X!). Klarerweise ist

$$\alpha \sim \alpha_0 \star \alpha_1 \star \cdots \star \alpha_{n-1}.$$

Weil $\overline{\gamma_i} \star \gamma_i \sim \mathrm{C}_{x_0}$ das neutrale Element in $\pi(X, x_0)$ ist, gilt

$$\alpha \sim \alpha_0 \star \alpha_1 \star \cdots \star \alpha_{n-1} \sim (\alpha_0 \star \overline{\gamma_1}) \star (\gamma_1 \star \alpha_1 \star \overline{\gamma_2}) \star \cdots \star (\gamma_{n-2} \star \alpha_{n-2} \star \overline{\gamma_{n-1}}) \star (\gamma_{n-1} \star \alpha_{n-1})$$



Aus der Konstruktion läuft jede Teilschleife $(\alpha_0 \star \overline{\gamma}_1), (\gamma_1 \star \alpha_1 \star \overline{\gamma_2}), \cdots, (\gamma_{n-1} \star \alpha_{n-1})$ im obigen Produkt ganz in U oder ganz in V und ist daher zusammenziehbar, wegen unserer Annahme.

Insbesondere ist $\alpha \sim \mathrm{C}_{x_0}$, wie gewünscht und somit X einfach zusammenhängend. $\square$

Bemerkung 5.16. Der Beweis zeigt, dass wenn $X = U \cup V$ und x_0 in der wegzusammenhängenden Menge $U \cap V$ liegt, die Gruppe $\pi_1(X, x_0)$ von den Bildern von $\pi_1(U, x_0)$ und $\pi_1(V, x_0)$ unter den Abbildungen $\boldsymbol{i}_{U\star}$ und $\boldsymbol{i}_{V\star}$ erzeugt wird.

Korollar 5.17. *Für jedes $n \geq 2$ ist $\mathbb{S}^n$ einfach zusammenhängend.*

Beweis. Wähle zwei verschiedene Punkte P und Q aus $\mathbb{S}^n$, welche wir als Nord- und Südpol bezeichnen (wobei es ab $n \geq 3$ keine Bedeutung hat). Die Sphäre ist die Vereinigung der Mengen $U = \mathbb{S}^n \setminus \{P\}$ und $V = \mathbb{S}^n \setminus \{Q\}$, welche offen sind, weil $\mathbb{S}^n$ Hausdorff (also T_1) ist.

Mit Hilfe einer geeigneten stereographischen Projektion (siehe Beispiel 4.34) sind U und V jeweils homöomorph zu $\mathbb{R}^n$, welcher konvex ist und somit einfach zusammenhängend wegen Beispiel 5.5. Weil $U \cap V$ homöomorph zum perforierten Raum $\mathbb{R}^n \setminus \{\text{Punkt}\}$ ist, folgt aus der Bemerkung 3.18, dass $U \cap V$ wegzusammenhängend ist. Der Satz 5.15 liefert nun, dass $\mathbb{S}^n$ einfach zusammenhängend ist. $\square$

Aufgabe. Wo wurde verwendet, dass $n \geq 2$? Können wir schließen, dass $\mathbb{S}^1$ einfach zusammenhängend ist?

Bemerkung 5.18. Poincares Vermutung besagt, dass jede abgeschlossene einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeit der Dimension 3 homöomorph zu $\mathbb{S}^3$ ist. Sie wurde im Jahr 2002 vom russischen Mathematiker Perelman positiv beantwortet. Für diese Arbeit erhielt er sowohl die Fields-Medaille im Jahr 2006 als auch den Millenium-Preis der Clay Stiftung im Jahr 2010 in einer Höhe von einer Million US-Dollar. Er lehnte beides ab.

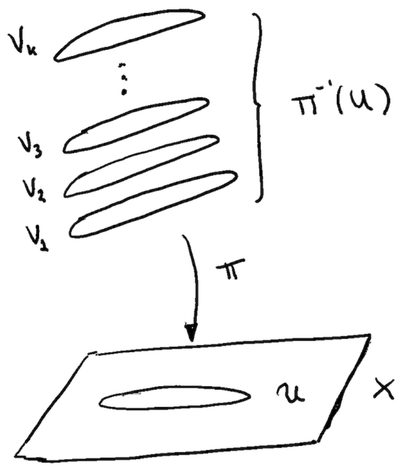
5.2 Umlaufzahl einer Schleife und Überlagerungen

Definition 5.19. Eine *Überlagerung* des topologischen Raumes $(X, \mathcal{T})$ ist ein topologischer Raum $\tilde{X}$ zusammen mit einer stetigen Surjektion $\pi : \tilde{X} \to X$ derart, dass es für jedes x in X eine (nicht-leere) Indexmenge I_x und eine Umgebung $U = U^x$ so gibt, dass:

- Das Urbild
$$\pi^{-1}(U) = \dot{\bigcup_{i \in I_x}} V_i$$
eine disjunkte Vereinigung offener Teilmengen V_i von $\tilde{X}$ für i aus I_x ist.
- Die Einschränkung $\pi_{\restriction V_i} : V_i \to U$ ein Homöomorphismus (mit den Spurtopologien) ist.

Die Überlagerung ist *universell*, wenn der Raum $\tilde{X}$ einfach zusammenhängend ist.

Eine Überlagerung bedeutet, dass wir auf jeden Punkt von X einen lokalen Homöomorphismus finden, allerdings mit mehreren Kopien V_i in $\tilde{X}$, wie im folgenden Bild zu sehen:



Beispiel 5.20. Die Abbildung
$$\begin{array}{rccc} \pi : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{S}^1 \\ & \theta & \mapsto & (\cos 2\pi\theta, \sin 2\pi\theta) \end{array}$$
ist eine universelle Überlagerung des Einheitskreises $\mathbb{S}^1$: Für ein kleines Kreissegment U (der Länge $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$) um den Punkt $x_0 = (cos 2\pi\theta_0, \sin 2\pi\theta_0)$ ist das Urbild
$$\pi^{-1}(U) = \dot{\bigcup_{n \in \mathbb{Z}}} (\theta - \epsilon + n, \theta + \epsilon + n).$$
Ferner ist die obige Abbildung eingeschränkt auf jedem offenen Intervall $(\theta - \epsilon + n, \theta + \epsilon + n)$ ein Homömorphismus mit U.

Beispiel 5.21. (Das triviale Produkt) Sei I ein nicht-leerer diskreter topologischer Raum. Gegeben einen topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$, setze $\tilde{X} = X \times I$ mit der Produkttopologie. Die Abbildung
$$\begin{array}{rccc} \pi : & \tilde{X} & \to & X \\ & (x, i) & \mapsto & x \end{array}$$
ist eine stetige Surjektion und definiert eine *triviale* Überlagerung: Für den Punkt x sei U die Umgebung X selbst. Es ist
$$\pi^{-1}(U) = \dot{\bigcup_{i \in I}} X \times \{i\},$$
wobei jede Menge $X \times \{i\}$ offen und durch $\pi_{\restriction X \times \{i\}}$ homöomorph zu X ist.

