

Mathematische Logik
Blatt 3
Abgabe: 19.05.2025 10Uhr
Gruppennummer angeben!

Aufgabe 1 (7 Punkte).

Sei $\mathcal{L}$ die Sprache mit einem einstelligen Funktionszeichen f . Betrachte die $\mathcal{L}$ -Struktur $\mathcal{M}$ mit Universum $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}$, für welche die Interpretation $f^{\mathcal{M}}$ die Funktion ist, welche das Paar (r, n) auf $(r, n + 1)$ abbildet.

- (a) Zeige, dass $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ Universum einer Unterstruktur $\mathcal{A}$ von $\mathcal{M}$ ist. Ist $\mathcal{A}$ endlich erzeugt?
- (b) Gegeben Elemente $\eta_1, \dots, \eta_m$ aus $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}$, zeige, dass die Kollektion aller partieller Isomorphismen F zwischen endlich erzeugten Unterstrukturen von $\mathcal{A}$ und von $\mathcal{M}$ derart, dass für jedes $1 \leq i \leq m$ das Element η_i sowohl in $\text{Dom}(F)$ als auch in $\text{Im}(F)$ liegt und $F(\eta_i) = \eta_i$ gilt, ein Back-&-Forth-System bildet.
- (c) Schließe daraus, dass $\mathcal{A}$ eine elementare Unterstruktur von $\mathcal{M}$ ist.

Aufgabe 2 (3 Punkte).

Forme folgende Aussage in pränexer Normalform um und beschreibe die Strukturen, in welchen diese Aussage gilt.

$$\forall x \forall y \left(\neg(x \dot{=} y) \longrightarrow \forall z \forall u \left(\left(\neg(z \dot{=} x) \longrightarrow (\neg(z \dot{=} y) \vee (u \dot{=} y)) \right) \longrightarrow \neg(z \dot{=} u) \right) \right)$$

Aufgabe 3 (7 Punkte).

Zeige, dass die folgenden Formeln beweisbar sind und leite sie aus dem Hilbertkalkül für die Sprache $\mathcal{L}$ ab, welche das einstellige Funktionszeichen f enthält.

$$\begin{array}{ll} (a) \forall x \exists y (f(x) \dot{=} y) & (c) \left(\exists x \exists y \neg(f(x) \dot{=} f(y)) \rightarrow \exists u \exists z \neg(u \dot{=} f(z)) \right) \\ (b) \forall x \exists y \left((f(x) \dot{=} f(f(y))) \rightarrow (x \dot{=} y) \right) & \end{array}$$

Aufgabe 4 (3 Punkte).

Betrachte einen Körper K als Struktur in der Ringsprache $\mathcal{L}_{\text{Ring}}$. Zeige, dass für $n \geq 1$ die Kollektion von n -Tupeln $(a_0, \dots, a_{n-1})$ derart, dass das normierte Polynom $P(T) = T^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i T^i$ eine Nullstelle in K besitzt 0-definierbar ist. Kann für einen unendlichen jedoch nicht algebraisch abgeschlossenen Körper K (z. B. $K = \mathbb{Q}$) eine dieser Mengen endlich sein?