Prof. Amador Martin-Pizarro
Übungen: Stefan Ludwig

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Wintersemester 2024/2025

Formale Logik
Blatt 12 **Letztes Blatt!**
Abgabe: 04.02.2025, 10 Uhr
Gruppennummer angeben!
Das Blatt soll zu zweit oder dritt bearbeitet und eingereicht werden.
Dieses Blatt wird am 06.02.2025 besprochen.

==

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.**
Betrachte eine prädikatenlogische Sprache $\mathcal{L}$ eine, welche unter anderem ein einstelliges Relationszeichen P enthält. Zeige direkt aus der Definition mit Hilfe von Strukturen, dass für jede $\mathcal{L}$-Formel $\psi = \psi[Z]$ folgende Implikation allgemeingültig ist:

$$(\exists x P(x) \to \psi[Z]) \to (\forall x(P(x) \to \psi[Z]))\,.$$

Aufgabe 2 (6 Punkte)**.**
Die prädikatenlogische Sprache $\mathcal{L}$ besteht aus zwei einstelligen Relationszeichen P und Q.

(a) Zeige folgende logische Äquivalenz mit Hilfe logischer Umformungen:

$$\neg\exists x(P(x) \wedge \neg Q(x)) \sim \forall x(P(x) \to Q(x))$$

(b) Zeige die logische Gültigkeit der folgenden Argumentform (ohne Aufgabenteil a) zu benutzen). Gib hierzu in jedem Schritt die verwendete Deduktionsregel an.

$$\frac{\neg\exists x(P(x) \wedge \neg Q(x))}{\forall x(P(x) \to Q(x))}$$

(c) Präsentiere den folgenden Text aus der Vorlesung als Argumentform und zeige ihre logische Gültigkeit (Gib dabei in jedem Schritt die verwendete Deduktionsregel an):

Wenn wahr ist, was in der Bibel steht, dann existiert ein Gott. Gott ist allmächtig, heißt es. Also gibt es etwas Allmächtiges, wenn wahr ist, was in der Bibel steht.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.**
Wir betrachten die Sprache $\mathcal{L}$, welche aus den beiden einstelligen Prädikaten P und Q besteht. In dieser Sprache betrachten wir zwei Strukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$, welche beide als Universum nur die Kollektion von Individuen a, b, c und d haben. Die Elemente aus $\mathcal{A}$, welche in der Interpretation von P (in $\mathcal{A}$) liegen sind genau a und b, und dasselbe gilt auch für $\mathcal{B}$. Nun, die Elemente in $\mathcal{A}$, welche in der Interpretation von Q liegen, sind a, b und c, wobei in $\mathcal{B}$ die Elemente, welche in der Interpretation von Q liegen, genau a, c und d sind.

Welche der Aussagen $\varphi = \forall x\big(P(x) \to Q(x)\big)$ und $\chi = \big(\forall x\, P(x) \to \forall x\, Q(x)\big)$ gelten in $\mathcal{A}$ und welche in $\mathcal{B}$? (Eventuell können zwei Aussagen oder keine in einer Struktur gelten).

Gibt es eine $\mathcal{L}$-Struktur mit Universum $\{a, b, c, d\}$, in welcher die Aussage φ gilt, jedoch χ nicht?

BITTE WENDEN!

Aufgabe 4 (6 Punkte).

In der Sprache $\mathcal{L} = \{d, P, <\}$ mit dem zweistelligen Relationszeichen $<$, dem einstelligen Relationszeichen P sowie dem Konstantenzeichen d betrachten wir die Aussagen

$$\varphi_1 = \forall x \neg (d < x) \qquad \varphi_2 = \forall x \forall y \Big(\big(\neg P(x) \wedge P(y)\big) \to (x < y) \Big)$$
$$\varphi_3 = \exists x P(x) \qquad \psi = P(d)$$

(a) Begründe mit Hilfe passender Interpretationen, inwiefern Anselms ontologischer Gottesbeweis

> »Das existiert schlechterdings so wahrhaft, daß sein Nicht-Sein nicht einmal gedacht werden kann. Denn es kann gedacht werden, daß etwas existiert, dessen Nicht-Sein nicht gedacht werden kann, was ein Größeres ist als das, dessen Nicht-Sein gedacht werden kann. Wenn daher das, über das hinaus Größeres nicht gedacht werden kann, als nicht-existierend gedacht werden kann, ist eben das, über das hinaus Größeres nicht gedacht werden kann, nicht das, über das hinaus Größeres nicht gedacht werden kann, was sich nicht miteinander vereinbaren läßt. So wahrhaft existiert also etwas, über das hinaus Größeres nicht gedacht werden kann, daß sein Nicht-Sein nicht einmal gedacht werden kann.«

durch die prädikatenlogische Argumentform $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3; \psi)$ repräsentiert wird.

(b) Zeige mit Hilfe von Strukturen, dass obige Argumentform logisch gültig ist.

(c) Folgt daraus die Existenz Gottes?