In einer Überlagerung lassen sich Schleifen und Homotopien hochheben.

Proposition 5.22. *Sei $\pi : \tilde{X} \to X$ eine Überlagerung und x_0 ein Punkt in X sowie p ein Urbild in $\pi^{-1}(x_0)$. Jede Schleife α aus $\Omega_{x_0}^X$ lässt sich eindeutig auf $\tilde{X}$* hochheben (oder liften), *das heißt, es gibt eine eindeutige stetige Kurve $\widetilde{\alpha} : [0,1] \to \tilde{X}$ mit*

- $\widetilde{\alpha}(0) = p$
- $\pi \circ \widetilde{\alpha}(t) = \alpha(t)$ *für alle t in $[0,1]$.*

Wenn die Schleife α durch die Homotopie $H : [0,1] \times [0,1] \to X$ homotop zu β ist, dann gibt es genau einen Lift von H zu einer Homotopie

$$\widetilde{H} : [0,1] \times [0,1] \to \tilde{X} \text{ mit } \pi \circ \widetilde{H} = H$$

vom Lift $\widetilde{\alpha}$ zum Lift $\widetilde{\beta}$ derart, dass $\widetilde{H}(s,0) = p$ für alle s in $[0,1]$. Insbesondere ist $\widetilde{\alpha}(1) = \widetilde{\beta}(1)$.

Beweis. **Existenz von $\widetilde{\alpha}$:** Für jedes t aus $[0,1]$ wähle eine geeignete Umgebung $U^{\alpha(t)}$ wie in der Definition einer Überlagerung. Die Mengen $\alpha^{-1}(U^{\alpha(t)})$ sind offen, also sei $\delta > 0$ die Lebesguezahl der offenen Überdeckung

$$[0,1] = \bigcup_{t\in[0,1]} \alpha^{-1}(U^{\alpha(t)}).$$

Wie im Beweis des Satzes 5.15 finden wir eine Zerlegung $0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = 1$ derart, dass $\alpha([a_i, a_{i+1}])$ in einem $U^{\alpha(t)}$ liegt (es gibt also nur endlich viele solche Umgebungen $U_0, \ldots, U_{n-1}$, welche in Frage kommen). Weil $x_0 = \alpha(0)$ in U_0 liegt, ist das Element p in einer einzigen homöomorphen Kopie V_{i_0} von U_0. Betrachte die Kurve $\alpha_0 = \alpha_{\restriction[a_0,a_1]}$ und sei $\widetilde{\alpha}_0$ die entsprechende Kurve auf V_{i_0} mit Anfangspunkt p. Das Element $\widetilde{\alpha}_0(1)$ liegt in der Faser vom Element $\alpha(a_1)$ bezüglich dem Urbild $\pi^{-1}(U_1)$, also liegt es in einer einzigen homöomorphen Kopie V_{i_1} (Achtung, die Indexmengen $I_{\alpha(0)}$ und $I_{\alpha(a_1)}$ müssen nicht gleich sein!). Wir konstruieren eine Kurve $\widetilde{\alpha}_1$ mit Anfangspunkt $\widetilde{\alpha}_0(1)$. Durch Iterieren dieses Verfahrens konstruiren wir eine Abbildung

$$\widetilde{\alpha} = \begin{cases} \widetilde{\alpha}_0(t), & \text{für } 0 \leq t \leq a_1 \\ \widetilde{\alpha}_1(t), & \text{für } a_1 \leq t \leq a_2 \\ \quad\vdots & \\ \widetilde{\alpha}_{n-1}(t), & \text{für } a_{n-1} \leq t \leq 1 \end{cases},$$

welche wegen dem dem Verklebungslemma 2.14 stetig ist, Anfangspunkt p hat und $\pi(\widetilde{\alpha}(t)) = \alpha(t)$ für jedes t aus $[0,1]$ erfüllt.

Eindeutigkeit von $\widetilde{\alpha}$: Angenommen $\widetilde{\alpha}_1$ und $\widetilde{\alpha}_2$ sind zwei Lifts von α mit selbem Anfangspunkt p. Setze

$$\begin{aligned} W_{\neq} &= \{t \in [0,1] \mid \widetilde{\alpha}_1(t) \neq \widetilde{\alpha}_2(t)\} \\ W_{=} &= \{t \in [0,1] \mid \widetilde{\alpha}_1(t) = \widetilde{\alpha}_2(t)\} \end{aligned}$$

Das Intervall $[0,1]$ ist die Vereinigung $W_{\neq} \cup W_{=}$. Beachte, dass $W_{\neq}$ offen ist: Wenn $\widetilde{\alpha}_1(t_0) \neq \widetilde{\alpha}_2(t_0)$, dann liegen diese Punkte in verschiedenen offenen Teilmengen V_{i_1} und V_{i_2} des Urbilds $\pi^{-1}(U^{\alpha(t_0)})$, wobei $U^{\alpha(t_0)}$ wie in der Definition einer Überlagerung eine geeignete offene Umgebung von $\alpha(t_0)$ sei. Insbesondere ist

$$t_0 \in \widetilde{\alpha}_1^{-1}(V_{i_1}) \cap \widetilde{\alpha}_2^{-1}(V_{i_2}) \subset W_{\neq}$$

und somit $W_{\neq}$ offen. Weil $W_{=}$ nicht leer ist, (denn $\widetilde{\alpha}_1(0) = p = \widetilde{\alpha}_2(0)$), genügt es zu zeigen, dass $W_{=}$ offen ist und somit $W_{\neq} = \emptyset$, da $[0,1]$ zusammenhängend ist. Sei also t_0 in $W_{=}$ und $U = U^{\alpha(t_0)}$ eine geeignete Umgebung für die Überlagerung. Das Element t_0 liegt in der offenen Menge $\widetilde{\alpha}_1^{-1}(V_i) \cap \widetilde{\alpha}_2^{-1}(V_i)$ für eine homöomorphe Kopie V_i von U. Wenn z in diesem Durchschnitt liegt, sind $\widetilde{\alpha}_1(z)$ und $\widetilde{\alpha}_2(z)$ zwei Urbilder von $\alpha(z)$ bezüglich π, welche in derselben Menge V_i liegen. Da V_i und U homöomorph durch $\pi_{\restriction V_i}$ sind, folgt $\widetilde{\alpha}_1(z) = \widetilde{\alpha}_2(z)$ und somit

$$t_0 \in \widetilde{\alpha}_1^{-1}(V_i) \cap \widetilde{\alpha}_2^{-1}(V_i) \subset W_{=},$$

wie gewünscht.

