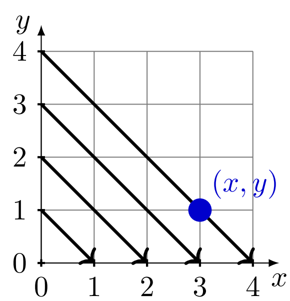
Prof. Amador Martin-Pizarro — Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Übungen: Stefan Ludwig — Sommersemester 2025

Mathematische Logik
Blatt 11
Letztes Blatt!
Abgabe: 21.07.2025 10Uhr
Gruppennummer angeben!

Aufgabe 1 (12 Punkte)**.**
In dieser Aufgabe zeigen wir zuerst, dass die Abbildung

$$\begin{array}{cccc} \alpha: & \mathbb{N}^2 & \to & \mathbb{N} \\ & (x,y) & \mapsto & \binom{x+y+1}{2} + x \end{array}$$

eine bijektive primitiv rekursive Aufzählung von $\mathbb{N}^2$ bestimmt:



Das Element $(0,0)$, mit Wert $0 = \alpha(0,0)$ wird *das kleinste Element (bezüglich der von α induzierten Aufzählung)* sein. Sein *Nachfolger* ist $(0,1)$ mit Wert $1 = \alpha(0,1)$. Auf jeder Diagonale ist der *Nachfolger* von $(x, y+1)$ der Punkt $(x+1, y)$. Der *Nachfolger* von $(x,0)$ ist der Punkt $(0, x+1)$.

(a) Schließe aus der Identität

$$1 + 2 + \ldots + n = \binom{n+1}{2},$$

dass die Funktion α injektiv ist.

HINWEIS: Auf der Gerade im Diagramm, welche den Punkt (x,y) enthält, gibt es genau x viele Vorgänger von (x,y). Wie viele Punkte gibt es auf den vorigen Geraden? Was ist der Zusammenhang mit $\alpha(x,y)$?

(b) Zeige induktiv, dass jedes n aus $\mathbb{N}$ im Bildbereich von α liegt. Schließe daraus, dass α eine Bijektion ist.

(Bitte wenden!)

Die Übungsblätter können zu zweit eingereicht werden. Abgabe der Übungsblätter in den (mit den Nummern der Übungsgruppen gekennzeichneten) Fächern im Keller des mathematischen Instituts.

(c) Zeige, dass α primitiv rekursiv ist.

(d) Zeige, dass die Funktionen $\beta_1 = \pi_1^2 \circ \alpha^{-1}$ und $\beta_2 = \pi_2^2 \circ \alpha^{-1}$ (mit der Notation der Definition 3.1 im Skript) primitiv rekursiv sind. Insbesondere ist $\alpha^{-1} = (\beta_1, \beta_2)$ auch primitiv rekursiv.

HINWEIS: $\alpha(x, y) \geq \max\{x, y\}$.

Sei nun die Fibonacci Folge:

$$a_0 = a_1 = 1 \text{ und } a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \text{ für } n \geq 2.$$

(e) Zeige mit Hilfe der Funktionen β_1 und β_2, dass die Funktion $h(n) = \alpha(a_n, a_{n+1})$ primitiv rekursiv ist.

Insbesondere ist die Funktion $n \mapsto a_n = \beta_1(h(n))$ auch primitiv rekursiv.

Aufgabe 2 (8 Punkte)**.**

Betrachte die endliche Sprache $\mathcal{L} = \{E\}$, welche aus einem zweistelligen Relationszeichen E besteht. Sei nun $\mathcal{K}$ die Klasse aller $\mathcal{L}$-Strukturen $\mathcal{A}$ derart, dass $E^{\mathcal{A}}$ eine Äquivalenzrelation auf A so definiert, dass jede Äquivalenzklasse unendlich ist.

Für k in $\{1, 2\}$ sei T_k die $\mathcal{L}$-Theorie, deren Modelle genau die $\mathcal{L}$-Strukturen $\mathcal{A}$ aus $\mathcal{K}$ mit genau k vielen Äquivalenzklassen sind. Beachte, dass T_k rekursiv axiomatisierbar ist.

(a) Zeige mit einem Back-&-Forth-Argument, dass für k fest je zwei Modelle der Theorie T_k elementar äquivalent sind. Schleiße daraus, dass T_k entscheidbar ist.

Sei nun T die $\mathcal{L}$-Theorie, deren Modelle genau die $\mathcal{L}$-Strukturen $\mathcal{A}$ aus $\mathcal{K}$ mit höchstens 2 Äquivalenzklassen sind. Beachte, dass T auch rekursiv axiomatisierbar ist.

(b) Ist T vollständig?

(c) Zeige die Äquivalenz

$$T \vdash \chi \iff T_1 \vdash \chi \text{ und } T_2 \vdash \chi$$

für jede $\mathcal{L}$-Aussage χ. Folgere daraus, dass T entscheidbar ist.