Prof. Amador Martin-Pizarro
Übungen: Stefan Ludwig

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Sommersemester 2025

Mathematische Logik
Blatt 1
Abgabe: 05.05.2022 10Uhr
Gruppennummer angeben!

Aufgabe 1 (8 Punkte)**.**
Die Sprache $\mathcal{L} = \{f\}$ besteht aus einem einstelligen Funktionszeichen f. Betrachte folgende $\mathcal{L}$-Strukturen $\mathcal{Z}_1$ und $\mathcal{Z}_2$ mit Universum $\mathbb{Z}$ und Interpretationen

$$f^{\mathcal{Z}_1} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, \quad x \mapsto x+1 \qquad \text{und} \qquad f^{\mathcal{Z}_2} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, \quad x \mapsto \begin{cases} x+3, & \text{falls } x \text{ ungerade ist} \\ x-1, & \text{falls } x \text{ gerade ist} \end{cases}$$

(a) Zeige, dass $\mathcal{Z}_1$ und $\mathcal{Z}_2$ isomorphe $\mathcal{L}$-Strukturen sind.

(b) Ist die von $\mathbb{N}$ erzeugte Unterstruktur in $\mathcal{Z}_1$ endlich erzeugt?

(c) Beschreibe die Universen aller endlich erzeugten Unterstrukturen von $\mathcal{Z}_2$?

(d) Wir betrachten nun die Spracherweiterung $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup \{<\}$, wobei $<$ ein zweistelliges Relationszeichen ist, und erweitern die obigen Strukturen zu $\mathcal{L}'$-Strukturen $\mathcal{Z}'_1$ und $\mathcal{Z}'_2$, indem wir $<^{\mathcal{Z}'_1}$ und $<^{\mathcal{Z}'_2}$ als die übliche lineare Ordnung auf der Menge $\mathbb{Z}$ interpretieren.

Sind $\mathcal{Z}'_1$ und $\mathcal{Z}'_2$ isomorph als $\mathcal{L}'$-Strukturen?

Aufgabe 2 (3 Punkte)**.**
Betrachte einen Vektorraum V über dem endlichen Körper $K = \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ als Struktur in der Sprache $\mathcal{L}_{K-VR} = \{0, +, f_\lambda\}_{\lambda \in K}$, wobei die Interpretation der einstelligen Funktion f_λ durch Multiplikation mit dem Skalar λ gegeben ist. Ist für gegebene Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ aus V der davon erzeugte Unterraum eine definierbare Teilmenge von (der Struktur) V?

Aufgabe 3 (6 Punkte)**.**
Sei $\mathcal{L}$ die Sprache, welche aus einem zweistelligen Relationszeichen E besteht.

(a) Sei F eine Einbettung der $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{A}$ in die $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{B}$. Wir nehmen an, dass $E^{\mathcal{A}}$ eine Äquivalenzrelation auf A definiert. Zeige, dass $E^{\mathcal{B}}$ eine Äquivalenzrelation auf der Teilmenge $F(A)$ von B definiert.

(b) Wir betrachten nun die beiden folgenden abzählbaren $\mathcal{L}$-Strukturen $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$. Sowohl in $\mathcal{A}_1$ als auch in $\mathcal{A}_2$ ist die Interpretation von E eine Äquivalenzrelation mit unendlich vielen unendlichen Klassen. Des Weiteren gibt es in $\mathcal{A}_1$ genau eine endliche Äquivalenzklasse und zwar der Größe 2. In $\mathcal{A}_2$ gibt es hingegen genau zwei endliche Äquivalenzklassen, beide der Größe 2. Zeige, dass $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$ sich jeweils ineinander einbetten lassen. Sind $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$ isomorph? Ist eine dieser Einbettungen elementar?

(Bitte wenden!)

Die Übungsblätter können zu zweit eingereicht werden. Abgabe der Übungsblätter in den (mit den Nummern der Übungsgruppen gekennzeichneten) Fächern im Keller des mathematischen Instituts.

Aufgabe 4 (3 Punkte)**.**
Die Sprache $\mathcal{L} = \{+\}$ besteht aus einem einem zweistelligen Funktionszeichen $+$.

(a) Zeige, dass die (übliche) Ordnung $<$ in der $\mathcal{L}$-Struktur $(\mathbb{N}, +)$ definierbar ist. Welche Parameter werden für die Definition benötigt?

(b) Sind die $\mathcal{L}$-Strukturen $(\mathbb{N}, +)$ und $(\mathbb{Z}, +)$ elementar äquivalent?