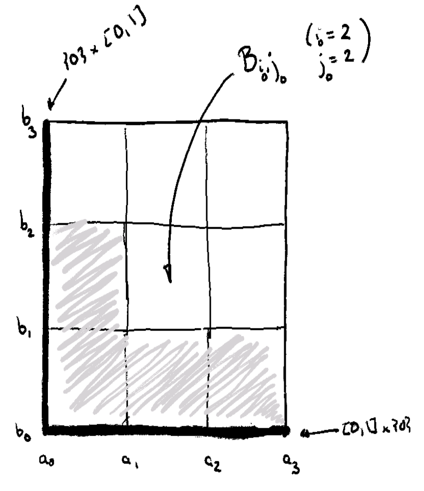
Die Eindeutigkeit von $\widetilde{H}$ lässt sich analog zeigen, weil $[0,1] \times [0,1]$ wegen Satz 3.12 wiederum zusammenhängend ist. Also beweisen wir nur die **Existenz von** $\widetilde{H}$: Wie im ersten Teil finden wir Zerlegungen $0 = a_0 < \ldots < a_n = 1$ und $0 = b_0 < \ldots < b_m = 1$ von $[0,1]$ derart, dass jede Box

$$B_{ij} = [a_i, a_{i+1}] \times [b_j, b_{j+1}], \text{ mit } 0 \leq i \leq n-1 \text{ und } 0 \leq j \leq m-1$$

in einer geeigneten offenen Umgebung bezüglich der Überdeckung liegt. Insbesondere müssen wir nur endlich viele solche Umgebungen

$$(U_{ij})_{\substack{0 \leq i \leq n-1 \\ 0 \leq j \leq m-1}}$$

betrachten. Wir müssen die Abbildung $\widetilde{H}$ schrittweise auf jeder Box definieren. Angenommen wir haben die Abbildung $\widetilde{H}$ bereits auf $[0,1] \times \{0\}$ als die Konstantenabbildung p und auf $\{0\} \times [0,1]$ als $\widetilde{\alpha}$ sowie auf jeder Box B_{ij} mit $j < j_0$ oder $j = j_0$ und $i < i_0$ definiert, wie im folgenden Bild:



Setze

$$A = (\{0\} \times [0,1]) \cup ([0,1] \times \{0\}) \cup \bigcup_{\substack{j<j_0 \text{ oder} \\ j=j_0,\, i<i_0}} B_{ij}.$$

Beachte, dass $\widetilde{H}_{\restriction A}$ stetig ist (mit der Spurtopologie auf A). Ferner ist $H(B_{i_0 j_0}) \subset U_{i_0 j_0}$ und $\pi^{-1}(U_{i_0 j_0})$ eine disjunkte Vereinigung offener Mengen V_r (mit r aus einer gewissen Indexmenge $\mathcal{R}$). Die Abbildung $\widetilde{H}$ ist bereits auf der Menge $A \cap B_{i_0 j_0} = [a_{i_0}, a_{i_0+1}] \times [b_{j_0}, b_{j_0+1}]$ definiert, welche zusammenhängend ist. Da $\pi \circ (\widetilde{H}_{\restriction A}) = H_{\restriction A}$, muss das Bild $\widetilde{H}(A \cap B_{i_0 j_0})$ in einer einzigen offenen Menge V_r liegen. Weil V_r und $U_{i_0 j_0}$ durch π homöomorph sind, können wir $\widetilde{H}$ auf $B_{i_0 j_0}$ folgenderweise fortsetzen:

$$\widetilde{H}(s,t) = (\pi_{\restriction V_r})^{-1}(H(s,t)).$$

Wegen dem Verklebungslemma 2.14 ist $\widetilde{H}$ stetig auf $A \cup B_{i_0 j_0}$. Durch Iterieren dieses Verfahrens lässt sich $\widetilde{H}$ auf dem gesamten Raum $[0,1] \times [0,1]$ so definieren, dass für alle $0 \leq s, t \leq 1$:

- $\widetilde{H}(s,0) = p$ und $\widetilde{H}(0,t) = \widetilde{\alpha}(t)$
- $\pi \circ \widetilde{H}(s,t) = H(s,t)$.

Insbesondere ist $\pi(\widetilde{H}(1,t)) = H(1,t) = \beta(t)$ und $\widetilde{H}(1,0) = p$. Wegen der Eindeutigkeit des Liftes $\widetilde{\beta}$ von β mit Anfangspunkt p, folgt $\widetilde{H}(1,t) = \widetilde{\beta}(t)$ für alle $0 \leq t \leq 1$.

Wir müssen noch zeigen, dass $\widetilde{H}(s,1)$ konstant ist, um schließen zu können, dass $\widetilde{H}$ eine Homotopie ist. Da $x_0 = H(s,1)$ für alle s in $[0,1]$, gilt $\widetilde{H}([0,1] \times \{1\}) \subset \pi^{-1}(\{x_0\})$. Die Faser ist eine Kollektion von einzeln Punkten in disjunkten offenen Mengen. Weil $[0,1] \times \{1\}$ zusammenhängend ist, folgt, dass das Bild konstant sein muss (aber nicht unbedingt das Element p!). Insbesondere gilt

$$\widetilde{\alpha}(1) = \widetilde{H}(0,1) = \widetilde{H}(1,1) = \widetilde{\beta}(1).$$

$\square$

Korollar 5.23. *In der Überlagerung $\pi : \tilde{X} \to X$ sei x_0 ein Punkt in X und p in $\tilde{X}$ ein Urbild, das heißt, $\pi(p) = x_0$. Es gibt eine wohldefinierte Abbildung*

$$\begin{aligned} \Psi : \quad \pi_1(X, x_0) &\to \pi^{-1}(x_0) \\ [\alpha] &\mapsto \widetilde{\alpha}(1), \quad \textit{wobei } \widetilde{\alpha} \textit{ ein Lift von } \alpha \textit{ mit Anfangspunkt } p \textit{ ist.} \end{aligned}$$

Die Abbildung Ψ ist surjektiv, wenn $\tilde{X}$ wegzusammenhängend ist. Des Weiteren ist Ψ bijektiv, wenn die Überlagerung universell ist, das heißt, wenn $\tilde{X}$ einfach zusammenhängend ist.

Obwohl die Menge $\pi_1(X, x_0)$ eine Gruppe ist, muss die Faser $\pi^{-1}(x_0)$ kein kanonisches Gruppengesetz haben. Jedoch können wir die Verknüpfung von $\pi(X, x_0)$ auf die Menge $\pi^{-1}(x_0)$ übertragen, wenn Ψ eine Bijektion ist.

Beweis. Aus der Proposition 5.22 folgt, dass Ψ nicht vom Repräsentanten der Homotopieklasse abhängt. Beachte auch, dass $\widetilde{\alpha}(1)$ in der Faser $\pi^{-1}(x_0)$ liegt.

Sei q ein Element aus der Faser $\pi^{-1}(x_0)$. Wenn $\tilde{X}$ wegzusammenhängend ist, gibt es einen Pfad $\widetilde{\gamma}$ von p nach q. Die Abbildung $\gamma = \pi \circ \widetilde{\gamma}$ ist eine Schleife auf x_0 in X und aus der Konstruktion ist ihr eindeutiger Lift gerade der Pfad $\widetilde{\gamma}$, also

$$\Psi([\gamma]) = \widetilde{\gamma}(1) = q,$$

wie gewünscht.

