Prof. Amador Martin-Pizarro — Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Übungen: Stefan Ludwig — Sommersemester 2025

Mathematische Logik

Blatt 2

Abgabe: 12.05.2022 10Uhr

Gruppennummer angeben!

Aufgabe 1 (4 Punkte).

Gegeben eine Sprache $\mathcal{L}$ sowie $\mathcal{L}$-Strukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$, betrachte eine Einbettung $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$.

(a) Zeige mit Induktion über den Aufbau des $\mathcal{L}$-Terms $t = t[x_1, \ldots, x_n]$, dass

$$F\left(t^{\mathcal{A}}[a_1, \ldots, a_n]\right) = t^{\mathcal{B}}[F(a_1), \ldots, F(a_n)] \text{ für alle } a_1, \ldots, a_n \text{ aus } A.$$

(b) Schließe daraus die folgende Äquivalenz für alle atomaren $\mathcal{L}$-Formeln $\phi[x_1, \ldots, x_n]$ und Elemente $a_1, \ldots, a_n$ aus A:

$$\mathcal{A} \models \phi[a_1, \ldots, a_n] \iff \mathcal{B} \models \phi[F(a_1), \ldots, F(a_n)]$$

Aufgabe 2 (8 Punkte).

Sei $\mathcal{L}$ die Sprache, welche aus drei einstelligen Relationszeichen P_1, P_2 und P_3 besteht.

(a) Schreibe eine Theorie T, deren Modelle genau die $\mathcal{L}$-Strukturen $\mathcal{A}$ sind, für welche die drei Mengen $P_i^{\mathcal{A}}$, $1 \leq i \leq 3$ paarweise disjunkt sowie unendlich sind und das Universum A überdecken.

(b) Ist die Theorie konsistent? Sind je zwei Modelle der Theorie mit Kardinalität Kontinuum (die Kardinalität von $\mathbb{R}$) isomorph?

(c) Zeige mit einem Back-&-Forth-System, dass je zwei Modelle der Theorie elementar äquivalent sind.

Aufgabe 3 (2 Punkte).

Gibt es nicht-triviales Back-&-Forth-System zwischen den als $\mathcal{L}_{Ring}$-Strukturen betrachteten Körpern $(\mathbb{Q}, 0, 1, +, -, \cdot)$ und $(\mathbb{R}, 0, 1, +, -, \cdot)$?

Aufgabe 4 (6 Punkte).

Sei $\mathcal{A}$ eine Struktur in der Sprache $\mathcal{L}$ und $d_1, \ldots, d_n$ neue Konstantenzeichen.

(a) Zeige, dass $\mathcal{A}$ sich zu einer Struktur $\mathcal{A}'$ in der Sprache $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup \{d_1, \ldots, d_n\}$ (mit gleichem Universum und gleichen Interpretationen der Symbole aus $\mathcal{L}$) erweitern läßt.

(b) Wenn $n \geq 2$, sind alle solchen Erweiterungen elementar äquivalent als $\mathcal{L}'$-Strukturen, wenn das Universum A von $\mathcal{A}$ unendlich ist?

(c) Zeige mit Induktion über den Aufbau der Formel φ, dass die $\mathcal{L}'$-Struktur $\mathcal{A}'$ genau dann die Aussage $\varphi[d_1, \ldots, d_n]$ erfüllt, wenn $\mathcal{A} \models \varphi[d_1^{\mathcal{A}'}, \ldots, d_n^{\mathcal{A}'}]$.

Hinweis: Gegeben einen $\mathcal{L}$-Term $t = t[x_1, \ldots, x_n]$, wie sieht die von t induzierte Funktion in der $\mathcal{L}'$-Struktur $\mathcal{A}'$ aus?

(d) Schließe daraus, dass die $\mathcal{L}$-Formel $\varphi[x_1, \ldots, x_n]$ genau dann allgemeingültig ist, wenn die $\mathcal{L}'$-Aussage $\varphi[d_1, \ldots, d_n]$ allgemeingültig ist.

Die Übungsblätter können zu zweit eingereicht werden. Abgabe der Übungsblätter in den (mit den Nummern der Übungsgruppen gekennzeichneten) Fächern im Keller des mathematischen Instituts.