

Formale Logik

Blatt 11

Abgabe: 28.01.2025, 10 Uhr

Gruppennummer angeben!

Das Blatt soll zu zweit oder dritt bearbeitet und eingereicht werden.

Dieses Blatt wird am 30.01.2025 besprochen.

=====

Aufgabe 1 (8 Punkte).

Dachgeschoss	Christopher
3.OG	Melissa
2.OG	Maya
1.OG	Pinar
Erdgeschoss	Tobias

In der Sprache \mathcal{L} , welche aus dem zweistelligen Relationszeichen R , dem einstelligen Relationszeichen P sowie drei Konstantenzeichen c, d und e besteht, betrachten wir wieder eine Struktur \mathcal{M} mit Universum die Bewohner des links abgebildeten Hauses mit den Interpretationen

$$R^{\mathcal{M}}(u, v) \iff u \text{ mag } v$$

$$P^{\mathcal{M}}(u) \iff u \text{ besitzt ein Haustier}$$

$$c^{\mathcal{M}} = \text{Melissa}$$

$$d^{\mathcal{M}} = \text{Tobias}$$

$$e^{\mathcal{M}} = \text{Christopher}$$

(a) Repräsentiere die folgenden Aussagen als \mathcal{L} -Formel:

- Mellisa mag Tobias nicht.
- Es gibt genau zwei Bewohner ohne Haustier.
- Melissa mag alle Bewohner, welche ein Haustier besitzen.
- Tobias mag niemanden, den Melissa mag.

(b) Angenommen alle vier Aussagen aus (a) gelten in \mathcal{M} . Begründe, welche der folgenden Aussagen dann notwendigerweise auch in \mathcal{M} gelten.

- $\exists x(R(c, x) \rightarrow P(x))$
- $\forall x(R(c, x) \rightarrow P(x))$
- $(R(d, e) \rightarrow \neg P(e))$
- $\forall xP(x)$

Aufgabe 2 (4 Punkte).

Die prädikatenlogische Sprache \mathcal{L} besteht aus einem einzigen zweistelligen Relationssymbol R . Zeige direkt aus der Definition mit Hilfe von Strukturen, dass die folgende Aussage allgemeingültig ist.

$$(\forall x \forall y R(x, y) \rightarrow \forall z R(z, z))$$

BITTE WENDEN!

Aufgabe 3 (5 Punkte).

Sei $\phi[X, Y, Z_1, \dots, Z_n]$ eine Formel in einer prädikatenlogische Sprache \mathcal{L} .

- (a) Zeige direkt aus der Definition (mit Hilfe von Strukturen) folgende logische Äquivalenz

$$\forall x \forall y \varphi \sim \forall y \forall x \varphi. \quad (\forall\text{-Quantorentausch})$$

- (b) Schließe aus Aufgabenteil (a) mit Hilfe von geeigneten logischen Umformungen folgende logische Äquivalenz

$$\exists x \exists y \varphi \sim \exists y \exists x \varphi. \quad (\exists\text{-Quantorentausch})$$

Aufgabe 4 (3 Punkte).

Wir betrachten die prädikatenlogische Sprache $\mathcal{L} = \{c, d, P\}$ mit Konstantenzeichen c und d sowie mit einem einstelligen Relationszeichen P . Wir betrachten für diese Aufgabe nur \mathcal{L} -Strukturen derart, dass das Universum nur aus den Interpretationen von c als *Maya* und d als *Pinar* besteht.

Für die \mathcal{L} -Aussage $\chi = (\exists x P(x) \rightarrow P(c))$,

- (a) gib eine solche \mathcal{L} -Struktur \mathcal{M} mit $\mathcal{M} \models \chi$ an.
(b) gib eine solche \mathcal{L} -Struktur \mathcal{N} mit $\mathcal{N} \models \neg\chi$ an.
(c) Ist die \mathcal{L} -Aussage χ allgemeingültig?