Wenn $\tilde{X}$ einfach zusammenhängend ist, wir müssen nur zeigen, dass Ψ injektiv ist, das heißt, gegeben zwei Schleifen α und β auf x_0 mit $\widetilde{\alpha}(1) = \widetilde{\beta}(1)$ sollen α und β homotop sein. Nun haben die Pfade $\widetilde{\alpha}$ und $\widetilde{\beta}$ in $\tilde{X}$ denselben Anfangspunkt und denselben Endpunkt. Insbesondere ist die Schleife

$$\widetilde{\alpha} \star \overline{(\widetilde{\beta})}$$

auf p zusammenziehbar, weil $\pi_1(\tilde{X}, p)$ trivial ist. Wegen Bemerkung 5.14 gibt es eine Homotopie $\tilde{H}$ zwischen $\widetilde{\alpha}$ und $\widetilde{\beta}$. Die Komposition mit π liefert eine Homotopie zwischen α und β, wie gewünscht. $\square$

Im Beispiel 5.20 haben wir eine universelle Überlagerung des Einheitskreises eingeführt. Insbesondere ist auf jedem Punkt x_0 aus $\mathbb{S}^1$ die Faser $\pi^{-1}(x_0)$ in Bijektion mit der Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen. Mit Hilfe der Umlaufzahl einer Schleife (intuitiv soll diese Zahl als die Anzahl von Umläufen interpretiert werden) können wir sogar einen Gruppenisomorphismus definieren.

Korollar 5.24. *(Umlaufzahl einer Schleife) Zu jeder Schleife α auf $(1,0)$ gibt es eine eindeutige ganze Zahl k_α (genannt die* Umlaufzahl *der Schleife α) derart, dass die Abbildung:*

$$\begin{array}{rccl} \Psi: & \pi_1(\mathbb{S}^1,(1,0)) & \to & \mathbb{Z} \\ & [\alpha] & \mapsto & k_\alpha \end{array}$$

einen Gruppenisomorphismus definiert. Insbesondere ist die Klasse der Schleife

$$\begin{array}{rccl} \beta: & [0,1] & \to & \mathbb{S}^1 \\ & t & \mapsto & (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t) \end{array}$$

ein erzeugendes Element der Gruppe $\pi_1(\mathbb{S}^1,(1,0))$. Für jeden Punkt x_0 auf $\mathbb{S}^1$ ist die Gruppe $\pi_1(\mathbb{S}^1, x_0)$ isomorph zu $(\mathbb{Z},+)$.

Der Raum $\mathbb{S}^1$ mit der Spurtopologie ist nicht einfach zusammenhängend.

Beweis. Weil $\mathbb{S}^1$ wegzusammenhängend ist, genügt es wegen Lemma 5.9 zu zeigen, dass die Gruppe $\pi_1(\mathbb{S}^1,(1,0))$ isomorph zu $(\mathbb{Z},+)$ ist. Bezüglich der universellen Überlagerung

$$\begin{array}{rccc} \pi: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{S}^1 \\ & \theta & \mapsto & (\cos 2\pi\theta, \sin 2\pi\theta) \end{array}$$

ist die Menge $\pi^{-1}((1,0))$ gleich $\mathbb{Z}$. Korollar 5.23 liefert nun eine Abbildung

$$\begin{array}{rccll} \Psi: & \pi_1(\mathbb{S}^1,(1,0)) & \to & \mathbb{Z} & \\ & [\alpha] & \mapsto & \widetilde{\alpha}(1), & \text{wobei } \widetilde{\alpha} \text{ ein Lift von } \alpha \text{ mit} \\ & & & & \text{Anfangspunkt 0 ist.} \end{array}$$

Weil Ψ bijektiv ist, müssen wir nur zeigen, dass Ψ einen Gruppenhomomorphismus ist:

$$\Psi([\alpha_1] \star [\alpha_2]) = \Psi([\alpha_1]) + \Psi([\alpha_2]).$$

Seien $\widetilde{\alpha}_1$ und $\widetilde{\alpha}_2$ die eindeutigen Lifts von α_1 und α_2 mit Anfangspunkt 0 sowie den Umlaufzahlen $n = \widetilde{\alpha}_1(1)$ und $m = \widetilde{\alpha}_2(1)$. Setze nun $\widetilde{\gamma}(t) = n + \widetilde{\alpha}_2(t)$. Wegen $\widetilde{\gamma}(0) = n = \widetilde{\alpha}_1(1)$ ist die Verknüpfung $\widetilde{\alpha}_1 \star \widetilde{\gamma}$ wohldefiniert und liefert einen Pfad von 0 nach $n+m$. Mit Hilfe der trigonometrischen Identitäten lässt sich leicht zeigen, dass $\widetilde{\alpha}_1 \star \widetilde{\gamma}$ der eindeutige Lift der Schleife $\alpha_1 \star \alpha_2$ mit Anfangspunkt 0 ist. Insbesondere gilt

$$\Psi([\alpha_1] \star [\alpha_2]) = \Psi([\alpha_1 \star \alpha_2]) = \big(\widetilde{\alpha}_1 \star \widetilde{\gamma}\big)(1) = n + m = \Psi([\alpha_1]) + \Psi([\alpha_2]),$$

wie gewünscht.

Beachte, dass $\psi([\beta]) = 1$ und somit $[\beta]$ ist ein erzeugendes Element der Gruppe $\pi_1(\mathbb{S}^1,(1,0))$ ist. $\square$

Aufgabe. Ist der *topologischer Torus* $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ wegzusammenhängend? Ist er einfach zusammenhängend? Sind $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ und $\mathbb{S}^2$ homöomorph?

5.3 Freie Produkte von Gruppen

Definition 5.25. Eine (linke) *Gruppenwirkung* von G auf einer nicht-leeren Menge X ist eine binäre Operation $* : G \times X \to X$ mit folgenden Eigenschaften:

- $1_G * x = x$ für alle x aus X.
- $(g \cdot h) * x = g * (h * x)$ für alle g und h aus G sowie x aus X.

Beachte, dass $g^{-1} * y = x$, falls $g * x = y$.

Bemerkung 5.26. Die Existenz einer Gruppenwirkung von G auf X ist also äquivalent dazu, dass wir einen Gruppenhomomorphismus $F : G \to \mathrm{Sym}(X)$ haben, wobei $\mathrm{Sym}(X)$ die Gruppe aller Bijektionen $X \to X$ bezüglich Komposition ist. In der Tat, wenn F so ein Homomorphismus ist, setze $g * x = F(g)(x)$. Nun ist $F(1_g) = \mathrm{Id}_X$ also $1_G * x = x$. Ferner ist

$$(g \cdot h) * x = F(g \cdot h)(x) = \big(F(g) \circ F(h)\big)(x) = F(g)\big(F(h)(x)\big) = F(g)(h * x) = g * (h * x).$$

Gegeben nun eine Gruppenwirkung $* : G \times X \to X$, betrachte für g aus G die Abbildung

$$\begin{array}{rccc} F(g) : & X & \to & X \\ & x & \mapsto & g * x \end{array}$$

Beachte zuerst, dass $F(g)$ eine Bijektion ist: die Abbildung $F(g)$ ist klarerweise injektiv, denn $g \star x = F(g)(x) = F(g)(x') = g \star x'$ impliziert, dass

$$x = 1_G \star x = (g^{-1} \cdot g) \star x = g^{-1} \star (g \star x) = g^{-1} \star (g \star x') = (g^{-1} \cdot g) \star x' = 1_G \star x' = x'.$$

Des Weiteren ist ein Urbild des Elementen y aus X durch $F(g)$ gleich $g^{-1} \star y$, so $F(g)$ ist surjektiv und somit eine Bijektion. Es folgt direkt aus der Definition 5.25, dass $F(g \cdot h) = F(g) \circ F(h)$. Somit ist F ein Gruppenhomomorphismus von G nach $\mathrm{Sym}(X)$.

