PROF. AMADOR MARTIN-PIZARRO
ÜBUNGEN: STEFAN LUDWIG

Mathematische Logik

Blatt 4

Abgabe: 26.05.2025 10Uhr

Gruppennummer angeben!

Aufgabe 1 (3 Punkte)**.**

Zeige, dass die folgende Formel im Hilbertkalkül für die Sprache $\mathcal{L}$, welche das einstellige Funktionszeichen f enthält, beweisbar ist und leite sie dementsprechend ab.

$$\left(\exists x \forall y \Big(f(y) \doteq x\Big) \to \forall z \forall u \Big(f(z) = f(u)\Big)\right)$$

Aufgabe 2 (3 Punkte)**.**

Sei $\mathcal{L} = \{c_1, \ldots, c_n\}$ die Sprache, die aus den endlich vielen Konstantenzeichen $c_1, \ldots, c_n$ besteht. Ist die $\mathcal{L}$-Theorie aller unendlichen Mengen eine Henkintheorie in $\mathcal{L}$?

Aufgabe 3 (7 Punkte)**.**

Betrachte die Sprache $\mathcal{L}_{K-VR} = \{0, +, f_\lambda\}_{\lambda \in K}$ aus Aufgabe 2 von Blatt 1, wobei K ein endlicher Körper ist.

(a) Axiomatisiere die $\mathcal{L}_{K-VR}$-Theorie T aller unendlichen K-Vektorräume.

(b) Ist die Theorie T aus Aufgabenteil (a) widerspruchsfrei?

(c) Zeige, dass je zwei Modelle von T elementar äquivalent sind. Schließe aus dem Vollständigkeitssatz, dass T vollständig ist.

Hinweis: Aufgabe 2 von Blatt 1.

Aufgabe 4 (3 Punkte)**.**

In der Spracherweiterung $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{Ring}} \cup \{f\}$ der Ringsprache mit einem zusätzlichen einstelligen Funktionszeichen f betrachte die $\mathcal{L}$-Strukturen $\mathcal{R}_1$ und $\mathcal{R}_2$, beide mit Universum der Körper $\mathbb{R}$ und jeweils den Interpretationen $f^{\mathcal{R}_1}(x) = \exp(x)$ und $f^{\mathcal{R}_2}(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, wobei $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Können $\mathcal{R}_1$ und $\mathcal{R}_2$ Modelle einer gemeinsamen vollständigen $\mathcal{L}$-Theorie sein?

Aufgabe 5 (4 Punkte)**.**

(a) Sei T eine vollständige Theorie in einer Sprache $\mathcal{L}$ derart, dass T die Aussage $\bigvee_{i=1}^n \chi_i$ beweist. Zeige ohne den Vollständigkeitssatz zu benutzen, dass $T \vdash \chi_i$ für ein $i \leq n$.

(b) Zeige mit Hilfe eines konkreten Gegenbeispieles, dass die obige Implikation nicht für jede beliebige Theorie gilt.

DIE ÜBUNGSBLÄTTER KÖNNEN ZU ZWEIT EINGEREICHT WERDEN. ABGABE DER ÜBUNGSBLÄTTER IN DEN (MIT DEN NUMMERN DER ÜBUNGSGRUPPEN GEKENNZEICHNETEN) FÄCHERN IM KELLER DES MATHEMATISCHEN INSTITUTS.