PROF. AMADOR MARTIN-PIZARRO
ÜBUNGEN: STEFAN LUDWIG

ALBERT-LUDWIGS-UNIVERSITÄT FREIBURG
WINTERSEMESTER 2024/2025

Formale Logik

Blatt 10

Abgabe: 21.01.2025, 10 Uhr

Gruppennummer angeben!

Das Blatt soll zu zweit oder dritt bearbeitet und eingereicht werden.

Dieses Blatt wird am 23.01.2025 besprochen.

==

Aufgabe 1 (6 Punkte)**.**

Wir betrachten die Sprache $\mathcal{L} = \{c_1, \ldots, c_4, R\}$ mit Konstantenzeichen $c_1, \ldots, c_4$ und mit einem zweistelligen Relationszeichen R, welches wir durch

$$R(a,b) \iff a \text{ kennt } b$$

interpretieren. Gib für jede der Aussagen

$$\begin{array}{ll} \forall x \exists y R(x,y) & \exists x \exists y R(x,y) \\ \exists x \forall y R(x,y) & \forall x \forall y R(x,y) \end{array}$$

eine $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{M}$ an, deren Universum genau aus den folgenden Individuen besteht.

$$c_1^{\mathcal{M}} = \text{Anton},\ c_2^{\mathcal{M}} = \text{Melissa},\ c_3^{\mathcal{M}} = \text{Sarah},\ c_4^{\mathcal{M}} = \text{Wilhelm}$$

In welchen Fällen gibt es nur eine solche Struktur?

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Repräsentiere die folgenden Aussagen jeweils in einer geeigneten Sprache als prädikatenlogische Formel.

(a) Jeder kennt eine Person, welche alle kennt.

(b) Alice mag alle, die eine Person mögen, welche Alice mag.

(c) Sezer hat zwei Haustiere.

(d) Susanne hat genau zwei Haustiere.

Aufgabe 3 (6 Punkte)**.** In der Sprache $\mathcal{L} = \{P\}$ mit einem einstelligen Relationszeichen P betrachten wir eine Struktur $\mathcal{M}$ mit Universum die Bewohner eines Hauses. Überdies interpretieren wir P in $\mathcal{M}$ als diejenigen Bewohner, welche ein Haustier besitzen.

Repräsentiere die folgende Aussage als $\mathcal{L}$-Aussage.

Es gibt einen Bewohner des Hauses derart, dass alle Bewohner ein Haustier besitzen, wenn dieser eine Bewohner ein Haustier besitzt.

Gilt diese Aussage in jeder solchen Struktur $\mathcal{M}$?

BITTE WENDEN!

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Wir betrachten die Sprache $\mathcal{L} = \{P, Q\}$ mit den beiden einstelligen Relationszeichen P und Q. Beweise direkt aus der Definition (mit Hilfe von $\mathcal{L}$-Strukturen), dass die $\mathcal{L}$-Aussagen

$$\forall x\big((P(x) \wedge Q(x)\big) \quad \text{und} \quad \big(\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)\big)$$

logisch äquivalent sind.