Wir können auch *rechte Gruppenwirkungen* definieren als binäre Operationen $* : X \times G \to X$ mit den Eigenschaften:

- $x * 1_G = x$ für alle x aus X.
- $x * (g \cdot h) = (x * g) * h$ für alle g und h aus G sowie x aus X.

Dies ist äquivalent dazu, dass wir Homomorphismen von der Gruppe G nach der Gruppe $\mathrm{Sym}(X)^{\mathrm{op}}$ betrachten, deren Grundmenge die Kollektion aller Permutationen auf X ist mit Gruppengesetz $f * g = g \circ f$. Alle Begriffe und Aussagen in diesem Abschnitt lassen sich auf rechte Gruppenwirkungen verallgemeinern.

Definition 5.27. Die Wirkung ist

- *trivial*, wenn $g * x = x$ für jedes g aus G und jedes x aus X;

- *treu*, wenn 1_G das einzige Element in $\bigcap_{x \in X} \mathrm{Stab}(x)$ ist, wobei

$$\mathrm{Stab}(x) = \bigcap_{x \in X} \{g \in G \mid g * x = x\}.$$

Korollar 5.28. *Eine Wirkung von G auf X ist genau dann treu, wenn der entsprechende Gruppenhomomorphismus $F : G \to \mathrm{Sym}(X)$ injektiv ist.*

Beweis. Aus der Bemerkung 5.26 sei $F : G \to \mathrm{Sym}(X)$ der Gruppenhomomorphismus bezüglich der Wirkung von G auf X mit

$$F(g) : \begin{array}{ccc} X & \to & X \\ x & \mapsto & g * x \end{array}.$$

Wir zeigen zuerst, dass die Abbildung F injektiv ist, d.h. $\mathrm{Ker}(F) = \{1_G\}$, wenn die Wirkung treu ist. Wenn g aus G im Kern von F liegt, so ist $F(g)$ die Identitätsabbildung auf X, so $g \star x = F(g)(x) = x$ für jedes x aus X. Das bedeutet, dass g in $\mathrm{Stab}(x)$ für jedes x aus X liegt, so $g = 1_G$, weil die Wirkung treu ist.

Für die Rückrichtung, wenn F injektiv ist, sei nun g aus G, welches jeden Punkt x aus X stabilisiert. Insbesondere ist $F(g) = \mathrm{Id}_X$, so g liegt im $\mathrm{Ker}(F) = \{1_G\}$. Es folgt also, dass die Wirkung treu ist. □

Im Rest dieser Abschnitt fixieren wir zwei Gruppen G_1 und G_2.

Definition 5.29. Ein *Wort* ist eine endliche formale Folge $v = v_1 \cdots v_n$, wobei jedes v_i in G_1 oder G_2 liegt. Das *leere Wort* v_0 ist die leere Folge.

Das Wort v ist in *normaler Form*, falls $v = v_0$ das leere Wort ist oder $v = v_1 \cdots v_n$ mit jedem v_i nicht-trivial und je zwei benachbarten Elementen in verschiedenen Gruppen liegen.

Jedes Wort lässt sich in normale Form bringen (obwohl wir noch nicht wissen, ob die Darstellung eindeutig ist). Das normale Wort assoziiert zu den Folgen 1_{G_1} oder 1_{G_2} ist das leere Wort.

Lemma 5.30. *Jede der Gruppen G_i wirkt treu auf der Menge $\mathcal{W}$ aller Wörter in normaler Form. Insbesondere lässt sich jedes G_i als Untergruppe von $\mathrm{Sym}(\mathcal{W})$ einbetten.*

Beweis. Wir beweisen es für G_1 aber der Beweis lässt sich analog für G_2 durchführen. Gegeben ein Element g aus G und ein Wort v aus $\mathcal{W}$ in normaler Form, setze nun

$$g * v = \begin{cases} g, \text{ falls } v = v_0 \text{ das leere Wort ist;} \\ (g \cdot v_1) \cdot v_2 \cdots v_n, \text{ falls } v \text{ nicht leer aber } v_1 \text{ aus } G_1 \text{ kommt;} \\ g \cdot v_1 \cdots v_n, \text{ sonst.} \end{cases}$$

Es lässt sich leicht zeigen, dass diese Operation eine Wirkung definiert. Die Wirkung ist treu, denn $\mathrm{Stab}(v_0) = 1_{G_1}$. □

Aus den Obigen identifizieren wir das Element g aus G_1 (bzw. aus G_2) mit der Permutation φ_g auf $\mathcal{W}$.

Definition 5.31. Das *freie Produkt* $G_1 \star G_2$ der Gruppen G_1 und G_2 ist die Untergruppe von $\mathrm{Sym}(\mathcal{W})$, welche von den Permutationen $\{\varphi_g\}_{g \in G_1 \cup G_2}$ erzeugt wird.

Proposition 5.32. *Die Menge $G_1 \star G_2$ ist in Bijektion mit $\mathcal{W}$. Jedes Element g aus $G_1 \star G_2$ lässt sich eindeutig schreiben als eine Komposition $\varphi_{v_1} \circ \cdots \circ \varphi_{v_n}$, wobei das Wort $v_1 \cdots v_n$ in normaler Form ist.*

Beweis. Gegeben ein Wort $v = v_1 \cdots v_n$ in normaler Form, beachte, dass

$$\varphi_{v_1} \circ \cdots \circ \varphi_{v_n}(v_0) = v_1 \cdots v_n = v.$$

Nun lässt sich jedes Element aus $G_1 \star G_2$ als eine Komposition $\varphi_{v_1} \circ \cdots \circ \varphi_{v_n}$ schreiben, wobei das Wort $v = v_1 \cdots v_n$ in normaler Form ist (die triviale Permutation $\mathrm{Id}_{\mathcal{W}}$ hat als normale Form das leere Wort v_0). $\square$

Mit Hilfe der Bijektion aus der Proposition 5.32 können wir eine Verknüpfung auf $\mathcal{W}$ so definieren, dass $\mathcal{W}$ eine Gruppe bildet. Wir werden häufig das freie Produkt $G_1 \star G_2$ als Gruppe mit der Menge der Wörter in normaler Form und mit dem entsprechenden Gruppengesetz identifizieren.

