Prof. Amador Martin-Pizarro
Übungen: Stefan Ludwig

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Sommersemester 2025

Mathematische Logik

Blatt 0 - Präsenzblatt

Dieses Blatt wird in der ersten Übung (zweite Semesterwoche) besprochen.

Dieses Blatt wird nicht abgegeben und ist insbesondere nicht Teil der Studienleistung.

Aufgabe 1 (3 Punkte)**.**
Zeige induktiv über den Aufbau, dass in jeder aussagenlogischen Formel genau so viele linke wie rechte Klammer vorkommen.

Aufgabe 2 (7 Punkte)**.**
Betrachte $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ mit der partiellen Ordnung (siehe Appendix A)

$$a \preceq b \ \Leftrightarrow a \text{ teilt } b.$$

(a) Zeige, dass jede nicht-leere endliche Teilmenge von $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ ein maximales Element besitzt.

(b) Bildet die Menge der Potenzen von 2 eine Kette? Besitzt sie eine obere Schranke in $\mathbb{N} \setminus \{0\}$?

Betrachte nun eine Äquivalenzrelation E auf einer Menge X mit unendlich vielen verschiedenen Klassen.

(c) Zeige mit Hilfe des Zornschen Lemmas, dass eine Teilmenge $Y \subset X$ derart existiert, dass $\neg E(y, y')$ für $y \neq y'$ aus Y, aber jedes x aus X in Relation bezüglich E mit einem (einzigen) Element aus Y steht.

Hinweis: Betrachte die Familie $\mathcal{S} = \{Z \subset X \mid \neg E(z, z') \text{ für } z \neq z' \text{ aus } Z\}$ mit der durch Inklusion gegebenen partiellen Ordnung

Aufgabe 3 (5 Punkte)**.**
Sei G eine Gruppe und $H \lneq G$ eine echte Untergruppe. Gibt es eine echte Untergruppe M von G mit $H \leq M \lneq G$ und M maximal (bezüglich der partiellen Ordnung gegeben durch Inklusion) mit dieser Eigenschaft?
