Prof. Amador Martin-Pizarro — Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Übungen: Stefan Ludwig — Sommersemester 2025

Mathematische Logik

Blatt 10

Abgabe: 14.07.2025 10Uhr

Gruppennummer angeben!

Aufgabe 1 (5 Punkte)**.**

(a) Seien $g(\bar{x}, z)$ und $f(\bar{x})$ (primitiv) rekursive Funktionen. Zeige, dass die Funktion

$$\bar{x} \mapsto \sum_{i<f(\bar{x})} g(\bar{x}, i)$$

ebenfalls (primitiv) rekursiv ist, wobei die leere Summe Wert 0 hat.

Hinweis: Zeige zuerst, dass die Funktion $(\bar{x}, y) \mapsto \sum\limits_{z \leq y} g(\bar{x}, z)$ primitiv rekursiv ist.

(b) Zeige, dass die Teilmenge $A = \{2^k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ primitiv rekursiv ist. Schließe daraus, dass die Funktion $x \mapsto$ Anzahl von Potenzen von 2, welche kleiner als x sind, eine primitiv rekursive Funktion ist.

Aufgabe 2 (5 Punkte)**.**

(a) Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine (primitiv) rekursive streng monoton wachsende Funktion. Begründe, dass die Teilmenge $f(\mathbb{N}) \subset \mathbb{N}$ (primitiv) rekursiv ist.

HINWEIS: Warum gilt, dass $f(n) \geq n$?

(b) Sei $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine rekursive Funktion mit unendlichem Bildbereich. Zeige, dass es eine rekursive streng monoton steigende Funktion $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ derart gibt, dass $h(\mathbb{N}) \subset g(\mathbb{N})$.

Aufgabe 3 (5 Punkte)**.**

Zeige, dass die Funktion

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N}^2 & \to & \mathbb{N} \\ (k,n) & \mapsto & \langle(x_0,\ldots,x_{m-1},y_0,\ldots,y_{r-1})\rangle, \end{array} \qquad \text{wobei } k = \langle(x_0,\ldots,x_{r-1})\rangle \text{ und } n = \langle(y_0,\ldots,y_{r-1})\rangle$$

primitiv rekursiv ist.

Aufgabe 4 (5 Punkte)**.**

(a) Seien A und B rekursiv aufzählbare Teilmengen von $\mathbb{N}^k$. Zeige, dass A und B genau dann rekursiv sind, wenn $A \cap B$ und $A \cup B$ rekursiv sind.

(b) Zeige mit Hilfe von Aufgabe 2, dass jede rekursiv aufzählbare Teilmenge A von $\mathbb{N}$ eine rekursive Teilmenge $B \subset A$ derselben Mächtigkeit enthält.

Die Übungsblätter können zu zweit eingereicht werden. Abgabe der Übungsblätter in den (mit den Nummern der Übungsgruppen gekennzeichneten) Fächern im Keller des mathematischen Instituts.