Satz 5.33. *(Der Satz von Seifert-van Kampen) Lässt sich der topologische Raum $(X, \mathcal{T})$ als Vereinigung $X = U \cup V$ zweier offener wegzusammenhängender Mengen U und V mit $\emptyset \neq U \cap V$ einfach zusammenhängend schreiben, dann ist X wegzusammenhängend und für x_0 aus X so ist die Fundamentalgruppe $\pi(X, x_0)$ isomorph zum freien Produkt $\pi(U, x_0) \star \pi(V, x_0)$.*

Beweis. Klarerweise ist X wegzusammenhängend, da sich jeder Punkt aus X zum festen Punkt x_0 aus $U \cap V$ verbinden lässt. Da U offen in X ist, folgt aus der Proposition 5.10, dass die Inklusionsabbildung $\boldsymbol{i}_U$ einen Gruppenhomomorphismus $(\boldsymbol{i}_U)_\star : \pi_1(U, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$ definiert. Analog ist $(\boldsymbol{i}_V)_\star : \pi_1(V, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$ einen Gruppenhomomorphimus. Aus der Identifikation des freien Produktes mit normalen Wörtern bekommen wir einen Gruppenhomomorphismus $\Phi : \pi_1(U, x_0) \star \pi_1(V, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$.

Der Beweis vom Satz 5.15 zeigt, dass jede Schleife α auf x_0 homotopieäquivalent zu

$$\alpha \sim \alpha_0 \star \alpha_1 \star \cdots \star \alpha_{n-1} \sim (\alpha_0 \star \overline{\gamma_1}) \star (\gamma_1 \star \alpha_1 \star \overline{\gamma_2}) \star \cdots \star (\gamma_{n-2} \star \alpha_{n-2} \star \overline{\gamma_{n-1}}) \star (\gamma_{n-1} \star \alpha_{n-1})$$

ist, wobei jede Teilschleife $(\alpha_0 \star \overline{\gamma}_1), (\gamma_1 \star \alpha_1 \star \overline{\gamma_2}), \cdots, (\gamma_{n-1} \star \alpha_{n-1})$ im obigen Produkt ganz in U oder ganz in V liegt. Insbesondere ist Φ surjektiv.

Wir müssen also nur noch zeigen, dass Φ injektiv ist. Sei g ein Element aus $\pi_1(U, x_0) \star \pi_1(V, x_0)$ mit $\Phi(g)$ homotopieäquivalent zum neutralen Element C_{x_0} aus $\pi_1(X, x_0)$. Wir müssen zeigen, dass g das triviale Element aus dem freien Produkt $\pi_1(U, x_0) \star \pi_1(V, x_0)$ ist. Aus der Proposition 5.32 lässt sich das Element g bezüglich der normalen Form $g_1 \cdots g_n$ schreiben, wobei jedes g_i eine Schleife auf x_0 ganz in U oder ganz in V ist. Die entsprechende Schleife $\Phi(g)$ auf x_0 in X ist homotopieäquivalent zum konstanten Pfad C_{x_0} durch die Homotopie $H : [0,1] \times [0,1] \to X$. Wie im Beweis der Proposition 5.22 können wir die Menge $[0,1] \times [0,1]$ in Boxen $B_{ij} = [a_i, a_{i+1}] \times [b_j, b_{j+1}]$ so zerlegen, dass $H(B_{ij})$ ganz in U oder ganz in V enthalten ist. Wir können also ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass das Wort $g_1 \cdots g_n$ in normaler Form so ist, dass jedes g_i die Einschränkung auf einem Teilintervall $[b_j, b_{j+1}]$ ist. $\square$

5.4 Retrakte und Anwendungen

Retrakte kamen bereits in der Definition 2.24 vor: Ein Retrakt eines topologischen Raumes $(X, \mathcal{T})$ ist eine Teilmenge $A \subset X$ zusammen mit einer Abbildung $r : X \to A$ derart, dass r stetig (bezüglich der Spurtopologie auf A) ist und $r(a) = a$ für alle a aus A gilt, oder äquivalent dazu $r \circ \boldsymbol{i}_A = \mathrm{Id}_A$, wobei $\boldsymbol{i}_A$ die Inklusionsabbildung ist (siehe Beispiel 2.9). Wir führen nun einen stärkeren Begriff ein:

Definition 5.34. Ein Retrakt $r : X \to A$ ist ein *Deformationsretrakt*, falls die Abbildung $\boldsymbol{i}_A \circ r$ *homotopieäquivalent zu* Id_X *bezüglich* A ist, das heißt, es gibt eine stetige Abbildung $H : X \times [0,1] \to X$ (bezüglich der Produkttopologie auf $X \times [0,1]$) mit:

- $H(a,t) = a$ für alle t aus $[0,1]$ und a aus A.
- $H(x,0) = x$ und $H(x,1) = \boldsymbol{i}_A \circ r(x)$ für alle x aus X.

Proposition 5.35. *Sei $r : X \to A$ ein Retrakt und a_0 ein fester Punk aus A. Die Abbildung $\boldsymbol{i}_{A\star} : \pi_1(A, a_0) \to \pi_1(X, a_0)$ ist ein Gruppenmonomorphismus.*

Ferner ist diese Abbildung ein Gruppenisomorphismus, wenn A ein Deformationsretrakt von X ist.

Beweis. Aus Proposition 5.10 folgt $r_\star \circ \boldsymbol{i}_{A\star} = (\mathrm{Id}_A)_\star = \mathrm{Id}_{\pi_1(A,a_0)}$. Insbesondere ist $\boldsymbol{i}_{A\star}$ injektiv (und $r_\star$ surjektiv).

Wenn r ein Deformationsretrakt ist, müssen wir nur noch zeigen, dass $\boldsymbol{i}_{A\star} \circ r_\star = (\mathrm{Id}_X)_\star$, weil $(\mathrm{Id}_X)_\star = \mathrm{Id}_{\pi_1(X,a_0)}$. Es genügt also zu zeigen, dass für zwei Abbildungen $f, g : X \to X$, welche durch die Homotopie $H : X \times [0,1] \to X$ homotop (bezüglich A) sind $f_\star = g_\star$ gilt (wir wenden das für $f = \boldsymbol{i}_A \circ r$ und $g = \mathrm{Id}_X$ an).

Sei also $H : X \times [0,1] \to X$ derart, dass

- $H(a,t) = a$ für alle t aus $[0,1]$ und a aus A.
- $H(x,0) = f(x)$ und $H(x,1) = g(x)$ für alle x aus X.

Wir wollen zeigen, dass $f_\star([\alpha])$ und $g_\star([\alpha])$ gleich sind für jede Schleife $\alpha : [0,1] \to X$ auf a_0 in X. Setze

$$\begin{array}{rccc} H_1 : & [0,1] \times [0,1] & \to & X \\ & (s,t) & \mapsto & H(\alpha(s), t) \end{array}$$

Die Abbildung H_1 ist eine Homotopie zwischen $f \circ \alpha$ und $g \circ \alpha$, also

$$f_\star([\alpha]) = [f \circ \alpha] = [g \circ \alpha] = g_\star([\alpha]).$$

□

Beispiel 5.36. In der Einheitssphäre $\mathbb{S}^n$ seien die Punkte $p_N = (1, 0, \ldots, 0)$ und $p_S = (-1, 0, \ldots, 0)$ gegeben. Der Raum $X = \mathbb{S}^n \setminus \{p_N, p_S\}$ mit der Spurtopologie hat als Deformationsretrakt die Menge

$$A = \mathbb{S}^n \cap \{x_0 = 0\},$$

welche zu $\mathbb{S}^{n-1}$ homöomorph ist, denn für die Retraktabbildung

$$\begin{array}{rccc} r : & X & \to & A \\ & (x_0, \ldots, x_n) & \mapsto & \frac{(0, x_1, \ldots, x_n)}{|(0, x_1, \ldots, x_n)|} \end{array}$$

liefert die Homotopie

$$\begin{array}{rccc} H: & X \times [0,1] & \to & X \\ & \big((x_0, \ldots, x_n), t\big) & \mapsto & \frac{(t \cdot x_0, x_1, \ldots, x_n)}{|(t \cdot x_0, x_1, \ldots, x_n)|} \end{array}$$

eine Homotopieäquivalenz bezüglich A zwischen Id_X und $\boldsymbol{i}_A \circ r$.

Aufgabe. Zeige, dass die Abbildung

$$\begin{array}{rccc} r: & \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\bar{0}\} & \to & \mathbb{S}^n \\ & \bar{x} & \mapsto & \frac{\bar{x}}{|\bar{x}|} \end{array}$$

ein Deformationsretrakt ist.

Sind $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ homöomorph?

Für ein Retrakt $r : X \to A$ ist die Abbildung $r_\star : \pi_1(X, a_0) \to \pi_1(A, a_0)$ surjektiv, wie im Beweis der Proposition 5.35 bemerkt wurde. Weil der Abschluss $\mathbb{D}$ der Kugel $B_1^{\mathbb{R}^2}(0,0)$ in $\mathbb{R}^2$ konvex ist, folgt aus dem Beispiel 5.5 und dem Korollar 5.24 folgendes Resultat:

Korollar 5.37. *Es gibt keinen Retrakt vom Abschluss $\mathbb{D}$ der Kugel $B_1^{\mathbb{R}^2}(0,0)$ auf $\mathbb{S}^1$.*

Korollar 5.38. *(Brouwer'scher Fixpunktsatz) Sei $\mathbb{D}$ der Abschluss der Kugel $B_1^{\mathbb{R}^2}(0,0)$ in $\mathbb{R}^2$. Jede stetige Abbildung $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ besitzt einen Fixpunkt x mit $f(x) = x$.*

Beweis. Sonst ist $f(x) \neq x$ für alle x aus $\mathbb{D}$ und wir können folgende Abbildung $r : \mathbb{D} \to \mathbb{S}^1$ definieren: Der Punkt $r(x)$ liegt im Schnitt von $\mathbb{S}^n$ mit dem gerichteten Vektor von $f(x)$ nach x. Da wegen der Annahme f keinen Fixpunkt besitzt, ist r wohldefiniert. Weil alles mit Hilfe der Körperoperationen definiert wird, ist r stetig. Wegen $r(x) = x$ für x aus $\mathbb{S}^1$ bekommen wir den gewünschten Widerspruch zu Korollar 5.37. $\square$

Aufgabe. Zeige, dass jede stetige Abbildung $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ mit $f(x) = x$ für x aus $\mathbb{S}^1$ surjektiv sein muss.

Satz 5.39. *(Satz von Borsuk-Ulam) Jede stetige Abbildung $f : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}^2$ besitzt einen* antipodalen *Punkt x mit $f(x) = f(-x)$.*

Beweis. Sonst ist die Abbildung

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{S}^2 & \to & \mathbb{S}^1 \\ & x & \mapsto & \frac{f(x) - f(-x)}{|f(x) - f(-x)|} \end{array}$$

wohldefiniert und stetig. Beachte, dass $g(-x) = -g(x)$. Mit Hilfe der Komposition

$$\mathbb{S}^1 \xrightarrow{\boldsymbol{i}_{\mathbb{S}^1}} \mathbb{S}^2 \xrightarrow{g} \mathbb{S}^1,$$

z. B. durch den Äquator

$$\begin{array}{rccc} \boldsymbol{i}_{\mathbb{S}^1}: & \mathbb{S}^1 & \to & \mathbb{S}^2 \\ & (x, y) & \mapsto & \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

folgt, dass die Abbildung $h = g \circ \boldsymbol{i}_{\mathbb{S}^1} : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ auch die Identität $h(-x) = -h(x)$ erfüllt.

Sei nun ein erzeugendes Element β von $\pi_1(\mathbb{S}^1, (1,0))$ und setze $\gamma = h \circ \beta$. Aus dem Korollar 5.17 folgt, dass $h_\star = (g \circ \boldsymbol{i}_{\mathbb{S}^1})_\star = g_\star \circ \boldsymbol{i}_{\mathbb{S}^1 \star}$ die triviale Abbildung ist. Wir müssen nur noch zeigen, dass γ nicht zu der konstanten Schleife C_{x_0} homotop ist, mit $x_0 = h((1,0))$, was den gewünschten Widerspruch liefert.

Sei nun $\widetilde{\gamma}$ der eindeutige Lift auf $\mathbb{R}$ bezüglich der universellen Überlagerung von $\mathbb{S}^1$ (mit festem Anfangspunkt y_0 in $\pi^{-1}(x_0)$). Aus den trigonometrischen Identitäten folgt

$$\gamma(t + \frac{1}{2}) = h(-\beta(t)) = -h(\beta(t)) = -\gamma(t), \text{ für } t \text{ zwischen } 0 \text{ und } \frac{1}{2}.$$

Also unterscheidet sich für jedes t in $[0, \frac{1}{2}]$ der Wert $\widetilde{\gamma}(t + \frac{1}{2})$ vom Wert $\widetilde{\gamma}(t)$ durch einen Faktor der Form $\frac{k_t}{2}$, wobei k_t eine ungerade ganze Zahl ist. Aus der Stetigkeit von $\widetilde{\gamma}$ folgt

$$\widetilde{\gamma}(t + \frac{1}{2}) = \widetilde{\gamma}(t) + \frac{k}{2}$$

für eine konstante ungerade Zahl k, unabhängig von t.

Insbesondere ist

$$\widetilde{\gamma}(1) - \widetilde{\gamma}(0) = \Big(\widetilde{\gamma}(1) - \widetilde{\gamma}(\frac{1}{2})\Big) + \Big(\widetilde{\gamma}(\frac{1}{2}) - \widetilde{\gamma}(0)\Big) = k \neq 0.$$

Die Differenz $\widetilde{\gamma}(1) - \widetilde{\gamma}(0)$ entspricht der Umlaufzahl von $[\gamma]$ (weil unser Anfangspunkt y_0 möglicherweise verschieden von 0 ist!). Insbesondere ist $[\gamma] \neq [\mathrm{C}_{x_0}]$, wie gewünscht. □

Satz 5.40. *(Der Fundamentalsatz der Algebra) Jedes nicht-konstante Polynom über $\mathbb{C}$ in einer Variablen besitzt eine Nullstelle.*

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit ist das Polynom $P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0$ normiert. Wir nehmen an, dass P keine Nullstelle in $\mathbb{C}$ besitzt. Mit Hilfe der Basis $\{1, i\}$ identifizieren wir $\mathbb{C}$ mit $\mathbb{R}^2$. Schreibe für θ und r aus $\mathbb{R}$ mit $r \geq 0$

$$re^{i\theta} = (r\cos\theta, r\sin\theta).$$

Für jedes $r \geq 0$ sei

$$\begin{array}{rccc} \alpha_r : & [0,1] & \to & \mathbb{S}^1 \\ & t & \mapsto & \frac{P(r \cdot e^{2\pi i t})}{|P(r \cdot e^{2\pi i t})|} \end{array}$$

Die Abbildung α_r ist eine Schleife auf $x_0 = (1,0)$ (Der Vektor $(1,0)$ in $\mathbb{R}^2$ stellt das Element 1 von $\mathbb{C}$ dar). Die Homotopie

$$\begin{array}{rccc} H_{r,r'} : & [0,1] \times [0,1] & \to & \mathbb{S}^1 \\ & (s,t) & \mapsto & \dfrac{P\Big(\big(r + s(r'-r)\big) \cdot e^{2\pi i t}\Big)}{\Big|P\Big(\big(r + s(r'-r)\big) \cdot e^{2\pi i t}\Big)\Big|} \end{array}$$

zwischen α_r und $\alpha_{r'}$ für $r' \geq r \geq 0$ liefert $[\alpha_r] = [\alpha_0] = [\mathrm{C}_{x_0}]$ für alle Werte $r \geq 0$.

Das Polynom $P_s(X) = X^n + s(a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0)$ besitzt keine Nullstelle auf dem Rand der Kugel mit Mittelpunkt $(0,0) = 0_{\mathbb{C}}$ und Radius r, wenn

$$r > \max\{1, \sum_{0 \leq i \leq n-1} |a_i|\}.$$

Beachte, dass P_1 unser ursprüngliches Polynom P und P_0 das Monom X^n ist. Wir können die obige Diskussion bei jedem dieser Polynome durchführen und schließen daraus, dass α_r homotop zu der Schleife ist, welche wir mit $s = 0$ gewinnen: Das ist die Schleife $\beta_n(t) = (\cos 2\pi nt, \sin 2\pi nt)$. Aus dem Beispiel 5.8 folgt

$$[\alpha_r] = [\beta_n] = n \cdot [\beta],$$

wobei $[\beta]$ ein Erzeugendes von $\pi(\mathbb{S}^1, (1,0))$ sei. Da $[\alpha_r]$ das triviale Element ist, folgt $n = 0$, also ist P ein konstantes Polynom. $\square$

Appendix

A Das Zorn'sche Lemma

Definition A.1. Eine Menge $\mathcal{S}$ ist *partiell angeordnet*, falls sie eine binäre Relation $\leq$ mit den folgenden Eigenschaften besitzt:

Reflexivität $x \leq x$ für alle x aus $\mathcal{S}$;

Antisymmetrie Für alle x und y aus $\mathcal{S}$ gelten $x \leq y$ und $y \leq x$ gleichzeitig genau dann, wenn $x = y$;

Transitivität Für alle x, y und z aus $\mathcal{S}$ gilt die Implikation

$$x \leq y \text{ und } y \leq z \Longrightarrow x \leq z.$$

Wir schreiben $x < y$, falls $x \leq y$ aber $x \neq y$.
Eine partielle Ordnung $\leq$ auf $\mathcal{S}$ ist *total*, oder *linear*, falls $x < y$ oder $y < x$ für alle $x \neq y$ aus $\mathcal{S}$.
Sei $\leq$ eine partielle Ordnung auf $\mathcal{S}$.

- Ein Element x ist eine *obere Schranke* für die Teilmenge Γ von $\mathcal{S}$, falls $\gamma \leq x$ für alle γ aus Γ.

- Ein Element x ist eine *untere Schranke* für die Teilmenge Γ von $\mathcal{S}$, falls $x \leq \gamma$ für alle γ aus Γ.

- Das Element x aus $\mathcal{S}$ ist *maximal*, falls die einzige obere Schranke der Teilmenge $\{x\}$ von $\mathcal{S}$ das Element x selbst ist. Oder äquivalent dazu, dass kein y aus $\mathcal{S}$ mit $x < y$ existiert. Das Element x ist das größte Element der Teilmenge Γ, falls x in Γ liegt und $y \leq x$ für alle y aus Γ.

- Das Element x aus $\mathcal{S}$ ist *minimal*, falls die einzige untere Schranke der Teilmenge $\{x\}$ von $\mathcal{S}$ das Element x selbst ist. Oder äquivalent dazu, dass kein y aus $\mathcal{S}$ mit $y < x$ existiert. Das Element x ist das kleinste Element der Teilmenge Γ, falls x in Γ liegt und $x \leq y$ für alle y aus Γ.

- Das Element a ist das *Supremum* (oder das *Oberste*) der Teilmenge Γ von $\mathcal{S}$, falls a die kleinste obere Schranke von Γ ist. Das Element a ist das *Maximum* von Γ, wenn a das Supremum von Γ ist und a in Γ liegt.

- Ein Element a ist das *Infimum* der Teilmenge Γ von $\mathcal{S}$, falls a die größte untere Schranke von Γ ist. Das Element a ist das *Minimum* von Γ, wenn a das Infimum von Γ ist und a in Γ liegt.

- Die Menge $\mathcal{S}$ ist *induktiv*, falls jede linear geordnete Teilmenge eine obere Schranke in $\mathcal{S}$ besitzt.

Bemerkung A.2. Beachte, dass jede induktive partiell geordnete Menge $\mathcal{S}$ nicht-leer ist, da die leere Menge $\emptyset$ linear geordnet ist und somit eine obere Schranke in $\mathcal{S}$ besitzt (jedes Element aus $\mathcal{S}$ ist eine obere Schranke für $\emptyset$).

Trotz des folgenden Namens ist das Zorn'sche Lemma eine Aussage der Mengenlehre, welche unabhängig vom Zermelo-Fraenkel-System und äquivalent zum *Auswahlsaxiom* ist.

Lemma A.3 (Zorn'sches Lemma). *Jede induktive partiell geordnete Menge* $(\mathcal{S}, \leq)$ *besitzt ein maximales Element.*

Literaturverzeichnis

[1] James Munkres, *Topology*, Pearson New International Edition, 560pp, (2013), ISBN:978-93-325-4953-1.